Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2006. Том 47, № 2

УДК 514.763.22+517.518.15+514.752.8

МЕТРИКИ РАВНОМЕРНО РЕГУЛЯРНЫХ ПРОСТРАНСТВ КАРНО — КАРАТЕОДОРИ И ИХ КАСАТЕЛЬНЫХ КОНУСОВ

А. В. Грешнов

Аннотация: На равномерно регулярных пространствах Карно — Каратеодори доказывается эквивалентность квазиметрик, порожденных различными базисами векторных полей, согласованными с фильтрацией пространства. Доказывается теорема о нильпотентном касательном конусе для равномерно регулярных пространств Карно — Каратеодори, снабженных квазиметриками. Как следствие получается теорема об изоморфизме нильпотентных касательных конусов, определенных в общей выделенной точке.

Ключевые слова: пространства Карно — Каратеодори, нильпотентные группы.

Введение

В работе изучаются свойства отображений равномерно регулярных пространств Карно — Каратеодори и их касательных конусов Громова [1–4], снабженных *квазиметриками Карно — Каратеодори.* Основной результат представленной работы состоит в следующем. Пусть $\big(O, d_{cc}^1\big)$, $\big(O, d_{cc}^2\big)$ — два локальных равномерно регулярных пространства Карно — Каратеодори, где d_{cc}^1, d_{cc}^2 — квазиметрики Карно — Каратеодори (см. определения 2.4–2.6), индуцированные двумя различными гладкими базисами векторного расслоения TO, согласованными с его фильтрацией. Тогда тождественное отображение $\mathrm{Id} : \big(O, d_{cc}^1\big) \to \big(O, d_{cc}^2\big)$ является билипшицевым (другими словами, метрики d_{cc}^1, d_{cc}^2 эквивалентны). При этом нильпотентные касательные конусы $\big(O, d_c^{1,g}\big)$, $\big(O, d_c^{2,g}\big)$ этих пространств, определенные в некоторой выделенной точке $g \in O$, изоморфны, а при некоторых дополнительных условиях отображение $\mathrm{Id} : \big(O, d_{cc}^{1,g}\big) \to \big(O, d_{cc}^{2,g}\big)$ билипшицево.

Равномерно регулярное (или *эквирегулярное*) пространство Карно — Каратеодори [3] — это риманово многообразие M, касательное расслоение TM которого обладает гладким равномерно регулярным горизонтальным распределением H, т. е. образующим следующую *фильтрацию* касательного расслоения:

$$H = H_1 \subset H_2 \subset \dots \subset H_C = TM, \quad C = \mathrm{const}, \tag{1}$$

где H_i определяется в каждой точке $g \in M$ как векторное пространство, натянутое на значения коммутаторов до порядка $i-1$ включительно горизонтальных векторных полей, и $\dim H_i(g)$ не зависит от выбора точки $g \in M$. Назовем векторные поля $X_1, \dots, X_{\dim M}$, значения которых образуют в точке $g \in M$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 03–01–00899-а, 05–01–00482-а), гранта ФСОН, гранта им. М. А. Лаврентьева СО РАН №1.

базис пространства T_gM, *согласованными* с фильтрацией (1) в точке $g \in M$, если значения векторных полей $X_1, \dots, X_{\dim H_i}$, $i = 1, \dots, C$, образуют базис подпространства $H_i(g) \subset T_gM$ в точке g. Понятно, что если векторные поля согласованы с фильтрацией (1) в точке $g \in M$, то они будут согласованы с фильтрацией (1) и в некоторой окрестности U точки $g \in M$.

Для каждого векторного поля X_i определим его *формальную степень* $\deg X_i = \min\{j \mid X_i \in H_j\}$. *Расстояние Карно — Каратеодори* между точками $u, v \in M$ определяется как точная нижняя грань длин

$$l(\gamma) = \int_0^{s_0} \langle \dot\gamma(s); \dot\gamma(s)\rangle^{1/2}\, ds$$

всех абсолютно непрерывных кривых $\gamma(s)$, $s \in [0, s_0]$, таких, что $\gamma(0) = u$, $\gamma(s_0) = v$, $\dot\gamma(s) \in H_1(\gamma(s))$ п. в. (более детальную информацию по анализу на пространствах Карно — Каратеодори и группах Карно читатель может найти, например, в [3–8]).

О квазиметриках Карно — Каратеодори хорошо известен следующий результат, доказанный Найджелом, Стейном и Вэйнгером [9]. Пусть базис векторных полей касательного расслоения TU, согласованный с фильтрацией (1) в U, образован некоторыми коммутаторами горизонтальных векторных полей (см. [9, с. 112]).

Теорема Ball-Box (см. [3, 9, 10]). *Для каждой точки $g \in M$ найдутся ее окрестность U и положительные константы γ, r_0, не зависящие от выбора точки $v \in U$, такие, что*

$$\mathrm{Box}_{cc}(v, \gamma^{-1}r) \subset \mathscr{B}(v, r) \subset \mathrm{Box}_{cc}(v, \gamma r), \quad r \le r_0,$$

где $\mathscr{B}(v, r)$ — шар в метрике Карно — Каратеодори, $\mathrm{Box}_{cc}(v, r)$ — шар в квазиметрике, индуцированной выбранным базисом векторных полей.

Понятно, что способ определения векторных полей, согласованных с фильтрацией (1) в некоторой области $U \subset M$, не является единственным. Пусть некоторые гладкие векторные поля X_i', $i = 1, \dots, \dim M$, отличные от X_i, согласованы с фильтрацией (1) в области U. В § 2 настоящей работы мы доказываем, что квазиметрики, соответствующие X_i, X_i', $i = 1, \dots, \dim M$, локально эквивалентны (свойство 2.2).

В начале 80-х гг. М. Громов [11] определил расстояние d_{GH} между компактными метрическими пространствами, обобщающее известное определение расстояния по Хаусдорфу между множествами, — *расстояние по Громову — Хаусдорфу*. Используя d_{GH}-сходимость метрических пространств, Громов [12] ввел понятие *касательного конуса* метрического пространства (Z, d) в предписанной точке $g \in Z$ как предел по Громову — Хаусдорфу метрических пространств $(Z, \lambda d)$ при $\lambda \to \infty$. Касательный конус и связанные с ним понятия оказались полезными в вопросах, связанных с анализом на общих метрических пространствах (см. [2]), группах Карно (см. [13–15]), неголономных многообразиях с метриками Карно — Каратеодори (см. [16–18]), и др.

В 1985 г. Митчелл [1] рассмотрел задачу о существовании касательного конуса для равномерно регулярных пространств Карно — Каратеодори M. В работе [1] им сформулирована теорема о том, что в каждой точке g пространства Карно — Каратеодори с метрикой Карно — Каратеодори d_1 (см. обозначение в [1, с. 39]) касательный конус существует и изометричен нильпотентной группе

Ли с соответствующей метрикой Карно — Каратеодори [1, теорема 1], и предложена схема доказательства этой теоремы. Подход Митчелла, базирующийся на технике работы [19], основан на свойствах вспомогательных метрик Карно — Каратеодори d_r, $r \in [1, \infty)$, порожденных подрасслоениями, натянутыми на векторные поля $(h_r)_*X_1, \dots, (h_r)_*X_{\dim H_1}$ (здесь h_r — неоднородная группа растяжений, согласованная со степенями векторных полей, определенная локально при помощи нормальных координат пространства M): метрики d_r сходятся в смысле Громова — Хаусдорфа к предельной метрике d_∞ при $r \to \infty$, при этом квазиизометрическое расстояние между пространствами (M, rd_1) и (M, d_r) стремится к 0 при $r \to \infty$ (см. [1, леммы 3.1, 3.2]). Однако определенная небрежность в изложении, допущенная в [1], породила различные интерпретации и вопросы, связанные с результатами из [1] (см. [7, 16, 17]). В 1996 г. М. Громов в работе [3] ввел понятие *нильпотентного касательного конуса* на равномерно регулярных пространствах Карно — Каратеодори. Нильпотентный касательный конус в точке $g \in M$ определялся как группа Ли, соответствующая алгебре Ли, которая получается в результате равномерного предельного перехода в подходящей системе координат векторных полей $\{(h_{\varepsilon^{-1}})_*\varepsilon^{\deg X_i}X_i\}$, $i = 1, \dots, \dim M$, где векторные поля X_i рассматриваются в некоторой ε-окрестности точки g. На самом деле процедура построения нильпотентного касательного конуса и предел по Громову — Хаусдорфу метрических пространств (M, td_{cc}) при $t \to \infty$ локально дают нам одно и то же метрическое пространство (см. [3, 18]) — стратифицированную однородную группу [20], снабженную соответствующей квазиметрикой, однако здесь мы не будем обсуждать этот вопрос. Также отметим диссертацию В. Н. Берестовского [21], где доказано существование нильпотентного касательного конуса на локально компактных однородных пространствах с внутренней метрикой.

В § 3 нашей работы для локального равномерно регулярного пространства Карно — Каратеодори, снабженного произвольным гладким базисом векторных полей $\{X_i\}$, согласованным с фильтрацией (1), мы строим, используя идею Громова из [3], нильпотентный касательный конус в выделенной точке g (см. определение 3.1) и доказываем, что он локально изоморфен некоторой канонической группе Карно, структурные константы которой, вообще говоря, зависят от выбора $\{X_i\}$ (см. п. 3.2 в § 3). Отметим, что наше доказательство теоремы о нильпотентном касательном конусе отличается от предлагаемого в [3] и технически близко работам [9, 22].

Основываясь на работе Митчелла, в 1995 г. Г. Маргулис и Д. Мостов [16] выдвинули концепцию *cc-дифференцируемости* отображений на равномерно регулярных пространствах Карно — Каратеодори, при помощи которой ими изучались свойства квазиконформных отображений. Найдя аргументы работы [16] недостаточными, в 2000 г. Г. Маргулис и Д. Мостов выпустили работу [17], в которой вновь обсуждалась концепция *cc*-дифференцируемости. Одна из основных задач работы [17] — *независимость определения касательного конуса равномерно регулярного пространства Карно — Каратеодори от выбора системы координат*. Касательный конус в точке $m \in M$ в [17] интерпретируется как класс кривых, эквивалентных относительно действия неоднородной группы растяжений кривым $\exp_m h_t\xi$, $\xi \in \mathbb{R}^{\dim M}$ (см. [17, следствия 4.5, 4.6]), групповая операция на касательном конусе определяется посредством формулы

$$\exp \sum_{\omega, j} (\xi_{i,m_0})^\omega_j \widehat{X}^\omega_j \circ \exp \sum_{\omega, j} (\eta_{i,m_0})^\omega_j \widehat{X}^\omega_j(m_0), \tag{2}$$

где m_0 из окрестности точки m (см. [17, замечание на с. 315 и (5.4.1)]). Основной результат работы [17] сформулирован в теореме 5.7, где, в частности, говорится, что касательный конус в точке $m \in M$ является градуированной нильпотентной группой, и умножение этой группы, определяемое при помощи (2), не зависит от выбора римановой метрики на M. Таким образом, касательные конусы, определенные по различным базисам векторных полей, согласованных с фильтрацией (1), и имеющие общую выделенную точку, изоморфны. Отметим, что формула (2) должна однозначно определять элемент вида $\exp \sum\limits_{\omega,j} (\zeta_{i,m_0})^\omega_j \widehat{X}^\omega_j(m_0)$, равный (2), которому соответствует представитель класса эквивалентности кривых с началом в точке m_0. Такой элемент находится однозначно при помощи формулы Кэмпбелла — Хаусдорфа. Рассмотрим два произвольных базиса векторных полей $\{X_i\}$, $\{X'_i\}$, согласованных с фильтрацией (1). Тогда

$$\lim_{t\to 0} t^i_{m_0} h^{-1}_t X_i = \widehat{X}_i, \quad \lim_{t\to 0} t^i_{m_0} (h')^{-1}_t X'_i = \widehat{X}'_i,$$

где h_t, h'_t — соответствующие группы растяжений, которые определяются посредством $\{X_i\}$, $\{X'_i\}$ соответственно. Заметим, что для полученных наборов векторных полей $\{\widehat{X}_i\}$, $\{\widehat{X}'_i\}$ может и не существовать ни одной фильтрации, с которой они были бы одновременно согласованы (в отличие от исходных базисов). При этом прямые вычисления показывают, что алгебры Ли, натянутые на $\{\widehat{X}_i\}$, $\{\widehat{X}'_i\}$, нильпотентные, градуированные, у них совпадают размерности соответствующих подпространств в фильтрации, но структурные константы этих алгебр Ли *различны*, хотя определенная взаимосвязь между ними наследуется от исходных базисов $\{X_i\}$, $\{X'_i\}$ (ср. (2.1), (2.2), (2.5), (2.6) и (3.15)). Следовательно, и групповые операции соответствующих им групп Ли также *могут быть различны*, поэтому и касательные конусы, определенные по различным базисам векторных полей, согласованным с фильтрацией (1), и имеющие общую выделенную точку, могут быть и не изоморфны. Однако эта проблема в [17] не обсуждается. В § 4 нашей работы мы доказываем, что нильпотентные касательные конусы, определенные по различным базисам векторных полей, согласованным с фильтрацией (1), имеющие общую отмеченную точку, *локально изоморфны* как группы Ли. Напомним [23], что две группы Ли $\mathscr{G}$ и $\mathscr{H}$ локально изоморфны, если существуют такие окрестности единиц $U \subset \mathscr{G}$ и $V \subset \mathscr{H}$ и такой *диффеоморфизм* $\varphi : U \to V$, что для любых элементов $a, b \in U$, удовлетворяющих соотношению $ab \in U$, элемент $\varphi(a)\varphi(b)$ принадлежит V и имеет место равенство $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$. Алгебры Ли локально изоморфных групп Ли изоморфны, изоморфизм осуществляется отображением $(d\varphi)_e$. В § 4 мы строим такой диффеоморфизм (см. следствие 4.1). Также в § 4 мы формулируем простые достаточные условия, которым должны подчиняться базисы векторных полей, согласованные с фильтрацией (1), чтобы квазиметрики соответствующих им нильпотентных касательных конусов, имеющих общую отмеченную точку, были эквивалентны.

