Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2006. Том 47, № 2

УДК 517.55

О РЕШЕНИИ ОБЩИХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛОВ ОТ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦИЙ

Е. Н. Михалкин

Аннотация: Получена интегральная формула для решения общего алгебраического уравнения. В этой формуле подынтегральная функция является элементарной, а интегрирование осуществляется по отрезку. Преимущество полученной формулы перед известной формулой Меллина состоит в расширении области сходимости интеграла. Это обстоятельство позволяет описать монодромию решения для триномиальных уравнений.

Ключевые слова: алгебраическое уравнение, интегральное представление, гипергеометрические функции.

Введение

В 1921 г. Меллин [1] привел интегральную формулу и разложение в гипергеометрический ряд для

$$z^n + x_1 z^{n_1} + \dots + x_p z^{n_p} - 1 = 0, \quad n > n_1 > \dots > n_p > 0 \tag{1}$$

(см. также [2]). Указанная формула была получена им для ветви $z(x)$ с условием $z(0) = 1$ и названа главным решением уравнения (1). Легко видеть, что все остальные ветви получаются из $z(x)$ по формуле

$$z_j(x) = \varepsilon^j z(\varepsilon^j x), \quad j = 1, \dots, n-1,$$

где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — первообразный корень. Формула Меллина следующая:

$$z(x) = \frac{1}{(2\pi i)^p} \int\limits_{\gamma + i\mathbb{R}^p} \frac{\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{n_1}{n}z_1 - \dots - \frac{n_p}{n}z_p\right)\Gamma(z_1)\dots\Gamma(z_p)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n_1'}{n}z_1 + \dots + \frac{n_p'}{n}z_p + 1\right)} x_1^{-z_1} \dots x_p^{-z_p}\, dz, \tag{2}$$

где Γ — гамма-функция Эйлера, γ — точка из многогранника

$$\{u \in \mathbb{R}^p : u_1 > 0, \dots, u_p > 0,\ n_1 u_1 + \dots + n_p u_p < 1\},$$

а $dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$. На основе интегрального представления (2) и теории многомерных вычетов в статье [2] описаны некоторые аналитические продолжения $z(x)$.

Отметим, что в этой формуле подынтегральное выражение является трансцендентной функцией, а множество интегрирования неограниченное.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–1212.2003.1).

В настоящей статье предлагается интегральная формула для решения общего алгебраического уравнения с интегрированием по компакту (отрезку) элементарной функции. В этой формуле область сходимости интеграла шире, чем в формуле Меллина (2). Для формулировки основного результата настоящей статьи обозначим
$$n_i' = n - n_i, \quad y_i = x_i t^{\frac{n_i}{n}} (1-t)^{\frac{n_i'}{n}}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Ветвь алгебраической функции $z(x)$ решения уравнения (1) с условием $z(0) = 1$ допускает представление в виде интеграла*
$$z(x) = 1 + \frac{1}{2\pi i n} \int\limits_0^1 t^{\frac{1-n}{n}} (1-t)^{-\frac{1+n}{n}} \Bigg[e^{\frac{\pi i}{n}} \ln\Bigg(1 + \sum_{k=1}^{p} e^{-\frac{n_k'}{n}\pi i} y_k\Bigg) - e^{-\frac{\pi i}{n}} \ln\Bigg(1 + \sum_{k=1}^{p} e^{\frac{n_k'}{n}\pi i} y_k\Bigg)\Bigg] dt, \tag{4}$$
где ветви логарифма определены в области пространства $\mathbb{C}^p$ переменного $x = (x_1, \dots, x_p)$, полученной удалением из $\mathbb{C}^p$ двух семейств комплексных гиперплоскостей
$$\Sigma_- = \bigcup_{t\in[0;1]} \Bigg\{ \sum_{k=1}^{p} x_k t^{\frac{n_k}{n}} (1-t)^{\frac{n'_k}{n}} e^{-\frac{n_k}{n}\pi i} = 1 \Bigg\},$$
$$\Sigma_+ = \bigcup_{t\in[0;1]} \Bigg\{ \sum_{k=1}^{p} x_k t^{\frac{n_k}{n}} (1-t)^{\frac{n'_k}{n}} e^{\frac{n_k}{n}\pi i} = 1 \Bigg\},$$
и выбираются условием $\ln 1 = 0$. *Таким образом, $z(x)$ голоморфно и однозначно продолжается из окрестности нуля в область $\mathbb{C}^p \setminus (\Sigma_- \cup \Sigma_+)$.*

Выражаю благодарность В. А. Степаненко, замечание которого позволило улучшить доказательство сформулированной теоремы.