Автор благодарен профессору С. К. Водопьянову за интерес к работе и рецензенту за полезные критические замечания.

§ 1. Формула Кэмпбелла — Хаусдорфа

Пусть X — гладкое векторное поле в некоторой ограниченной области U пространства $\mathbb{R}^N$. Действие X на гладкую в U функцию f в точке $g \in U$

определяется по формуле

$$Xf(g) = \frac{df(\exp tX(g))}{dt}\bigg|_{t=0}.$$

Следовательно,

$$Xf(\exp tX(g)) = \frac{df(\exp sX \circ \exp tX(g))}{ds}\bigg|_{s=0} = \frac{df(\exp tX(g))}{dt}$$

при всех $t \in \mathbb{R}$, для которых $\exp tX(g) \in U$. По индукции

$$\begin{aligned} X^n f(\exp tX(g)) &= X(X(\dots(Xf(\exp tX(g)))\dots)) \\ &= \frac{d^n f(\exp sX \circ \exp tX(g))}{ds^n}\bigg|_{s=0} = \frac{d^n f(\exp tX(g))}{dt^n}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Применяя формулу (1.1) «дважды» для f в точке g, получаем

$$(X^n Y^m f)(g) = \frac{d^{n+m} f(\exp sY \circ \exp tX(g))}{dt^n ds^m}\bigg|_{s=0,t=0}. \tag{1.2}$$

Предположим, что f, X аналитичны в U. Тогда

$$f(\exp sX(g)) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m s^m}{m!}, \quad \text{где } a_m = X^m f(\exp sX(g))|_{s=0}.$$

Поэтому (формальный) ряд Тейлора с «центром» в $(0,0)$ для функции $f(\exp sY \circ \exp tX(g))$ имеет вид

$$f(\exp sY \circ \exp tX(g)) = \sum_{m,n \geq 0} \frac{t^n}{n!}\frac{s^m}{m!}(X^n Y^m f)(g). \tag{1.3}$$

Запишем выражение $\exp tY \circ \exp tX(g)$ как $\exp Z(t)(g)$. Будем искать $Z(t)$ в виде $tZ_1 + t^2 Z_2 + \dots$, где Z_1, $Z_2, \dots$ — некоторые векторные поля, не зависящие от параметра t. По формуле (1.1) выводим

$$\begin{aligned} f(\exp Z(t)(g)) &= f(\exp(tZ_1 + t^2 Z_2 + \dots)(g)) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((tZ_1 + t^2 Z_2 + \dots)^n f)(g)}{n!}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Сравним правые части выражений (1.3) и (1.4) при $s = t$, рассматривая в качестве f координатные функции пространства $\mathbb{R}^N$. Мы получаем соотношения $X + Y = Z_1$, $\frac{1}{2}Z_1^2 + Z_2 = \frac{1}{2}X^2 + XY + \frac{1}{2}Y^2$, откуда вытекает, что $Z_2 = \frac{1}{2}[X,Y]$ и т. д (см. [24]). С ростом n вычисления для Z_n стремительно усложняются. Явная формула для вычисления Z_n получена Е. Б. Дынкиным [25] (см. также [26, лекции 4, 6]):

$$\begin{aligned} Z_n = Z_n(Y,X) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{p,q} \frac{[X^{p_1}Y^{q_1}\dots X^{p_k}Y^{q_k}]}{p_1!q_1!\dots p_k!q_k!} \\ &= \sum_{p,q} C_{p,q} (\operatorname{ad} Y)^{q_k} (\operatorname{ad} X)^{p_k} \dots (\operatorname{ad} Y)^{q_1} (\operatorname{ad} X)^{p_1 - 1} X, \quad C_{p,q} = \mathrm{const}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где $(\operatorname{ad} A)B = [A,B]$, $(\operatorname{ad} A)^0 B = B$, $p = (p_1,\dots,p_k)$, $q = (q_1,\dots,q_k)$, суммирование распространено на все целые неотрицательные показатели $p_1, q_1, \dots, p_k, q_k$, для которых $p_i + q_i > 0$, $p_1 + q_1 + \dots + p_k + q_k = n$. Заметим, что в сумме (1.5) приняты следующие соглашения:

$$\dots(\operatorname{ad} Y)^{q_1}(\operatorname{ad} X)^{p_1-1}X = \dots(\operatorname{ad} Y)^{q_1-1}Y, \quad p_1 = 0,$$
$$\dots(\operatorname{ad} Y)^{q_1}(\operatorname{ad} X)^{p_1-1}X = 0, \quad p_1 > 1.$$

В дальнейшем для краткости константы, зависящие только от $C_{p,q}$ и биномиальных коэффициентов, будем обозначать символом $\widetilde{C}$ (имея в виду, что они могут быть различными для каждого слагаемого). Таким образом, используя (1.3)–(1.5), можно записать следующий «формальный» ряд Тейлора (см., например, [26]), называемый формулой Кэмпбелла — Хаусдорфа в форме Дынкина:

$$\exp Y \circ \exp X(g) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} Z_n\right)(g) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{p,q}\frac{(-1)^{k-1}\cdot(p_1!q_1!\dots p_k!q_k!)^{-1}}{k\cdot(p_1+q_1+\dots+p_k+q_k)} \times [X^{p_1}Y^{q_1}\dots X^{p_k}Y^{q_k}]\right)(g). \quad (1.6)$$

§ 2. Равномерно регулярные пространства Карно — Каратеодори

2.1. Некоторые определения и обозначения. Пусть $U \subset \mathbb{R}^N$ — некоторая ограниченная область, снабженная римановой метрикой $\mathfrak{g}$. Рассмотрим *горизонтальное* подрасслоение $H_1 \subset TU$, и пусть значения C^M-гладких векторных полей $X_1, \dots, X_{\dim H_1}$ в каждой точке $g \in U$ образуют базис подпространства $H_1(g) \subset T_gU$. Обозначим через $H_i(g)$ подпространство касательного пространства, порожденное значениями всевозможных коммутаторов векторных полей $X_1, \dots, X_{\dim H_1}$ до порядка $i-1$ включительно; при этом считаем, что коммутаторы нулевого порядка векторных полей суть сами эти векторные поля. Полагаем, что векторные поля $X_1, \dots, X_{\dim H_1}$ удовлетворяют на U *условию Хёрмандера* [27], т. е. существует натуральное число n_0 такое, что для каждой точки $g \in U$ найдется $n \le n_0$, для которого $T_gU = H_n(g)$. *Условие равномерной регулярности* (*эквирегулярности*) [3] подрасслоения H_1 состоит в том, что $\dim H_i(g)$ не зависит от выбора точки $g \in U$. Таким образом, H_i — подрасслоение в TU, и $\dim H_i = h_i$ — размерность подрасслоений H_i для $i = 1, \dots, N$. Также полагаем $\dim H_0 = h_0 = 0$. Пусть $C_U = \min\{n \in \mathbb{N} \mid T_gU = H_n(g)\}$. Далее $M \ge 2C_U$ — фиксированное натуральное число.

По индукции определим векторные поля X_i, $i = 1, \dots, N$, значения которых образуют базис T_gU в каждой точке $g \in U$, следующим образом: на первом шаге к векторным полям $X_1, \dots, X_{h_1}$, значения которых в точке g образуют базис $H_1(g)$, добавляем векторные поля $X_{h_1+1}, \dots, X_{h_2}$ так, чтобы векторы $X_1(g), \dots, X_{h_2}(g)$ образовывали базис $H_2(g)$; на $(k-1)$-м шаге к полям $X_1, \dots, X_{h_{k-1}}$ добавляем векторные поля $X_{h_{k-1}+1}, \dots, X_{h_k}$ так, чтобы векторы $X_1(g), \dots, X_{h_k}(g)$ образовывали базис $H_k(g)$. В силу локальности наших рассмотрений за $C_U - 1$ шагов получим искомый набор векторных полей X_i, $i = 1, \dots, N$; при этом $X_i \in C^{M+1-\deg X_i}$. (*Формальной*) *степенью* поля X_i называется число $\deg X_i = \min\{j \mid X_i \in H_j\} = \mathbf{i}$. Пусть $Y = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i X_i$, где $a_i \ne 0$ — некоторые непрерывные в U функции. Тогда $\deg Y = \max\limits_i\{\deg X_i \mid i = 1, \dots, k\}$.

Обозначим $h_{\mathbf{j}} = \dim H_{\mathbf{j}}$, $h_{\mathbf{i}\pm j} = \dim H_{\deg X_i \pm j}$, $h_{\mathbf{i}\pm\mathbf{j}} = \dim H_{\deg X_i \pm \deg X_j}$. Заметим, что $h_{\mathbf{i}} + h_{\mathbf{j}} \ne h_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}$. Из определения векторных полей X_i вытекает следующая таблица коммутаторов:

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{h_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}} C_{(ijk)} X_k, \tag{2.1}$$

где $C_{(ijk)} = C_{(ijk)}(g)$ — C^{M-C_U}-гладкие на U функции.

Пусть значения векторных полей X_j^B, $j = 1, \dots, h_i$, образуют базис $H_i(g)$ в каждой точке $g \in U$. Тогда

$$X_j^B = \sum_{k=1}^{h_{\mathbf{j}}} b_{k,j} X_k, \ j = 1, \dots, N, \quad \deg X_j^B = \deg X_j, \tag{2.2}$$

где $b_{k,j}$ — некоторые непрерывные в U функции. Пусть T_B, T — матрицы, составленные из вектор-столбцов X_i^B, X_i, $i = 1, \dots, N$, соответственно. Тогда $T_B = TB$, где

$$B = B(g) = \big(b_{k,j}\big) = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & \dots & B_{1,C_U} \\ 0 & B_{2,2} & B_{2,3} & \dots & B_{2,C_U} \\ 0 & 0 & B_{3,3} & \dots & B_{3,C_U} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & B_{C_U,C_U} \end{pmatrix}, \quad g \in U, \tag{2.3}$$

здесь $B_{k+1,l+1} = (b_{i,j})$, $h_k < i \le h_{k+1}$, $h_l < j \le h_{l+1}$ для $k, l = 0, \dots, C_U - 1$.

Лемма 2.1. *Пусть* $X_j^B \in C^{M+1-\mathbf{j}}(U)$. *Тогда* 1) $\det B_{l+1,l+1} \neq 0$, 2) $B \in C^{M+1-C_U}$.

Доказательство. 1. Напомним, что для каждого $j = 1, \dots, C_U$ в любой точке $g \in U$ векторы $X_1^B(g), \dots, X_{h_j}^B(g)$ линейно независимы так же, как и векторы $X_1(g), \dots, X_{h_j}(g)$. В силу (2.2) таблица B — матрица перехода от базиса $X_1^B(g), \dots, X_N^B(g)$ к базису $X_1(g), \dots, X_N(g)$, поэтому $\det B \neq 0$. Тогда п. 1 леммы 2.1 следует из (2.3).

2. Применяя правило Лейбница к тождеству $T_B = TB$, получаем $\dot{T}_B = \dot{T}B + T\dot{B}$, $\ddot{T}_B = \ddot{T}B + 2\dot{T}\dot{B} + T\ddot{B}$ и т. д., откуда $\dot{B} = T^{-1}(\dot{T}_B - \dot{T}B)$, $\ddot{B} = T^{-1}(\ddot{T}_B - \ddot{T}B - 2\dot{T}\dot{B})$ и т. д.

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие векторные поля X_i^B, для которых $B \in C^{M+1-C_U}$. Пусть $a_{i,j}$ — элементы матрицы $A = B^{-1}$. Из правила нахождения обратной матрицы получаем, что

$$B^{-1} = A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \dots & A_{1,C_U} \\ 0 & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & A_{2,C_U} \\ 0 & 0 & A_{3,3} & \dots & A_{3,C_U} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & A_{C_U,C_U} \end{pmatrix}, \tag{2.4}$$

где $A_{k+1,l+1} = (a_{i,j})$, $h_k < i \le h_{k+1}$ для $h_l < j \le h_{l+1}$, $k, l = 0, \dots, C_U - 1$. Таким образом, $T = T_B A$. Поэтому мы можем записать

$$X_j = \sum_{k=1}^{h_{\mathbf{j}}} a_{k,j} X_k^B, \quad j = 1, \dots, N. \tag{2.5}$$

Обозначим через $E_{i,i}$ единичную матрицу размером $i \times i$. При этом в дальнейшем будем обозначать $E_{N,N} = E$. Расписывая поэлементно тождество $BA = E$, несложно заметить, что $A_{i,i}B_{i,i} = E_{i,i}$.

Используя (2.1)–(2.5) и лемму 2.1, для каждой точки $g \in U$ получаем

$$\begin{aligned}\big[X_i^B, X_j^B\big] &= \left[\sum_{l=1}^{h_\mathbf{i}} b_{l,i}X_l, \sum_{k=1}^{h_\mathbf{j}} b_{k,j}X_k\right] = \sum_{l=1}^{h_\mathbf{i}} b_{l,i} \sum_{k=1}^{h_\mathbf{j}} b_{k,j} \sum_{t=1}^{h_{\mathbf{l}+\mathbf{k}}} C_{(lkt)}X_t \\ &- \sum_{l=1}^{h_\mathbf{i}} X_l \cdot \sum_{k=1}^{h_\mathbf{j}} b_{k,j}(X_k b_{l,i}) + \sum_{k=1}^{h_\mathbf{j}} X_k \cdot \sum_{l=1}^{h_\mathbf{i}} (X_l b_{k,i}) b_{l,j} = \sum_{m=1}^{h_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}} C^B_{(ijm)} X_m \\ &= \sum_{m=1}^{h_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}} C^B_{(ijm)} \sum_{l=1}^{h_\mathbf{m}} a_{l,m} X_l^B = \sum_{s=1}^{h_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}} X_s^B \sum_{k=1}^{h_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}} a_{s,k} C^B_{(ijk)} = \sum_{s=1}^{h_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}} C^A_{(ijs)} X_s^B, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где $C^B_{(ijm)} = -C^B_{(jim)}$, $C^A_{(ijs)} = -C^A_{(jis)}$ — $C^{M-C_U}(U)$-гладкие функции.

В дальнейшем символом $B_e^n(a,r)$ обозначается открытый евклидов шар с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$ радиусом r, $\|x\| = \max\{|x_i| \mid i = 1, \dots, n\}$ для $x = (x_1, \dots, x_n)$.

2.2. Координаты 1-го рода, формула Тейлора и векторные поля. Из теорем о гладкой зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров вытекает (см., например, [24, 28]), что отображение

$$\theta_g^B : (x_1, \dots, x_N) \mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i X_i^B\right)(g), \quad \theta_g(0) = \theta_g(0, \dots, 0) = g,$$

является C^{M+1-C_U}-гладким диффеоморфизмом некоторого шара $B_e^N\big(0, \epsilon_g^B\big)$ в некоторую окрестность $O_g^B \subset U$ точки g.

Определение 2.1. Набор чисел $(x_1, \dots, x_N) = \big(\theta_g^B\big)^{-1} u \in B_e^N\big(0, \epsilon_g^B\big)$ называется *координатами 1-го рода* точки $u = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^N x_i X_i^B\right)(g)$. Действие *неоднородной группы растяжений* в координатах $\big(\theta_g^B\big)^{-1}$ определяется как

$$\delta_\varepsilon : x = (x_1, \dots, x_N) \mapsto (\varepsilon^{\deg X_1} x_1, \dots, \varepsilon^{\deg X_N} x_N) = \delta_\varepsilon x, \quad \varepsilon > 0.$$

Введем обозначение $\Delta_\varepsilon^B = \theta_g^B \circ \delta_\varepsilon \circ \big(\theta_g^B\big)^{-1}$.

В дальнейшем в случае, когда $B = E$, при записи тех или иных выражений, связанных с отображением θ_g^E, мы будем опускать символ E. В частности, будем обозначать отображение θ_g^E просто через θ_g.

Обозначения 2.1. Для каждого N-мерного вектора α введем обозначения

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) = (\alpha_{(1)}, \dots, \alpha_{(C_U)}),$$

где $\alpha_{(i)}$ — вектор, совпадающий с вектором $(\alpha_{h_{i-1}+1}, \dots, \alpha_{h_i})$. Запись $\alpha = 0$ означает, что все компоненты вектора α равны нулю. Символ $\alpha^{(i)}$ обозначает вектор из $\mathbb{R}^N$, получающийся из α заменой всех $\alpha_{(j)}$, $j \neq i$, соответствующими (по размерности) векторами 0, символ e_i — N-мерный вектор $(0, \dots, 0, \underset{i}{1}, 0, \dots, 0)$, e — N-мерный вектор $(1, \dots, 1)$. Также для каждого N-мерного мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ полагаем $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^N \alpha_i$, $|\alpha|_h = \sum\limits_{i=1}^N \alpha_i \deg X_i$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\alpha_N}$ для $x = (x_1, \dots, x_N)$.

Отметим, что $\big(\theta_g^B\big)_*^{-1} X_i^B(g) = e_i$.

Определение 2.2. Пусть $P(x) = \sum\limits_{i=1}^{l} A_i x^{\alpha_i}$, $\alpha_i > 0$, — некоторый полином, записанный в координатах $\left(\theta_g^B\right)^{-1}$. Тогда полагаем $\widehat{\deg} P(x) = \min\limits_i \{|\alpha_i|_h\}$. Символом $P_h(x)$ будем обозначать полином такой, что $\widehat{\deg} P_h = \widehat{\deg} P$, $\widehat{\deg}(P - P_h) > \widehat{\deg} P$.

Из определения 2.2 вытекает, что $P_h(\delta_\varepsilon x) = \varepsilon^{\widehat{\deg} P_h} P_h(x)$.

Определение 2.3. Символом O^B обозначается далее некоторая область, содержащаяся в U, такая, что для каждой точки $g \in O^B$ выполняется

$$O^B \subset \theta_g^B\left(B_e^N(0, \epsilon^B)\right) \subset U, \quad \text{где } \epsilon^B = \inf\left\{\epsilon_g^B \mid g \in O^B\right\}.$$

Введем обозначения

$$\begin{gathered} X_x^B = \sum_{i=1}^N x_i X_i^B = \sum_{i=1}^N x_i \left(\sum_{j=1}^{h_{\mathbf{i}}} b_{j,i} X_j\right) = \sum_{i=1}^N P_i^x X_i, \\ X_x = X_x^E = \sum_{i=1}^N x_i X_i, \quad tx = (tx_1, \ldots, tx_N). \end{gathered} \tag{2.7}$$

Лемма 2.2. (1) *Рассмотрим векторные поля $Z_{n+1} = Z_{n+1}\left(X_y^B, X_x^B\right)$, $n \in \mathbb{N}$, из (1.5). Тогда существуют C^{M+1-C_U-n}-гладкие функции $F_{\alpha,\beta}^{j,B} = F_{\alpha,\beta}^{j,B}(g)$, $g \in U$, такие, что*

$$\begin{aligned} Z_{n+1}\left(X_y^B, X_x^B\right) = \sum_{j=1}^N q_j^{n+1}(x,y) X_j, \quad q_j^{n+1} &= \sum_{\substack{\alpha,\beta>0, |\alpha+\beta|=n+1, \\ |\alpha+\beta|_h \geq \mathbf{j}}} F_{\alpha,\beta}^{j,B} x^\alpha \cdot y^\beta \\ &= \sum_{\substack{k,m=1, \\ k>m}}^N \sum_{\substack{|\gamma+\delta|=n-1, \\ |\gamma+e_k+\delta+e_m|_h \geq \mathbf{j}}} G_{\gamma,\delta,k,m}^{j,B} x^\gamma \cdot y^\delta (x_k y_m - x_m y_k). \end{aligned} \tag{2.8}$$

(2) *Если для мультииндексов α, β из (2.8) выполняется $|\alpha+\beta|_h = \mathbf{j}$, то*

$$\begin{aligned} F_{\alpha,\beta}^{j,B} = \sum_{\substack{k,l=1, \\ \mathbf{l}+\mathbf{k}=\mathbf{j}}}^{h_{\mathbf{j-1}}} \widetilde{C} \sum_{\substack{\alpha_1>0, \alpha_1+e_m=\alpha, \\ |\alpha_1+\beta|_h=\mathbf{l}, |e_m|_h=\mathbf{k}}} C_{(klj)} F_{\alpha_1,\beta}^{l,B} b_{m,k} \\ + \sum_{\substack{k,l=1, \\ \mathbf{l}+\mathbf{k}=\mathbf{j}}}^{h_{\mathbf{j-1}}} \widetilde{C} \sum_{\substack{\beta_1>0, \beta_1+e_k=\beta, \\ |\alpha+\beta_1|_h=\mathbf{l}, |e_m|_h=\mathbf{k}}} C_{(klj)} F_{\alpha,\beta_1}^{l,B} b_{m,k}. \end{aligned}$$

Если для некоторых $k, m \in \mathbb{N}$, $N \geq k > m \geq 1$, мультииндексы γ, δ из (2.8) удовлетворяют условию $|\gamma + e_k + \delta + e_m|_h = \mathbf{j}$, то

$$\begin{aligned} G_{\gamma,\delta,k,m}^{j,B} = \sum_{\substack{l,p=1, \\ \mathbf{l}+\mathbf{p}=\mathbf{j}}}^{h_{\mathbf{j-3}}} \widetilde{C} \sum_{\substack{\gamma_1 \geq 0, \gamma_1+e_i=\gamma, |e_i|_h=\mathbf{l}, \\ |\gamma_1+\delta+e_k+e_m|_h=\mathbf{p}}} C_{(lpj)} G_{\gamma_1,\delta,k,m}^{p,B} b_{i,l} \\ + \sum_{\substack{l,p=1, \\ \mathbf{l}+\mathbf{p}=\mathbf{j}}}^{h_{\mathbf{j-3}}} \widetilde{C} \sum_{\substack{\delta_1 \geq 0, \delta_1+e_i=\delta, |e_i|_h=\mathbf{l}, \\ |\delta_1+\gamma+e_k+e_m|_h=\mathbf{p}}} C_{(lpj)} G_{\gamma,\delta_1,k,m}^{p,B} b_{i,l}. \end{aligned}$$

(3) *Для каждого* $j=1,\dots,N$ *выполняется* $F^{j,B}_{e_i,e_k}=-F^{j,B}_{e_k,e_i}$.

Доказательство. (1) Имеем $Z_2\big(X^B_y,X^B_x\big)=\widetilde{C}\big[X^B_y,X^B_x\big]$. Используя (2.1), (2.2), для коммутатора первого порядка получаем

$$\big[X^B_y,X^B_x\big]=\sum_{k,l=1}^{N}\big[y_kX^B_k,x_lX^B_l\big]=\sum_{\substack{k,l=1,\\ \mathbf{j}\le\mathbf{k}+\mathbf{l}}}^{N}\sum_{j=1}^{h_{\mathbf{k}+\mathbf{1}}}C^B_{(klj)}y_kx_lX_j$$

$$=\sum_{\substack{k>l,\\ \mathbf{j}\le\mathbf{k}+\mathbf{l}}}\sum_{j=1}^{h_{\mathbf{k}+\mathbf{1}}}C^B_{(klj)}(y_kx_l-x_ky_l)X_j. \qquad (2.9)$$

Утверждение леммы 2.2 для Z_2 следует из (2.9), при этом $F^{j,B}_{e_l,e_k}=\widetilde{C}C^B_{(klj)}=G^{j,B}_{0,0,e_l,e_k}=-F^{j,B}_{e_k,e_l}$, $j=1,\dots,N$.