1. Доказательство теоремы 1

Для доказательства воспользуемся представлением $z(x)$ в виде гипергеометрического ряда (см. [1, 3]):
$$z(x) = \frac{1}{n} \sum_{|k|\geq 0} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma\big(\frac{1}{n} + \frac{n_1}{n} k_1 + \dots + \frac{n_p}{n} k_p\big)}{k_1! \dots k_p! \Gamma\big(\frac{1}{n} - \frac{n_1'}{n} k_1 - \dots - \frac{n_p'}{n} k_p + 1\big)} x_1^{k_1} \dots {x_p}^{k_p},$$
где $|k| = k_1 + \dots + k_p$, $k_i \geq 0$.

Пользуясь формулой дополнения $\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{\Gamma(1-z)\sin \pi z}{\pi}$, перепишем рассматриваемый ряд в виде
$$z(x) = \frac{1}{\pi n} \sum_{|k|\geq 0} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma\big(\frac{1}{n} + \frac{n_1}{n} k_1 + \dots + \frac{n_p}{n} k_p\big) \Gamma\big(-\frac{1}{n} + \frac{n_1'}{n} k_1 + \dots + \frac{n_p'}{n} k_p\big)}{k_1! \dots k_p!} \times \sin\pi\Bigg(\frac{1}{n} - \frac{n_1'}{n} k_1 - \dots - \frac{n_p'}{n} k_p + 1\Bigg) {x_1}^{k_1} \dots {x_p}^{k_p}$$
$$= 1 + \frac{1}{\pi n} \sum_{|k|\geq 1} \frac{(-1)^{|k|} \Gamma\big(\frac{1}{n} + \frac{n_1}{n} k_1 + \dots + \frac{n_p}{n} k_p\big) \Gamma\big(-\frac{1}{n} + \frac{n_1'}{n} k_1 + \dots + \frac{n_p'}{n} k_p\big)}{k_1! \dots k_p!} \times \sin\pi\Bigg(\frac{1}{n} - \frac{n_1'}{n} k_1 - \dots - \frac{n_p'}{n} k_p + 1\Bigg) {x_1}^{k_1} \dots {x_p}^{k_p}.$$

Используя определение бета-функции и ее связь с гамма-функцией, получим

$$z(x) = 1 + \frac{1}{\pi n} \times \sum_{|k|\geq 1} \frac{(-1)^{|k|}\Gamma(k_1+\dots+k_p)\sin\pi\bigl(\frac{1}{n}-\frac{n_1{}'}{n}k_1-\dots-\frac{n_p{}'}{n}k_p+1\bigr)x_1{}^{k_1}\dots x_p{}^{k_p}}{k_1!\dots k_p!} \times \int\limits_0^1 t^{\frac{1}{n}+\frac{n_1}{n}k_1+\dots+\frac{n_p}{n}k_p-1}(1-t)^{-\frac{1}{n}+\frac{n_1{}'}{n}k_1+\dots+\frac{n_p{}'}{n}k_p-1}\,dt.$$