Предположим, что каждый коммутатор векторных полей X^B_x, X^B_y порядка $k\le n$, где n — фиксированное натуральное число, равен $\sum\limits_{j=1}^{N}H_jX_j$, где

$$H_j=\sum_{\substack{\alpha>0,\beta>0,|\alpha+\beta|=k+1,\\ |\alpha+\beta|_h\ge\mathbf{j}}}F^{j,B}_{\alpha,\beta}x^\alpha\cdot y^\beta,\quad F^j_{\alpha,\beta}\in C^{M-C_U+1-k}(U).$$

Используя (2.1), (2.2), (2.7), коммутатор порядка $n+1$ полей X^B_x, X^B_y записываем в виде

$$A^{n+1}_x=\left[\sum_{i=1}^{N}P^x_kX_k,\sum_{j=1}^{N}H_jX_j\right]=\sum_{k,j=1}^{N}P^x_kH_j[X_k,X_j]-\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}H_jX_j\right)P^x_k\cdot X_k$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}P^x_kX_k\right)H_j\cdot X_j=\sum_{l=1}^{N}\Big(\sum_{k,j}C_{(kjl)}P^x_kH_j\Big)\cdot X_l-\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}H_jX_j\right)P^x_k\cdot X_k$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}P^x_kX_k\right)H_j\cdot X_j=A^{n+1}_{x,1}+A^{n+1}_{x,2}+A^{n+1}_{x,3}$$

или в виде

$$A^{n+1}_y=\sum_{l=1}^{N}\Big(\sum_{k,j}C_{(kjl)}P^y_kH_j\Big)\cdot X_l-\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}H_jX_j\right)P^y_k\cdot X_k$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{N}P^y_kX_k\right)H_j\cdot X_j=A^{n+1}_{y,1}+A^{n+1}_{y,2}+A^{n+1}_{y,3}$$

(коэффициенты P^y_k определяются аналогично P^x_k). В силу симметрии достаточно рассмотреть только $A^{n+1}_{x,i}$. Из определения полиномов P^x_k следует, что $\widehat{\deg}P^x_k\ge\deg X_k$, а по индукционному предположению $\widehat{\deg}H_j\ge\deg X_j$. Кроме того, из (2.1) вытекает, что $\deg X_l\le\deg X_j+\deg X_k$. Поэтому

$$A^{n+1}_{x,1}=\sum_{l=1}^{N}P^1_lx^\alpha y^\beta X_l,\quad P^1_l\in C^{M-C_U+1-n}(U),\quad |\alpha+\beta|_h\ge\deg X_l. \qquad (2.10)$$

Очевидно, что

$$\deg\Bigl(\sum_{j=1}^{N} H_j X_j\Bigr) P_k^x > \deg X_k, \quad \deg\Bigl(\sum_{k=1}^{N} P_k^x X_k\Bigr) H_j > \deg X_j.$$

Поэтому

$$A_{x,2}^{n+1} + A_{x,3}^{n+1} = \sum_{l=1}^{N} P_l^2 x^\alpha y^\beta X_l, \quad P_l^2 \in C^{M-C_U-n}(U), \quad |\alpha+\beta|_h > \deg X_l. \tag{2.11}$$

Учитывая (1.5), (2.10), (2.11), получаем

$$q_j^{n+1} = \sum_{\substack{\alpha,\beta>0, |\alpha+\beta|=n+1,\\ |\alpha+\beta|_h \geq \mathbf{j}}} F_{\alpha,\beta}^{j,B} x^\alpha \cdot y^\beta. \tag{2.12}$$

Равенство

$$q_j^{n+1} = \sum_{k,m=1}^{N} \sum_{\substack{|\gamma+\delta|=n-1,\\ \gamma,\delta\geq 0, k>m\geq 0}} G_{\gamma,\delta,k,m}^{j,B} x^\gamma \cdot y^\delta (x_k y_m - x_m y_k)$$

доказывается с учетом (1.5), (2.1), (2.2) и (2.7) методом математической индукции так же, как и (2.12).

(2) Из (2.9), (2.10) получаем, что выражения вида $F_{\alpha,\beta}^{j,B} x^\alpha y^\beta$, в которых $|\alpha+\beta|_h = \deg X_j$, и $G_{\gamma,\delta,k,m}^{j,B} x^\gamma y^\delta (x_k y_m - x_m y_k)$, где $|\gamma+e_k+\delta+e_m|_h = \deg X_j$, являются слагаемыми сумм $A_{x,1}^{n+1}$, $A_{y,1}^{n+1}$. Из соображений симметрии рассмотрим сумму $A_{x,1}^{n+1}$. Введем обозначения

$$A_{x,1}^{n+1} = \sum_{l=1}^{N}\Bigl(\sum_{k,j} C_{(kjl)} P_k^x H_j\Bigr) \cdot X_l = \sum_{l=1}^{N} Q_l X_l.$$

Тогда, используя определение 2.2, имеем

$$(Q_l)_h = \sum_{\substack{k,j,\\ \mathbf{k}+\mathbf{j}=\mathbf{l}}} C_{(kjl)} \sum_{\substack{\alpha_1,\beta,e_m,\\ |\alpha_1+\beta|_h=\mathbf{j}, |e_m|_h=\mathbf{k}}} F_{\alpha_1,\beta}^{j,B} x^{\alpha_1} \cdot y^\beta \cdot b_{m,k} x_m,$$

откуда вытекает п. 2 леммы 2.2.

(3) Следует из антикоммутативности скобки Пуассона.

Лемма 2.3. (1) *Существуют C^{M+1-C_U-n}-гладкие в U функции $F_{\alpha,\beta}^{j,A} = F_{\alpha,\beta}^{j,A}(g)$ такие, что*

$$Z_{n+1}(X_y^B, X_x^B) = \sum_{j=1}^{N} q_j^{n+1}(x,y) X_j^B, \quad q_j^{n+1} = \sum_{\substack{\alpha,\beta>0, |\alpha+\beta|=n+1,\\ |\alpha+\beta|_h\geq\mathbf{j}}} F_{\alpha,\beta}^{j,A} x^\alpha \cdot y^\beta$$

$$= \sum_{\substack{k,m=1,\\ k>m}}^{N} \sum_{\substack{|\gamma+\delta|=n-1,\\ |\gamma+e_k+\delta+e_m|_h\geq\mathbf{j}}} G_{\gamma,\delta,k,m}^{j,A} x^\gamma \cdot y^\delta (x_k y_m - x_m y_k).$$

(2) *В случае* $|\alpha+\beta|_h = \mathbf{j}$ *имеет место равенство*

$$F^{j,A}_{\alpha,\beta} = \sum_{\substack{k,l=1,\\ \mathbf{l}+\mathbf{k}=\mathbf{j}}}^{h_{\mathbf{j}-1}} \widetilde{C}C_{(klj)} \sum_{\substack{\alpha_1>0,\alpha_1+e_k=\alpha,\\ |\alpha_1+\beta|_h=\mathbf{l}}} \widehat{F}^{l,A}_{\alpha_1,\beta} + \sum_{\substack{k,l=1,\\ \mathbf{l}+\mathbf{k}=\mathbf{j}}}^{h_{\mathbf{j}-1}} \widetilde{C}C_{(klj)} \sum_{\substack{\beta_1>0,\beta_1+e_k=\beta,\\ |\alpha+\beta_1|_h=\mathbf{l}}} \widehat{F}^{l,A}_{\alpha,\beta_1}.$$

Если для некоторых $k, m \in \mathbb{N}$, $N \geq k > m \geq 1$, *мультииндексы* γ, δ *удовлетворяют условию* $|\gamma+e_k+\delta+e_m|_h = \mathbf{j}$, *то*

$$G^{j,A}_{\gamma,\delta,k,m} = \sum_{\substack{l,p=1,\\ \mathbf{l}+\mathbf{p}=\mathbf{j}}}^{h_{\mathbf{j}-3}} \widetilde{C}C_{(lpj)} \sum_{\substack{\gamma_1\geq 0,\gamma_1+e_l=\gamma,\\ |\gamma_1+\delta+e_k+e_m|_h=\mathbf{p}}} \widehat{G}^{p,A}_{\gamma_1,\delta,k,m} + \sum_{\substack{l,p=1,\\ \mathbf{l}+\mathbf{p}=\mathbf{j}}}^{h_{\mathbf{j}-3}} \widetilde{C}C_{(lpj)} \sum_{\substack{\delta_1\geq 0,\delta_1+e_l=\delta,\\ |\delta_1+\gamma+e_k+e_m|_h=\mathbf{p}}} \widehat{G}^{p,A}_{\gamma,\delta_1,k,m}.$$

3) *Для каждого* $j = 1, \dots, N$ *выполняется* $F^{j,A}_{e_i,e_k} = -F^{j,A}_{e_k,e_i}$.

Доказательство. Лемма 2.3 доказывается так же, как и лемма 2.2, с использованием (2.6).

Обозначения 2.2. В дальнейшем функции $F^{i,B}_{\alpha,\beta}$, $G^{j,B}_{\gamma,\delta,k,m}$, $F^{j,A}_{\alpha,\beta}$, $G^{j,A}_{\gamma,\delta,k,m}$, удовлетворяющие условиям пп. 2 лемм 2.2, 2.3, будем обозначать соответственно через $\widehat{F}^{i,B}_{\alpha,\beta}$, $\widehat{G}^{j,B}_{\gamma,\delta,k,m}$, $\widehat{F}^{j,A}_{\alpha,\beta}$, $\widehat{G}^{j,A}_{\gamma,\delta,k,m}$.

Поскольку отображение θ_g является диффеоморфизмом, существует единственное гладкое векторное поле $\sum\limits_{i=1}^{N} P^B_i X_i$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{N} P^B_i X_i = \exp\bigl(sX^B_y\bigr) \circ \exp\bigl(tX^B_x\bigr)(g) = E(tx, sy), \quad t, s \in [0,1],\ g \in O \cap O^B. \tag{2.13}$$

Замечание 2.1. Отметим, что здесь для каждой матрицы B из (2.3) мы рассматриваем лишь такие $g \in O \cap O^B$ и открытое множество $W \subset B^N_e(0, \epsilon^B)$, $x, y \in W$, для которых формула (2.13) имеет смысл. Например, O', W — области такие, что $g \in O' \subset (O \cap O^B)$, $x \in W$, $\exp\bigl(X^B_x\bigr)(g) \subset (O \cap O^B)$. Понятно, что локально такие области O', W всегда существуют. В дальнейшем при рассмотрении (2.13) или подобных соотношений мы не будем без необходимости детализировать области изменения соответствующих параметров.

Из теорем о гладкой зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров и начальных данных (см., например, [28]) вытекает, что $P^B_i = P^B_i(tx, sy) \in C^{M-C_U+1}\bigl(B^{2N}_e(0, \mathrm{const}\cdot\epsilon)\bigr)$, $i = 1, \dots, N$.