Покажем, что в последнем выражении можно поменять местами порядок суммирования и интегрирования, т. е. что

$$z(x) = 1 + \frac{1}{\pi n}\int\limits_0^1 t^{\frac{1-n}{n}}(1-t)^{-\frac{1+n}{n}} \times \sum_{|k|\geq 1} \frac{(-1)^{|k|}\Gamma(k_1+\dots+k_p)\sin\pi\bigl(\frac{1}{n}-\frac{n_1{}'}{n}k_1-\dots-\frac{n_p{}'}{n}k_p+1\bigr)}{k_1!\dots k_p!} \times \bigl[x_1 t^{\frac{n_1}{n}}(1-t)^{\frac{n_1'}{n}}\bigr]^{k_1}\dots\bigl[x_p t^{\frac{n_p}{n}}(1-t)^{\frac{n_p'}{n}}\bigr]^{k_p}\,dt.$$

В самом деле, элементы последнего ряда мажорируются величинами

$$\frac{|k|!}{k_1!\dots k_p!}\bigl[x_1 t^{\frac{n_1}{n}}(1-t)^{\frac{n_1'}{n}}\bigr]^{k_1}\dots\bigl[x_p t^{\frac{n_p}{n}}(1-t)^{\frac{n_p'}{n}}\bigr]^{k_p},$$

которые составляют ряд геометрической прогрессии для функции

$$\frac{1}{1-\sum\limits_{i=1}^{p}\bigl(x_i t^{\frac{n_i}{n}}(1-t)^{\frac{n_i'}{n}}\bigr)},$$

абсолютно сходящийся к этой функции при малых $|x_i|$.

Поскольку ряд под интегралом в выражении функции $z(x)$ фактически зависит от величин

$$y_i = x_i t^{\frac{n_i}{n}}(1-t)^{\frac{n_i'}{n}}, \quad i = 1,\dots,p,$$

целесообразно ввести в рассмотрение ряд

$$H(y_1,\dots,y_p) = \sum_{|k|\geq 1} \frac{(-1)^{|k|}\Gamma(k_1+\dots+k_p)\sin\pi\bigl(\frac{1}{n}-\frac{n_1{}'}{n}k_1-\dots-\frac{n_p{}'}{n}k_p+1\bigr)}{k_1!\dots k_p!}y_1^{k_1}\dots y_p^{k_p}, \tag{5}$$

в результате чего $z(x)$ запишется в виде

$$z(x) = 1 + \frac{1}{\pi n}\int\limits_0^1 t^{\frac{1-n}{n}}(1-t)^{-\frac{1+n}{n}}H(y_1,\dots,y_p)\,dt. \tag{6}$$

После применения к (5) формул $\Gamma(n) = (n-1)!$ и $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ получим равенство

$$
\begin{aligned}
&H(y_1,\dots,y_p) \\
&\quad= \frac{1}{2i}\sum_{|k|\ge 1}\frac{(-1)^{|k|}(k_1+\dots+k_p-1)!e^{(\frac{1}{n}-\frac{n_1{}'}{n}k_1-\dots-\frac{n_p{}'}{n}k_p+1)\pi i}}{k_1!\dots k_p!}y_1^{k_1}\dots y_p^{k_p} \\
&\quad- \frac{1}{2i}\sum_{|k|\ge 1}\frac{(-1)^{|k|}(k_1+\dots+k_p-1)!e^{-(\frac{1}{n}-\frac{n_1{}'}{n}k_1-\dots-\frac{n_p{}'}{n}k_p+1)\pi i}}{k_1!\dots k_p!}y_1^{k_1}\dots y_p^{k_p} \\
&\quad= -\frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{2i}\sum_{|k|\ge 1}\frac{(k_1+\dots+k_p-1)!\left(-e^{-\frac{n_1'}{n}\pi i}y_1\right)^{k_1}\dots\left(-e^{-\frac{n_p'}{n}\pi i}y_p\right)^{k_p}}{k_1!\dots k_p!} \\
&\qquad\qquad+ \frac{e^{-\frac{\pi i}{n}}}{2i}\sum_{|k|\ge 1}\frac{(k_1+\dots+k_p-1)!\left(-e^{\frac{n_1'}{n}\pi i}y_1\right)^{k_1}\dots\left(-e^{\frac{n_p'}{n}\pi i}y_p\right)^{k_p}}{k_1!\dots k_p!}.
\end{aligned}
$$