Лемма 2.4. *Для функций* P^B_i *из* (2.13) *справедливы следующие разложения Тейлора:*

$$P^B_i(x,y) = P^x_i + P^y_i + \sum_{\substack{\alpha,\beta>0,\\ 2\leq|\alpha+\beta|\leq M-C_U}} F^{i,B}_{\alpha,\beta}(g) x^\alpha \cdot y^\beta + R^B_i(x,y) = \overline{P}^B_i(x,y) + R^B_i(x,y), \tag{2.14}$$

где функции $F^{i,B}_{\alpha,\beta}(g) \in C^2(O \cap O^B)$ *из* (2.8), P^x_i, P^y_i *из* (2.7), *мультииндексы* α *и* β *удовлетворяют условию*

$$\deg X_i \le |\alpha + \beta|_h, \tag{2.15}$$

а остатки $R^B_i(x,y) \in C^{C_U+1}\big(B^{2N}_e(0, \mathrm{const}\cdot\epsilon)\big)$ — *соотношениям*

$$R^B_i(x,y) = o(\|(x,y)\|^{M-C_U}). \tag{2.16}$$

Доказательство. Так как $\theta_g \in C^{M-C_U+1}$, отображение $E(sx,sy)$ из (2.13) C^{M-C_U+1}-гладко зависит от sx, sy. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Используя (1.3), где в качестве f рассматриваются координатные функции, для вектор-функции $E(sx,sy)$ можно записать следующее разложение Тейлора:

$$E(sx,sy) = \sum_{|\alpha|=1}^{M-C_U} \frac{s^{|\alpha|}}{\alpha_1!\alpha_2!}\big(X^B_x\big)^{\alpha_1}\big(X^B_y\big)^{\alpha_2}(g) + o(\|(sx,sy)\|^{M-C_U}). \tag{2.17}$$

Пусть $E(sx,sy) = \exp(Z(xs,ys))(g)$. Так как $\theta_g \in C^{M-C_U+1}$, для вектор-функции $Z(xs,ys)$ справедливо разложение

$$Z(sx,sy) = \sum_{i=1}^{M-C_U} Z_i s^i + G(sx,sy),$$

где

$$Z_i = \frac{1}{i!}\frac{d^i Z(0)}{ds^i} = \sum_{\substack{\alpha,\beta\ge 0,\\ |\alpha+\beta|=i}} \frac{d^{\alpha+\beta}Z(0)}{dx^\alpha dy^\beta}\frac{x^\alpha\cdot y^\beta}{\alpha!\beta!}, \quad G(sx,sy) = o(\|(sx,sy)\|^{M-C_U}).$$

Применяя разложение для $Z(sx,sy)$, можно записать

$$E(sx,sy) = \exp\left(\sum_{i=1}^{M-C_U} Z_i s^i + G(sx,sy)\right)(g) = \exp\left(\sum_{i=1}^{M-C_U} Z_i s^i\right)(g) + o(s^{M-C_U}). \tag{2.18}$$

Пусть $\sum\limits_{i=1}^{M-C_U} Z_i s^i = V$. Используя формулу (1.4), где в качестве f рассматриваются координатные функции, имеем

$$\exp(Vt)(g) = \left(\sum_{j=1}^{M-C_U}\frac{V^j t^j}{j!}\right)(g) + o((ts)^{M-C_U}). \tag{2.19}$$

Заменяя первое слагаемое в (2.18) на (2.19) при $t=1$, получаем

$$E(sx,sy) = \left(\sum_{j=1}^{M-C_U}\left(\sum_{i=1}^{M-C_U} Z_i s^i\right)^j (j!)^{-1}\right)(g) + o(s^{M-C_U}). \tag{2.20}$$

Сравнивая коэффициенты при s^i в соотношениях (2.17) и (2.20), заключаем, что Z_i, $i=1,\dots,M-C_U$, совпадают с вектор-функциями (1.5). Тогда, полагая в (2.17) $s=1$ и учитывая (2.8), приходим к результату леммы 2.4.

Рассмотрим на U некоторые функции $f_i \in C^{M-C_U+1}(U)$, $i=1,\dots,N$. Обозначим $f = (f_1,\dots,f_N)$. Используя (2.1), получаем

$$\big[X^{f_i}_i, X_j\big](g) = \sum_{k=1}^{h_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}} C_{(ijk)} f_i X_k(g) - (X_j f_i)X_i = \sum_{k=1}^{h_{\mathbf{i}+\mathbf{j}}} C^{f_i}_{(ijk)} X_k, \tag{2.21}$$

где $C^{f_i}_{(ijk)}(g)$ — C^{M-C_U}-гладкие функции, тождественно равные 0 в случае $\deg X_k > \deg X_i + \deg X_j$. Из теорем о существовании и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений [28] вытекает существование числа $\epsilon^f > 0$ и области O^f таких, что для любого вектора $y = (y_1, \dots, y_N)$, $\|y\| < \epsilon^f$, и любых чисел $s, t \in [0,1]$ найдется единственное векторное поле $\sum\limits_{i=1}^{N} P_i^f X_i$ такое, что

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{N} P_i^f(tx, sy) X_i\right)(g) = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} s y_i X_i^{f_i}\right) \circ \exp(tX_x)(g), \quad g \in O \cap O^f. \tag{2.22}$$

При этом $P_i^f = P_i^f(tx, sy) \in C^{M-C_U+1}\big(B_e^{2N}(0, \epsilon^f)\big)$, $i = 1, \dots, N$. Используя те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 2.4, и (2.21), получаем следующее утверждение.

Лемма 2.5. *Для функций P_i^f, $i = 1, \dots, N$, входящих в (2.22), справедливы следующие разложения Тейлора:*

$$P_i^f(x, y) = x_i + f_i(g) y_i$$
$$+ \sum_{\substack{2 \le |\alpha+\beta| \le M-C_U, \\ \alpha > 0, \beta > 0}} F^{i,f}_{\alpha,\beta}(g) x^\alpha \cdot y^\beta + R_i^f(x, y) = \overline{P}_i^f(x, y) + R_i^f(x, y), \quad \deg X_i \le |\alpha+\beta|_h,$$

где

$$F^{i,f}_{\alpha,\beta}(g) \in C^2(O \cap O^f),\ R_i^f(x, y) = o(\|(x, y)\|^{M-C_U}) \in C^{M-C_U+1}\big(B_e^{2N}(0, \mathrm{const} \cdot \epsilon)\big).$$

При этом $F^{i,f}_{\alpha,e_l}(g) = f_l(g) \widehat{F}^i_{\alpha,e_l}(g)$ в случае $\deg X_i = |\alpha + e_l|_h$.

Замечание 2.2. Отметим, что $\overline{P}_i^e = \overline{P}_i$, где $\overline{P}_i$ из (2.14).

Лемма 2.6. *Координаты векторного поля*

$$\widetilde{X}_i^{f_i} = \big(\theta_g^{-1}\big)_* X_i^{f_i} = \sum_{j=1}^{N} z_i^{j,f_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

в стандартном базисе $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N}$ в точке $x = (x_1, \dots, x_N)$ совпадают с i-м столбцом матрицы

$$\frac{\partial\big(P_1^f, \dots, P_N^f\big)}{\partial(y_1, \dots, y_N)}(x, y)\bigg|_{(y_1, \dots, y_N) = (0, \dots, 0)}.$$

Доказательство. Используя лемму 2.5 и (2.7), имеем

$$\gamma(s) = \exp\big(sX_i^{f_i}\big) \circ \big(\exp X_x\big)(g) = \exp\left(\sum_{k=1}^{N} P_k^f(x, se_i) X_k\right)(g).$$

Таким образом, $\theta_g^{-1}\gamma(s) = \big(P_1^f(x, se_i), \dots, P_N^f(x, se_i)\big)$, где $P_i^f(x, se_i)$ — гладкие функции. Следовательно, вектор $\dot\gamma(s)|_{s=0} = (\theta_g^{-1})_* X_i^{f_i}$ имеет координаты

$$\left(\frac{dP_1^f(x, se_i)}{ds}\bigg|_{s=0}, \dots, \frac{dP_N^f(x, se_i)}{ds}\bigg|_{s=0}\right).$$

Отсюда вытекает лемма 2.6.

Лемма 2.7. *Для коэффициентов* z_i^{j,f_i} *из леммы 2.6 справедливы следующие разложения Тейлора:*

$$z_i^{j,f_i} = \delta_{ji} f_i(g) + \sum_{\substack{2\le|\alpha+e_i|\le M-C_U,\\ \deg X_j\le|\alpha+e_i|_h}} F^{j,f}_{\alpha,e_i}(g)x^\alpha + \rho_i^{j,f}(x),$$

где

$$\rho_i^{j,f}(x) = \frac{\partial R_j^f(x,y)}{\partial y_i}\bigg|_{y=0} = o(\|x\|^{M-C_U-1}).$$

При этом $F^{j,f}_{\alpha,e_i}(g) = f_i(g)\widehat{F}^j_{\alpha,e_i}(g)$ *в случае* $\deg X_i = |\alpha+e_i|_h$.

Доказательство. Лемма 2.7 вытекает из лемм 2.5, 2.6.

Из леммы 2.7 получаем, в частности, что $\widetilde{X}_i^{f_i}(0) = f_i(g)e_i$.

Следствие 2.1. *Координаты векторного поля*

$$\widetilde{X}_i = (\theta_g^{-1})_* X_i = \sum_{j=1}^N z_i^j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

в стандартном базисе $\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_N}$ *в точке* $x=(x_1,\dots,x_N)$ *совпадают с* i*-м столбцом матрицы*

$$\frac{\partial(P_1,\dots,P_N)}{\partial(y_1,\dots,y_N)}(x,y)\bigg|_{(y_1,\dots,y_N)=(0,\dots,0)},$$

где P_i *из леммы 2.4* ($B=E$). *Для коэффициентов* z_i^j *справедливы следующие разложения Тейлора:*

$$z_i^j = \delta_{ji} + \sum_{\substack{2\le|\alpha+e_i|\le M-C_U,\\ \deg X_j\le|\alpha+e_i|_h}} F^{j}_{\alpha,e_i}(g)x^\alpha + \rho_i^{j}(x),$$

где

$$\rho_i^{j}(x) = \frac{\partial R_j(x,y)}{\partial y_i}\bigg|_{y=0} = o(\|x\|^{M-C_U-1}).$$

При этом $F^{j}_{\alpha,e_i}(g) = \widehat{F}^j_{\alpha,e_i}(g)$ *в случае* $\deg X_i = |\alpha+e_i|_h$.

Доказательство. Следствие вытекает из замечания 2.2 и лемм 2.4–2.7.

Поскольку отображение θ_g^B является диффеоморфизмом, существует единственное гладкое векторное поле $\sum\limits_{i=1}^N P_i^A X_i^B$ такое, что

$$\exp\left(\sum_{i=1}^N P_i^A X_i^B\right)(g) = \exp\bigl(sX_y^B\bigr)\circ\exp\bigl(tX_x^B\bigr)(g), \quad t,s\in[0,1], \quad g\in O^B.$$

Используя теоремы о гладкой зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров и начальных данных [28], получаем, что $P_i^A = P_i^A(tx,sy)\in C^{M-C_U+1}\bigl(B_e^{2N}(0,\mathrm{const}\cdot\epsilon^B)\bigr)$, $i=1,\dots,N$.

Лемма 2.8. *Для функций P_i^A справедливы следующие разложения Тейлора:*

$$P_i^A(x,y) = x_i + y_i + \sum_{\substack{\alpha,\beta>0,\\ 2\le|\alpha+\beta|\le M-C_U}} F^{i,A}_{\alpha,\beta}(g)x^\alpha\cdot y^\beta + R_i^A(x,y)$$

$$= \overline{P}_i^A(x,y) + R_i^A(x,y), \quad \deg X_i \le |\alpha+\beta|_h,$$

где $F^{i,A}_{\alpha,\beta}(g)\in C^2(O^B)$, $R_i^A(x,y) = o(\|(x,y)\|^{M-C_U}) \in C^{C_U+1}(B_e^{2N}(0,\epsilon^B))$. Координаты векторного поля

$$\widetilde{X}_i^A = \left(\theta_g^B\right)_*^{-1} X_i^B = \sum_{j=1}^N z_i^{j,A}\frac{\partial}{\partial x_j}$$

в стандартном базисе $\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_N}$ в точке $x=(x_1,\dots,x_N)$ совпадают с i-м столбцом матрицы

$$\frac{\partial\left(P_1^A,\dots,P_N^A\right)}{\partial(y_1,\dots,y_N)}(x,y)\bigg|_{(y_1,\dots,y_N)=(0,\dots,0)},$$

и для коэффициентов $z^j_{i,A}$ справедливы следующие разложения Тейлора:

$$z_i^{j,A} = \delta_{ji} + \sum_{\substack{2\le|\alpha+e_i|\le M-C_U,\\ \mathbf{j}\le|\alpha+e_i|_h}} F^{j,A}_{\alpha,e_i}(g)x^\alpha + \rho_i^{j,A}(x),$$

где

$$\rho_i^{j,A}(x) = \frac{\partial R_j^A(x,y)}{\partial y_i}\bigg|_{y=0} = o(\|x\|^{M-C_U-1}).$$

Доказательство. С учетом таблицы (2.6) и леммы 2.3 лемма 2.8 получается тем же способом, что и леммы 2.4, 2.6.

2.3. Равномерно регулярные пространства Карно — Каратеодори и их квазиметрики.

Определение 2.4. Пусть A — некоторое множество. *Квазиметрикой* в A (см. [29]) называют отображение $d: A\times A\to\mathbb{R}^+\cup 0$, обладающее следующими свойствами:

1) $d(u,v)\ge 0$, $d(u,v)=0$ тогда и только тогда, когда $u=v$;

2) $d(u,v)\le c_1 d(v,u)$ для некоторой константы c_1, не зависящей от выбора $u,v\in A$;

3) $d(u,v)\le c_2(d(u,w)+d(w,v))$ для некоторой константы c_2, не зависящей от выбора $u,v,w\in A$.

Из определения области O^B вытекает, что для любых точек $u,v\in O^B$ найдется единственное векторное поле X_y^B такое, что $u=\exp\left(X_y^B\right)(v)$.