Воспользуемся равенством

$$
\sum_{|k|\ge 1}\frac{(k_1+\dots+k_p-1)!}{k_1!\dots k_p!}z_1{}^{k_1}\dots z_p{}^{k_p} = -\ln(1-z_1-\dots-z_p),
$$

в результате чего получим

$$
\begin{aligned}
H(y_1,\dots,y_p) &= \frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{2i}\ln(1+e^{-\frac{n_1'}{n}\pi i}y_1+\dots+e^{-\frac{n_p'}{n}\pi i}y_p) \\
&\qquad - \frac{e^{-\frac{\pi i}{n}}}{2i}\ln(1+e^{\frac{n_1'}{n}\pi i}y_1+\dots+e^{\frac{n_p'}{n}\pi i}y_p). \qquad (7)
\end{aligned}
$$

Из (6) следует, что условие $z(0) = 1$ будет обеспечено, если в (7) выбрать ветви логарифма так, чтобы выполнялось равенство $H(0) = 0$, и это достигается выбором ветвей логарифма с помощью условия $\ln 1 = 0$.

Итак, показано, что

$$
\begin{aligned}
H(y_1,\dots,y_p) &= \frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{2i}\ln(1+e^{-\frac{n_1'}{n}\pi i}y_1+\dots+e^{-\frac{n_p'}{n}\pi i}y_p) \\
&\qquad - \frac{e^{-\frac{\pi i}{n}}}{2i}\ln(1+e^{\frac{n_1'}{n}\pi i}y_1+\dots+e^{\frac{n_p'}{n}\pi i}y_p), \qquad (8)
\end{aligned}
$$

где y_i выражается через x_i согласно равенству (3), а ветви логарифма выбираются согласно условию $\ln 1 = 0$. Логарифмические функции в (8) голоморфны и однозначны в $\mathbb{C}^p \setminus \Sigma_- \cup \Sigma_+$, где $\Sigma_\mp$ определены в формулировке теоремы 1. После подстановки (8) в (6) получаем равенство (4). Тем самым теорема 1 доказана.

2. Применение к триномиальному уравнению

Рассмотрим уравнение вида (1) в случае $p = 1$, т. е. когда в уравнении всего один параметр x_1, который мы обозначим через x. Соответствующее уравнение

$$
z^n + xz^m - 1 = 0, \quad 0 < m < n, \qquad (9)
$$

назовем *триномиальным* уравнением. Для него главное решение (4) запишется в виде

$$z(x) = 1 + \frac{1}{2\pi i n}\int\limits_0^1 t^{\frac{1-n}{n}}(1-t)^{-\frac{1+n}{n}}\big[e^{\frac{\pi i}{n}}\ln(1+e^{-\frac{n-m}{n}\pi i}y) - e^{-\frac{\pi i}{n}}\ln(1+e^{\frac{n-m}{n}\pi i}y)\big]\,dt, \quad (10)$$

где $y = xt^{\frac{m}{n}}(1-t)^{\frac{n-m}{n}}$. Максимальное значение функции $t^{\frac{m}{n}}(1-t)^{\frac{n-m}{n}}$ на отрезке $[0,1]$ равно $\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}$, поэтому множества $\Sigma_{\mp}$ в формулировке теоремы 1 представляют собой пару лучей $\Sigma_{\mp} = \left\{\tau e^{\pm\frac{m\pi i}{n}} : \tau \geq \frac{1}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}}\right\}$ (см. рис. 1).

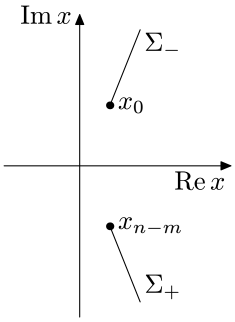

Рис. 1.

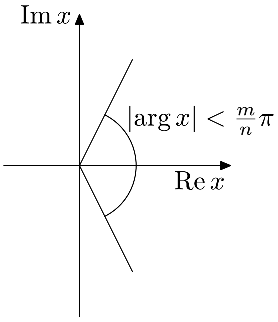

Рис. 2.