Определение 2.5. *Квазиметрика Карно — Каратеодори* $d^B_{cc}(u,v)$, где $v,u\in O^B$, соответствующая набору векторных полей X_i^B, определяется как

$$d^B_{cc}(u,v) = \max\{|y_i|^{1/\deg X_i} \mid i=1,\dots,N\}.$$

Введем обозначение $\mathrm{Box}^B_{cc}(g,r) = \left\{x\in O^B \mid d^B_{cc}(g,x)<r\right\}$. Из определений 2.1, 2.5 получаем $\Delta^B_\varepsilon: \mathrm{Box}^B_{cc}(g,r_0)\to\mathrm{Box}^B_{cc}(g,\varepsilon r_0)$.

Свойство 2.1. (1) *Функция d^B_{cc} является квазиметрикой на O^B;*
(2) *функция d^B_{cc} непрерывна по каждому аргументу.*

Доказательство. (1) Из соображений «симметрии», см. (2.1), (2.6), достаточно доказать свойство 2.1 для функции d_{cc}. П. 1 определения 2.4 очевиден. Для доказательства п. 2 введем обозначения $v = \exp V(u)$. Тогда $u = \exp(-V)(v)$, поэтому $d_{cc}(u,v) = d_{cc}(v,u)$, откуда вытекает п. 2 определения 2.4.

Проверим п. 3 определения 2.4. Пусть

$$w = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} w_i X_i\right)(u), \quad v = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} v'_i X_i\right)(w).$$

С другой стороны, $v = \exp\left(\sum\limits_{i=1}^{N} v_i X_i\right)(u)$. Используя лемму 2.8 ($B = E$) и условие $M \geq 2C_U$, можно записать

$$v_t = \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h \geq \deg X_t,\\ |\alpha+\beta| \leq C_U}} c_{\alpha,\beta} \cdot (v')^\alpha \cdot w^\beta, \quad t = 1,\dots,N,$$

где функции $c_{\alpha,\beta} = c_{\alpha,\beta}(v', w, \widetilde{C})$ равномерно ограничены в O некоторой константой $D_1 = D_1(\widetilde{C}, N, C_U, \epsilon)$. Докажем методом математической индукции оценку

$$|(v')^\alpha \cdot w^\beta|^{\frac{1}{\deg X_t}} \leq \mathrm{const}\left(\sum_{i=1}^{N} |v'_i|^{\frac{1}{\deg X_i}} + \sum_{i=1}^{N} |w_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\right), \quad t = 1,\dots,N, \tag{2.23}$$

где шаг индукции — степень поля X_t. Если $\deg X_t = 1$, то, очевидно,

$$|(v')^\alpha \cdot w^\beta| \leq \sum_{i=1}^{N} |v'_i|^{\frac{1}{\deg X_i}} + \sum_{i=1}^{N} |w_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}.$$

Пусть для $\deg X_t = n$, где $n \geq 1$, оценка (2.23) доказана. Рассмотрим случай $\deg X_t = n+1$. Достаточно рассмотреть мультииндексы α, β такие, что $\alpha_{(i)} = \beta_{(i)} = 0$ для $i = n+1,\dots,C_U$ и $\alpha_{(n)} + \beta_{(n)} > 0$, см. обозначения 2.1. Тогда, используя индукционное предположение, неравенство Юнга и обозначения 2.1, для $n+1$ имеем

$$\begin{aligned}
|(v')^\alpha \cdot w^\beta|^{\frac{1}{n+1}} &= |(v')^\alpha \cdot w^{\beta - e_m} \cdot w_m|^{\frac{1}{n+1}} \leq \mathrm{const}(|(v')^\alpha \cdot w^{\beta-e_m}| + |w_m|^{\frac{1}{n}}) \\
&\leq \dots \leq \mathrm{const}\left(|(v')^{\alpha-\alpha^{(n)}} \cdot w^{\beta-\beta^{(n)}}|^{\frac{1}{n}} + \sum_{l=h_{n-1}+1}^{h_n} (\alpha_l |v'_l|^{1/n} + \beta_l |w_l|^{1/n})\right) \\
&\leq \mathrm{const}\left(\sum_{i=1}^{h_n} |v'_i|^{\frac{1}{\deg X_i}} + |w_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\right), \quad \deg X_m = n.
\end{aligned}$$

Таким образом, оценка (2.23) доказана. Используя (2.23), получаем

$$\begin{aligned}
|v_t|^{\frac{1}{\deg X_t}} &\leq \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h \geq \deg X_t,\\ |\alpha+\beta| \leq C_U}} (c_{\alpha,\beta} \cdot (v')^\alpha \cdot w^\beta)^{\frac{1}{\deg X_t}} \\
&\leq c_1 \sum_{\substack{|\alpha+\beta|_h \geq \deg X_t,\\ |\alpha+\beta| \leq C_U}} ((v')^\alpha \cdot w^\beta)^{\frac{1}{\deg X_t}} \leq c_2\left(\sum_{i=1}^{N} |v'_i|^{\frac{1}{\deg X_i}} + |w_i|^{\frac{1}{\deg X_i}}\right),
\end{aligned}$$

где $c_1 = c_1(D_1, C_U, N)$, $c_2 = c_2(c_1, C_U, N)$. Отсюда следует, что

$$d_{cc}(u,v) = \max_j\{|v_j|^{\frac{1}{\deg X_j}}\} \leq Q(\max_k\{|v'_k|^{\frac{1}{\deg X_k}}\} + \max_l\{|w_l|^{\frac{1}{\deg X_l}}\})$$
$$= Q(d_{cc}(u,w) + d_{cc}(w,v)), \quad Q = Q(C_U, \epsilon, N) = \mathrm{const}.$$

(2) П. 2 свойства 2.1 вытекает из определения 2.5 и теорем о существовании, единственности и непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров [28].

Предложение 2.1. *Найдутся положительная функция $\tau = \tau(r) = 1 + o(r^{M-2C_U})$ и константы $C > 0$, $r_0 > 0$, зависящие от ϵ^B, C_U, N, такие, что для любой точки $g \in O^B$ верно*

$$\mathscr{A}^B = \bigcup_{x\in \mathrm{Box}^B_{cc}(g,r)} \mathrm{Box}^B_{cc}(x,\varepsilon) \subseteq \mathrm{Box}^B_{cc}(g, \tau r + C\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon,\ r \leq r_0.$$

Доказательство. Из соображений «симметрии», см. (2.1), (2.6), достаточно доказать предложение 2.1 для расстояния d_{cc}. Для каждой точки $x \in \mathscr{A}$ имеем

$$x = \exp\left(\sum_{i=1}^N \xi^{\deg X_i}\beta_i X_i\right) \circ \exp\left(\sum_{i=1}^N \varrho^{\deg X_i}\alpha_i X_i\right)(g), \quad \varrho < r,\ \xi < \varepsilon,$$

где $\|\alpha\| = \|\beta\| = 1$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$. Используя леммы 2.4, 2.5, получаем

$$x = \exp\left(\sum_{k=1}^N \left(\varrho^{\mathbf{k}}(\alpha_k + \omega_k) + \sum_{i=0}^{\mathbf{k}-1} a_{i,k}\varrho^i\xi^{\mathbf{k}-i}\right) X_k\right)(g) = \exp\left(\sum_{k=1}^N p_k X_k\right)(g),$$

где $\omega_k = o(\varrho^{M-2C_U})$ и коэффициенты $a_{i,k}$, $k = 1, \dots, N$, зависящие от α, β, $\widetilde{C}$, ε, r, равномерно относительно g ограничены. С другой стороны, каждая точка $y_\gamma \in \mathrm{Box}_{cc}(g, cr + C\varepsilon)$, c, $C > 0$, представляется в виде

$$y_\gamma = \exp\left(\sum_{k=1}^N \gamma_k (c\varrho + C\xi)^{\mathbf{k}} X_k\right)(g) = \exp\left(\sum_{k=1}^N \gamma_k\Big(\sum_{\substack{i+j=\mathbf{k},\\ i,j=0,\dots,\mathbf{k}}} C^j_{\mathbf{k}} c^i \varrho^i C^j \xi^j\Big) X_k\right)(g),$$

где $C^j_{\mathbf{k}}$ — коэффициенты из формулы бинома Ньютона, $\varrho < r$, $\xi < \varepsilon$, $\|\gamma\| = 1$, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$. По формуле Тейлора имеем $|\alpha_k + \omega_k|^{\frac{1}{\mathbf{k}}} \leq |1 + |\omega_k||^{\frac{1}{\mathbf{k}}} \leq 1 + c_k|\omega_k|$ для некоторых констант $c_k > 0$, не зависящих от ϱ и g. Полагаем $c = 1 + \tilde{c}(\varrho)$, где $\tilde{c} = \max\limits_{k=1,\dots,N} c_k \cdot \max\limits_{k=1,\dots,N} |\omega_k|$, и пусть константа C такова, что $|a_{\mathbf{k}-j,k}| < c^{\mathbf{k}-j} C^j C^j_{\mathbf{k}}$ для всех подходящих j,k. Тогда $x \in \mathrm{Box}_{cc}(g, cr + C\varepsilon)$. Действительно, рассмотрим точки $u = \exp\left(\sum\limits_{k=1}^N p_k X_k\right)(g) \in \mathscr{A}$, $d_{cc}(u,g) = |p_k|^{\frac{1}{\mathbf{k}}}$, и y_γ, где $\gamma = e_k$. Используя определения p_k, c и C, имеем $d_{cc}(u,g) < d_{cc}(y_\gamma, g)$, откуда $u \in \mathrm{Box}_{cc}(g, cr + C\varepsilon)$. Предложение 2.1 доказано.

Определение 2.6. *Локальным равномерно регулярным пространством Карно — Каратеодори* называется метрическое пространство $\big(O^B, d^B_{cc}\big)$.

Свойство 2.2. *Пусть* $\widetilde{O} \subset O \cap O^B$ *— некоторая область. Найдутся константы* ε_0, G, *зависящие от* ϵ, ϵ_B, N, C_U, $\|B\|$, *где* B *— матрица* (2.3), *такие, что*

$$\mathrm{Box}_{cc}(u, G^{-1}\varepsilon) \subset \mathrm{Box}^B_{cc}(u, \varepsilon) \subset \mathrm{Box}_{cc}(u, G\varepsilon), \quad \varepsilon \le \varepsilon_0,\ u \in \widetilde{O}.$$

Таким образом, квазиметрики d_{cc} *и* d^B_{cc} *локально эквивалентны в* $\widetilde{O}$.

Доказательство. По определению имеем

$$\mathrm{Box}^B_{cc}(u, \varepsilon) = \left\{ \bigcup_{\tilde{\varepsilon} < \varepsilon} \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \tilde{\varepsilon}^{\mathbf{i}} y_i X^B_i \right)(u) \mid \|y\| = 1,\ y = (y_1, \dots, y_N) \right\}.$$

Используя (2.2), (2.7), получаем

$$X^B_{\delta_{\tilde{\varepsilon}} y} = \sum_{k=1}^{N} P^{\delta_{\tilde{\varepsilon}} y}_k X_k = \sum_{k=1}^{N} \tilde{\varepsilon}^{\mathbf{k}} f_k X_k = \sum_{k=1}^{N} \tilde{\varepsilon}^{\mathbf{k}} X^{f_k}_k, \quad \text{где } f_k = \tilde{\varepsilon}^{-\mathbf{k}} P^{\delta_{\tilde{\varepsilon}} y}_k. \tag{2.24}$$

Пусть $f = (f_1, \dots, f_N)$. Согласно лемме 2.1 найдется константа C_0 такая, что

$$C_0^{-1} \|y_{(l)}\| \le \|B_{l+1,l+1} y_{(l)}\| \le C_0 \|y_{(l)}\|, \quad l = 1, \dots, C_U, \tag{2.25}$$

и оценка (2.25) выполняется равномерно в $\widetilde{O}$. Более того, выбирая ε_0 достаточно малым, мы всегда можем полагать, учитывая (2.24), что

$$C_0^{-1} \|f_{(l)}\| \le \|B_{l+1,l+1} y_{(l)}\| \le C_0 \|f_{(l)}\|, \quad l = 1, \dots, C_U. \tag{2.26}$$

Используя (2.24) и лемму 2.7, в системе координат $\theta_u^{-1} = x$ получаем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \sum\limits_{j=1}^{N} \tilde{\varepsilon}^{\mathbf{j}} \widetilde{X}^{f_j}_j(s), \quad x(s) = (x_1(s), \dots, x_N(s)), \\ x(0) = 0, \quad s \in [0, 1]. \end{cases} \tag{2.27}$$