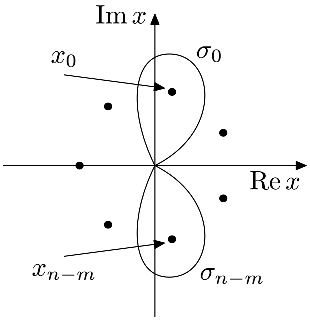

Рис. 3.

Следует отметить, что сектор, ограниченный продолжениями этих лучей до их пересечения (в начале координат), является областью сходимости интеграла Меллина — Барнса (2), представляющего главное решение $z(x)$ триномиального уравнения (9) (имеется в виду сектор, содержащий луч $x > 0$). Действительно, интеграл имеет вид

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}} \frac{\frac{1}{n}\,\Gamma\left(\frac{1}{n} - \frac{m}{n}z\right)\Gamma(z)}{\Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{n-m}{n}z + 1\right)} x^{-z}\,dz, \quad (11)$$

где $0 < \gamma < \frac{1}{m}$, и согласно [4] его область сходимости вычисляется по формуле

$$|\arg x| < \frac{\pi}{2}\left(\frac{m}{n} + 1 - \frac{n-m}{n}\right) = \frac{m}{n}\pi$$

(см. рис. 2).

Поясним, что в соответствии с [4] здесь в скобках просуммированы со знаком «+» модули коэффициентов при z в аргументах гамма-функции в числителе интеграла (11) и со знаком «−» коэффициент в знаменателе. Поскольку по теореме 1 интеграл (10) сходится во всей плоскости переменного x, кроме двух лучей, видим, что в случае триномиального уравнения область сходимости интеграла (10) значительно шире области сходимости интеграла Меллина — Барнса (11).

Не ограничивая общности, будем считать, что m и n взаимно просты (уравнение (9) сводится к этому случаю заменой $y = z^d$, где d — наибольший общий делитель m и n). В этом случае дискриминант уравнения допускает наиболее краткую запись и он равен (см. [3])

$$\Delta = (-1)^n[(-1)^m n^n - m^m(n-m)^{n-m}x^n].$$

Таким образом, дискриминантное множество составляет последовательность точек

$$x_k = \frac{e^{\pi i \frac{m+2k}{n}}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}}, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

лежащих на одной окружности. Заметим, что точки x_0 и x_{n-m} дискриминантного множества суть начала лучей Σ_- и Σ_+, вне которых по теореме 1 $z(x)$ голоморфна и однозначна. Поэтому, обозначив через σ_k петлю, проходящую через $x = 0$ и окружающую лишь точку x_k, мы приходим к следующему утверждению.

Следствие 1. *Главная ветвь $z(x)$ триномиального уравнения* (9) *переходит в себя при обходе всех петель σ_k, кроме σ_0 и σ_{n-m}.*

Используя рассуждение симметрии и то, что остальные ветви имеют вид $z_j(x) = \varepsilon^j z(\varepsilon^j x)$, $j = 1, \ldots, n-1$, где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$ — первообразный корень, получаем

Следствие 2. *Каждая ветвь $z_j(x)$ имеет ветвление лишь в паре точек* $x = \frac{e^{\frac{\pi i}{n}(\pm m - 2j)}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}}$.

Покажем, что каждая из дискриминантных точек x_k является точкой ветвления лишь двух ветвей из набора $z_0(x), \ldots, z_{n-1}(x)$ всех ветвей. Так как при $0 \le j_1, j_2 \le n-1$ уравнения

$$e^{\frac{\pi i}{n}(\pm m - 2j_1)} = e^{\frac{\pi i}{n}(m - 2j_2)}, \quad e^{\frac{\pi i}{n}(\pm m - 2j_1)} = e^{\frac{\pi i}{n}(-m - 2j_2)}$$

имеют лишь решения $j_2 = (j_1 + m)(\mathrm{mod}\, n)$, $j_2 = (j_1 - m)(\mathrm{mod}\, n)$, каждая пара ветвей z_j и $z_{(j+m)(\mathrm{mod})}$, z_j и $z_{(j-m)(\mathrm{mod}\, n)}$ имеет единственную общую точку ветвления. Обозначим ее через x_k и найдем k. Для этого решим уравнения

$$e^{\frac{\pi i}{n}(-m-2j)} = e^{\frac{\pi i}{n}(m+2k_1)}, \quad e^{\frac{\pi i}{n}(m-2j)} = e^{\frac{\pi i}{n}(m+2k_2)},$$

откуда получаем $k_1 = (-j - m)(\mathrm{mod}\, n)$, $k_2 = -j(\mathrm{mod}\, n)$.

Ветвь z_j при обходе петли $\sigma_{(-j-m)(\mathrm{mod}\, n)}$ переходит в ветвь $z_{(j+m)(\mathrm{mod}\, n)}$. Действительно, если предположить, что рассматриваемая ветвь переходит в отличную от $z_{(j+m)(\mathrm{mod}\, n)}$ ветвь, то точка $x_{(-j-m)(\mathrm{mod}\, n)}$ будет являться точкой ветвления бесконечного порядка, так как лишь две ветви z_j и $z_{(j+m)(\mathrm{mod}\, n)}$ имеют ветвление в этой точке. Аналогично получаем, что ветвь z_j при обходе петли $\sigma_{-j(\mathrm{mod}\, n)}$ переходит в ветвь $z_{(j-m)(\mathrm{mod}\, n)}$.

Найдем порядок ветвления точек x_k. Как показано выше, ветвь z_j при обходе петли $\sigma_{(-j-m)(\mathrm{mod}\, n)}$ переходит в ветвь $z_{(j+m)(\mathrm{mod}\, n)}$, а ветвь $z_{(j+m)(\mathrm{mod}\, n)}$ при обходе петли $\sigma_{(-j-m)(\mathrm{mod}\, n)}$ переходит в ветвь $z_{(j+m-m)(\mathrm{mod}\, n)} = z_j$. Таким образом, ветвь z_j при двукратном обходе петли $\sigma_{(-j-m)(\mathrm{mod})}$ переходит сама в себя. Следовательно, порядок ветвления точек x_k равен двум. Итак, доказана

Теорема 2. *Если m и n взаимно просты, то всякая ветвь $z_j(x)$ триномиального уравнения* (9) *имеет ветвление* (*причем второго порядка*) *лишь в паре точек*

$$\frac{e^{\frac{\pi i}{n}(m-2j)}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}} = x_{-j(\mathrm{mod}\, n)}, \quad \frac{e^{\frac{\pi i}{n}(-m-2j)}}{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{n-m}{n}\right)^{\frac{n-m}{n}}} = x_{(-j-m)(\mathrm{mod}\, n)}.$$

При этом ветвь z_j при обходе петли $\sigma_{-j(\mathrm{mod}\, n)}$ переходит в ветвь $z_{(j-m)(\mathrm{mod}\, n)}$, а при обходе петли $\sigma_{(-j-m)(\mathrm{mod}\, n)}$ — в ветвь $z_{(j+m)(\mathrm{mod}\, n)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mellin H. J.* Résolution de l'equation algébrique générale á l'aide de la fonction gamma // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1921. V. 172. P. 658–661.

2. *Семушева А. Ю., Цих А. К.* Продолжение исследований Меллина о решении алгебраических уравнений // Комплексный анализ и дифференциальные операторы (к 150-летию С. В. Ковалевской). Красноярск: КрасГУ, 2000. С. 134–146.

3. *Passare M., Tsikh A.* Algebraic equations and hypergeometric series // The legacy of Niels Henrik Abel. Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2004. P. 653–672.

4. *Жданов О. Н., Цих А. К.* Исследование кратных интегралов Меллина — Барнса с помощью многомерных вычетов // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 282–298.

Статья поступила 19 февраля 2005 г.

Михалкин Евгений Николаевич
Красноярский гос. университет, факультет математики и информатики,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
mikhalkin@bk.ru