Так как отображение θ_u^{-1} — диффеоморфизм, имеем $\|x(s)\| \le \mathrm{const}$. Кроме того, по теореме о гладкой зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров будет $x_i = x_i(y) \in C^{M - C_U + 1}(B^N_e(0, \mathrm{const} \cdot \epsilon))$, $i = 1, \dots, N$. Интегрируя (2.27), получаем

$$\|x(1)\| \le \mathrm{const}\, \tilde{\varepsilon}. \tag{2.28}$$

Из леммы 2.7 и (2.27), (2.28) для $i > h_1$ следует, что

$$\dot{x}_i(s) = \tilde{\varepsilon} \sum_{m=1}^{h_1} z^{i, f_m}_m + O(\tilde{\varepsilon}^2) = O(\tilde{\varepsilon}^2),$$

откуда $\|x_{(i)}(1)\| \le \mathrm{const}\, \tilde{\varepsilon}^2$ для $i = 2, \dots, C_U$. Предположим, что для $i = k, \dots, C_U$ доказаны оценки

$$\|x_{(i)}(1)\| \le \mathrm{const}\, \tilde{\varepsilon}^k. \tag{2.29}$$

Тогда по лемме 2.6 и (2.27), (2.29) для $i > h_k$ имеем

$$\dot{x}_i(s) = \sum_{k=1}^{h_k} \tilde{\varepsilon}^{\mathbf{k}} z^{i, f_k}_k + O(\tilde{\varepsilon}^{k+1}) = O(\tilde{\varepsilon}^{k+1}).$$

Таким образом, по индукции нами установлены оценки

$$|x_i(1)| \le \mathrm{const}\,\tilde{\varepsilon}^{\mathbf{i}}, \quad i = 1, \dots, N. \tag{2.30}$$

Интегрируя (2.27) и используя лемму 2.7, оценки (2.30) и определение 2.2, получаем

$$x_k(1) = \varepsilon^{\mathbf{k}} f_k + \int\limits_0^1 \left(\sum_{i=1}^{h_{k-1}} \big(P_i^{\delta_\varepsilon y}\big)_h \sum_{\substack{2 \le |\alpha+e_i| \le C_U, \\ \mathbf{k}=|\alpha+e_i|_h}} \widehat{F}^k_{\alpha,e_i}(g) x^\alpha \right) ds + o(\varepsilon^{C_U}),\ k = 1, \dots, N. \tag{2.31}$$

Заметим, что выражения $\big(P_i^{\delta_\varepsilon y}\big)_h$ из (2.31) зависят только от тех $y_i b_{i,j}$, для которых $\max\{\deg X_i, \deg X_j\} < \deg X_k$. Поэтому из (2.24)–(2.26), (2.31) вытекает, что для всякого набора y, $\|y\| = 1$, найдется число $1 \le q \le C_U$ такое, что

$$C_1^{-1} \tilde{\varepsilon}^{\deg X_j} \|y_{(q)}\| \le \|x_{(q)}(1)\| \le C_1 \tilde{\varepsilon}^{\deg X_j} \|y_{(q)}\|, \tag{2.32}$$
$$C_1^{-1} \|y_{(q)}\| \le \|y\| \le C_1 \|y_{(q)}\|, \quad C_1^{-1} \|\delta_{\varepsilon^{-1}} x_{(q)}(1)\| \le \|\delta_{\varepsilon^{-1}} x\| \le C_1 \|\delta_{\varepsilon^{-1}} x_{(q)}(1)\|,$$

где константа C_1 не зависит от выбора y, $\|y\| = 1$. Поскольку

$$\exp\big(X^B_{\delta_{\tilde\varepsilon} y}\big)(u) = \exp(X_{x(1)})(u) = v,$$

используя (2.32), получаем $C_2^{-1} \tilde{\varepsilon} \le d_{cc}(u, v) \le C_2 \tilde{\varepsilon}$ для некоторой константы $C_2 = C_2(C_1)$. Так как $d^B_{cc}(u, v) = \tilde{\varepsilon}$, свойство 2.2 доказано.

Следствие 2.2. *Тождественное отображение* $\mathrm{Id} : \widetilde{O} \to \widetilde{O}$ *является билипшицевым отображением метрических пространств* $(\widetilde{O}, d_{cc})$, $\big(\widetilde{O}, d^B_{cc}\big)$.

Следствие 2.3. *Пусть* $\mathscr{B}^B(u, r)$ *— шар в метрике Карно — Каратеодори пространства* $\big(O^B, d^B_{cc}\big)$. *Тогда найдутся положительные константы* γ, r_0, *зависящие от* ϵ, ϵ_B, N, C_U, $\|B\|$, *где* B *— матрица* (2.3), *такие, что для всякой точки* $v \in \widetilde{O}$ *и для всякого* $r \le r_0$ *выполняется* $\mathrm{Box}^B_{cc}(v, \gamma^{-1} r) \subset \mathscr{B}^B(v, r) \subset \mathrm{Box}^B_{cc}(v, \gamma r)$.

Доказательство. Заметим, что метрики Карно — Каратеодори ρ и ρ^B пространств Карно — Каратеодори (O, d_{cc}) и $\big(O^B, d^B_{cc}\big)$ эквивалентны. Поэтому следствие 2.3 вытекает из теоремы Ball-Box (см. введение) и свойства 2.2.

Известно (см., например, [30]), что отображение

$$\vartheta^{B,C}_g : (x_1, \dots, x_N) \mapsto \exp\big(x_N C_N X^B_N\big) \circ \dots \circ \exp\big(x_1 C_1 X^B_1\big)(g), \quad C_i = \mathrm{const} > 0,$$

будет C^{M+1-C_U}-гладким диффеоморфизмом некоторого шара $B^N_e\big(0, \overline{\epsilon}^{B,C}_g\big)$ в некоторую окрестность $\overline{O}^{B,C}_g \subset U$ точки g. Пусть $\overline{O}^{B,C} \subset U$ — область такая, что для каждой точки $g \in \overline{O}^{B,C}$ выполняется

$$\overline{O}^{B,C} \subset \vartheta^B_g(B_e(0, \overline{\epsilon}^{B,C})) \subset U, \quad \text{где} \quad \overline{\epsilon}^{B,C} = \inf\big\{\overline{\epsilon}^{B,C}_g \mid g \in \overline{O}^{B,C}\big\}.$$

Определим следующую метрическую функцию:

$$d^{B,C}_{cc}(u, g) = \max\big\{|x_i|^{1/\deg X_i} \mid u = \exp\big(x_N C_N X^B_N\big) \circ \dots \circ \exp\big(x_1 C_1 X^B_1\big)(g)\big\}, \tag{2.33}$$

и пусть $\mathrm{Box}^{B,C}_{cc}(v, R) = \big\{u \in \overline{O}^{B,C} \mid d^{B,C}_{cc}(u, v) < R\big\}$.

Свойство 2.3. *Найдутся положительные числа* ε_0, C_i, $i = 0, \dots, N$, *такие, что*

$$\mathrm{Box}^B_{cc}\big(v, C_0^{-1}\varepsilon\big) \subset \mathrm{Box}^{B,C}_{cc}(v,\varepsilon) \subset \mathrm{Box}^B_{cc}(v, C_0\varepsilon), \quad v \in O^B \cap \overline{O}^{B,C}, \ \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Доказательство. Пусть $C_i = 1$ для $i = 1, \dots, h_1$. Рассмотрим числа $\varepsilon_i \le \varepsilon^{\mathbf{i}}$, $i = 1, \dots, N$. Последовательно применяя лемму 2.8, получаем

$$g_1 = \exp\big(\varepsilon_{h_1} X^B_{h_1}\big) \circ \dots \circ \exp\big(\varepsilon_1 X^B_1\big)(g) = \exp\left(\sum_{i=1}^{h_1}\big(\varepsilon_i + v^1_i\big) X^B_i + \sum_{i=h_1+1}^{N} v^1_i X^B_i\right)(g),$$

где

$$v^1_i = \begin{cases} O(\varepsilon^2), & 1 \le i \le h_1, \\ O(\varepsilon^{\mathbf{i}}), & i > h_1, \end{cases}$$

равномерно в $O^B \cap \overline{O}^{B,C}$. Далее, по лемме 2.8

$$\begin{aligned} g_2 &= \exp\big(\varepsilon_{h_2} C_{h_2} X^B_{h_2}\big) \circ \dots \circ \exp\big(\varepsilon_{h_1+1} C_{h_1+1} X^B_{h_1+1}\big)(g_1) \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^{h_2}\big(C_i\varepsilon_i + v^2_i\big) X^B_i + \sum_{i=h_2+1}^{N} v^2_i X^B_i\right)(g), \end{aligned}$$

где

$$v^2_i = \begin{cases} O(\varepsilon^2), & 1 \le i \le h_1, \\ O(\varepsilon^{\mathbf{i}}), & i > h_1, \end{cases}$$

равномерно в $O^B \cap \overline{O}^{B,C}$. Заметим, что $v^2_i - v^1_i = o(\varepsilon^{\mathbf{i}})$, $i \le h_2$. Мы выбираем константы C_i, $h_1 < i \le h_2$ таким образом, чтобы $\frac{C_i}{100} > \frac{|v^2_i|}{\varepsilon^2}$ равномерно в $O^B \cap \overline{O}^{B,C}$. Пусть на k-м шаге для некоторых констант $C_i > 0$, $1 \le i \le h_k$, имеем

$$g_k = \exp\left(\sum_{i=1}^{h_k}\big(C_i\varepsilon_i + v^k_i\big) X^B_i + \sum_{i=h_k+1}^{N} v^k_i X^B_i\right)(g),$$

где

$$v^k_i = \begin{cases} O(\varepsilon^2), & 1 \le i \le h_1, \\ O(\varepsilon^{\mathbf{i}}), & i > h_1, \end{cases}$$

равномерно в $O^B \cap \overline{O}^{B,C}$ и равномерно в $O^B \cap \overline{O}^{B,C}$ для $h_1 < i \le h_k$ выполняются оценки $\frac{C_i}{100} > \frac{|v^k_i|}{\varepsilon^{\deg X_i}}$. Последовательно применяя лемму 2.8, получаем

$$\begin{aligned} g_{k+1} &= \exp\big(\varepsilon_{h_{k+1}} C_{h_{k+1}} X^B_{h_{k+1}}\big) \circ \dots \circ \exp\big(\varepsilon_{h_k+1} C_{h_k+1} X^B_{h_k+1}\big)(g_k) \\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^{h_{k+1}}(C_i\varepsilon_i + v^{k+1}_i) X^B_i + \sum_{i=h_{k+1}+1}^{N} v^{k+1}_i X^B_i\right)(g), \end{aligned}$$

где

$$v^{k+1}_i = \begin{cases} O(\varepsilon^2), & 1 \le i \le h_1, \\ O(\varepsilon^{\mathbf{i}}), & i > h_1, \end{cases}$$

равномерно в $O^B \cap \overline{O}^{B,C}$. Заметим, что $v^{k+1}_i - v^k_i = o(\varepsilon^{\mathbf{i}})$, $h_k < i \le h_{k+1}$. Мы выбираем константы C_i, $h_k < i \le h_{k+1}$, таким образом, чтобы $\frac{C_i}{100} > \frac{|v^{k+1}_i|}{\varepsilon^{k+1}}$. Определив по индукции константы C_i, мы можем утверждать, что

$$\exp\big(\varepsilon_N C_N X^B_N\big) \circ \dots \circ \exp\big(\varepsilon_1 C_1 X^B_1\big) = \exp\left(\sum_{i=1}^{N}(C_i\varepsilon_i + f_i) X^B_i\right)(g), \qquad (2.34)$$

причем
$$\frac{C_i}{100} > \frac{|f_i|}{\varepsilon^{\deg X_i}} \tag{2.35}$$
равномерно в $O^B \cap \overline{O}^{B,C}$. Рассмотрим множество $\partial\operatorname{Box}^B_{cc}(v,\varepsilon)$. Из (2.34), (2.35) вытекает, что для каждой точки $w \in \partial\operatorname{Box}^{B,C}_{cc}(v,\varepsilon)$ выполняется $d^B_{cc}(w,v) > \varepsilon/2$. Поэтому в силу диффеоморфности отображения $\vartheta^{B,C}_g$ имеем $\operatorname{Box}^B_{cc}(v,\varepsilon/2) \subset \operatorname{Box}^{B,C}_{cc}(v,\varepsilon)$. Пусть $C = \max\{C_i \mid i = 1,\dots,N\}$. Тогда из (2.34), (2.35) получим, что для любой точки $z \in \operatorname{Box}^{B,C}_{cc}(v,\varepsilon)$ выполняется $d^B_{cc}(v,z) \le 2C\varepsilon$, откуда $\operatorname{Box}^{B,C}_{cc}(v,\varepsilon) \subset \operatorname{Box}^B_{cc}(v,2C\varepsilon)$.

Следствие 2.4. *Метрическая функция $d^{B,C}_{cc}$ является на $O^B \cap \overline{O}^{B,C}$ квазиметрикой, локально эквивалентной d^B_{cc}.*

Доказательство. П. 1 определения 2.4 вытекает из диффеоморфности отображения $\vartheta^{B,C}_g$, пп. 2, 3 — из свойств 2.1, 2.3.

Следствие 2.5. *Рассмотрим на $\overline{O}^{B,C'}$ следующую метрическую функцию:*
$$d^{B,C'}_{cc}(u,g) = \max\bigl\{|x_i|^{1/\deg X_i} \mid u = \exp\bigl(x_N C'_N X^B_N\bigr) \circ \dots \circ \exp\bigl(x_1 C'_1 X^B_1\bigr)(g)\bigr\},$$
где $C'_i = \mathrm{const} > 0$. Тогда $d^{B,C'}_{cc}$ — квазиметрика, локально эквивалентная d^B_{cc} в области $O^B \cap \overline{O}^{B,C} \cap \overline{O}^{B,C'}$.

Доказательство. Очевидно, что квазиметрики $d^{B,C'}_{cc}$, $d^{B,C}_{cc}$ эквивалентны в области $\overline{O}^{B,C} \cap \overline{O}^{B,C'}$. С другой стороны, по свойству 2.4 квазиметрики $d^{B,C}_{cc}$, d^B_{cc} локально эквивалентны в $O^B \cap \overline{O}^{B,C}$. Следовательно, квазиметрики $d^{B,C'}_{cc}$, d^B_{cc} локально эквивалентны в $O^B \cap \overline{O}^{B,C} \cap \overline{O}^{B,C'}$.

§ 3. Нильпотентный касательный конус

3.1. Построение нильпотентного касательного конуса в выделенной точке. Рассмотрим на множестве $\operatorname{Box}^B_{cc}(g,\varepsilon r_0) \subset O$ набор векторных полей $\bigl\{\varepsilon^{\mathbf{i}} X^B_i\bigr\} = \bigl\{X^{\varepsilon,B}_i\bigr\}$, $i = 1,\dots,N$. Используя (2.7), (2.22), (2.24), запишем
$$\begin{aligned}\exp\bigl(X^B_{\delta_\varepsilon y}\bigr) \circ \exp(X_{\delta_\varepsilon x})(g) &= \exp\left(\sum_{k=1}^N \varepsilon^{\mathbf{k}} X^{f_k}_k\right) \circ \exp(X_{\delta_\varepsilon x})(g)\\ &= \exp\left(\sum_{i=1}^N P^f_i(\delta_\varepsilon x, \delta_\varepsilon e) X_i\right)(g),\end{aligned} \tag{3.1}$$
где $f = (f_1,\dots,f_N)$, $f_k = \varepsilon^{-\mathbf{k}} P^{\delta_\varepsilon y}_k$ из (2.24), e из обозначений 2.1. Ввиду леммы 2.5
$$P^f_i(\delta_\varepsilon x, \delta_\varepsilon e) = \overline{P}^f_i(\delta_\varepsilon x, \delta_\varepsilon e) + R^f_i(\delta_\varepsilon x, \delta_\varepsilon e). \tag{3.2}$$
Используя лемму 2.6, получаем, что в системе координат θ^{-1}_g значения векторных полей $\bigl\{\bigl(\theta^{-1}_g\bigr)_* X^{\varepsilon,B}_i\bigr\} = \bigl\{\widetilde{X}^{\varepsilon,B}_i\bigr\}$, $i = 1,\dots,N$, в точке $\delta_\varepsilon x \in \theta^{-1}_g(\operatorname{Box}_{cc}(g,\varepsilon r_0))$ совпадают со столбцами матрицы
$$\frac{\partial\bigl(P^f_1,\dots,P^f_N\bigr)}{\partial(y_1,\dots,y_N)}(\delta_\varepsilon x, \delta_\varepsilon e)\Big|_{(y_1,\dots,y_N)=(0,\dots,0)}. \tag{3.3}$$

Предложение 3.1. *Имеет место сходимость*

$$(\delta_{\varepsilon^{-1}})_*\widetilde{X}_i^{\varepsilon,B} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \sum_{l=h_{\mathbf{i}-1}+1}^{h_{\mathbf{i}}} b_{l,i}(g)\widehat{X}_l^0, \quad i=1,\dots,N,$$

равномерно на $\theta_g^{-1}(\mathrm{Box}_{cc}(g,r_0))$, *и векторные поля* $\{\widehat{X}_i^0\}$ *образуют базис градуированной алгебры Ли.*

Напомним [22], что алгебра $\mathscr{R}$ называется *градуированной*, если $\mathscr{R}=\bigoplus\limits_{i=1}^{r}V_r$ и $[V_i,V_j]\subset V_{i+j}$ для $i+j\le r$, $[V_i,V_j]=0$ для $i+j>r$. Заметим, что градуированная алгебра всегда нильпотентна (степени r).

Лемма 3.1. *Пусть* $\widetilde{X}_i^{\varepsilon,A}=(\theta_g^B)_*^{-1}X_i^{\varepsilon,B}$. *Тогда* $(\delta_{\varepsilon^{-1}})_*\widetilde{X}_i^{\varepsilon,A}\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\widehat{X}_i^{0,A}$, $1\le i\le N$, *равномерно на* $\big(\theta_g^B\big)^{-1}\big(\mathrm{Box}_{cc}^B(g,r_0)\big)$ *и векторные поля* $\big\{\widehat{X}_i^{0,A}\big\}$ *образуют базис градуированной алгебры Ли.*

Доказательство леммы 3.1. Обозначим через $\big(\tilde{z}_{i,\varepsilon}^{1,A},\dots,\tilde{z}_{i,\varepsilon}^{N,A}\big)$ значение векторного поля $\widetilde{X}_i^{\varepsilon,A}$ в точке $\delta_\varepsilon x$, образованное компонентами i-го столбца матрицы

$$\frac{\partial\big(P_1^A,\dots,P_N^A\big)}{\partial(y_1,\dots,y_N)}(\delta_\varepsilon x,\delta_\varepsilon y)\bigg|_{(y_1,\dots,y_N)=(0,\dots,0)}, \tag{3.4}$$

где P_i^A из леммы 2.8. Используя лемму 2.8 и (3.4), получаем

$$\begin{aligned}\tilde{z}_{i,\varepsilon}^{j,A}&=\frac{\partial P_j^A(\delta_\varepsilon x,\delta_\varepsilon y)}{\partial y_i}\bigg|_{y=0}=\frac{\partial \overline{P}_j^A(\delta_\varepsilon x,\delta_\varepsilon y)}{\partial y_i}\bigg|_{y=0}+\frac{\partial R_j^A(\delta_\varepsilon x,\delta_\varepsilon y)}{\partial y_i}\bigg|_{y=0}\\&=\frac{\partial \overline{P}_j^A(\delta_\varepsilon x,\delta_\varepsilon y)}{\partial y_i}\bigg|_{y=0}+\varepsilon^{\mathbf{i}}\frac{\partial R_j^A(\delta_\varepsilon x,\delta_\varepsilon y)}{\partial\big(\varepsilon^{\mathbf{i}}y_i\big)}\bigg|_{y=0}\\&=\varepsilon^{\mathbf{i}}\delta_{ji}+\sum_{\substack{2\le|\alpha+e_i|\le M-C_U,\\ \mathbf{j}\le|\alpha+e_i|_h}}F_{\alpha,e_i}^{j,A}(g)\varepsilon^{|\alpha+e_i|_h}x^\alpha+\varepsilon^{\mathbf{i}}\rho_i^{j,A}(\delta_\varepsilon x).\end{aligned} \tag{3.5}$$

Пусть $(\delta_{\varepsilon^{-1}})_*\widetilde{X}_i^\varepsilon=\big(\tilde{z}_{i,\varepsilon}^{1,*},\dots,\tilde{z}_{i,\varepsilon}^{N,*}\big)$. Из соотношений (3.5) вытекает, что

$$\tilde{z}_{i,\varepsilon}^{j,*}=\delta_{ji}+\sum_{\substack{2\le|\alpha+e_i|\le M-C_U,\\ \mathbf{j}\le|\alpha+e_i|_h}}F_{\alpha,e_i}^{j,A}(g)\varepsilon^{|\alpha+e_i|_h-\mathbf{j}}x^\alpha+\varepsilon^{\mathbf{i}-\mathbf{j}}\rho_i^{j,A}(\delta_\varepsilon x). \tag{3.6}$$

Из леммы 2.8 следует, что $\varepsilon^{\mathbf{i}-\mathbf{j}}\rho_i^{j,A}(\delta_\varepsilon x)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$. Переходя в (3.6) к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем, что слагаемые, для которых $\deg X_j<|\alpha+e_i|_h$, равномерно на $\big(\theta_g^B\big)^{-1}\big(\mathrm{Box}_{cc}^B(g,r_0)\big)$ стремятся к 0. Поэтому для каждой точки $x\in\big(\theta_g^B\big)^{-1}\big(\mathrm{Box}_{cc}^B(g,r_0)\big)$ имеем

$$(\delta_{\varepsilon^{-1}})_*\widetilde{X}_i^{\varepsilon,A}(x)=\widehat{X}_i^{0,A}(x)+\varepsilon r_i(x)+g_i\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\widehat{X}_i^{0,A}(x), \tag{3.7}$$
$$g_i=\big(\varepsilon^{\mathbf{i}-\mathbf{1}}\rho_i^{1,A},\dots,\varepsilon^{\mathbf{i}-\mathbf{N}}\rho_i^{N,A}\big)(\delta_\varepsilon x).$$

Пусть $\widehat{X}_i^{0,A}=\big(\hat{z}_i^{1,A},\dots,\hat{z}_i^{N,A}\big)$. Тогда из (3.6), (3.7) и леммы 2.3 получаем

$$\hat{z}_i^{j,A}=\begin{cases}\delta_{ij} & \text{при } j\le\mathbf{i};\\ \sum\limits_{\substack{|\alpha+e_i|_h=\mathbf{j},\\ \alpha>0}}\widehat{F}_{\alpha,e_i}^{j,A}(g)x^\alpha & \text{при } j>\mathbf{i}.\end{cases} \tag{3.8}$$

Поскольку наши рассмотрения ограничены некоторой компактной окрестностью начала координат, а $\{(\delta_{\varepsilon^{-1}})_*\widetilde{X}_i^{\varepsilon,A}\}$ является набором гладких равномерно ограниченных векторных полей (см. (3.6)), сходимости в соотношениях (3.7) равномерные на $\left(\theta_g^B\right)^{-1}\left(\mathrm{Box}_{cc}^B(g,r_0)\right)$. Таким образом, каждому векторному полю X_i^B на $\left(\theta_g^B\right)^{-1}\left(\mathrm{Box}_{cc}^B(g,r_0)\right)$ однозначно соответствует векторное поле $\widehat{X}_i^{0,A}$, координаты которого выражаются при помощи (3.8).

Покажем, что на множестве $\left(\theta_g^B\right)^{-1}\left(\mathrm{Box}_{cc}^B(g,r_0)\right)$ справедлива следующая таблица коммутаторов:

$$\left[\widehat{X}_i^{0,A}, \widehat{X}_j^{0,A}\right] = \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{i}+\mathbf{j}} \widehat{C}_{ijk}^A \widehat{X}_k^{0,A}, \quad \widehat{C}_{ijk}^A = C_{ijk}^A(g) = \mathrm{const}. \tag{3.9}$$

Используя (2.6), (3.6), (3.7) и лемму 2.8, для каждой точки $x \in \theta_g^{-1}(\mathrm{Box}_{cc}(g,r_0))$ имеем

$$\begin{aligned}\left[(\delta_{\varepsilon^{-1}})_*\widetilde{X}_i^{\varepsilon,A}, (\delta_{\varepsilon^{-1}})_*\widetilde{X}_j^{\varepsilon,A}\right](x) &= (\delta_{\varepsilon^{-1}})_*\varepsilon^{\mathbf{i}+\mathbf{j}}\left[\widetilde{X}_i^{A}, \widetilde{X}_j^{A}\right](x)\\ &= \sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{i}+\mathbf{j}} C_{ijk}^A(\theta_g(\delta_\varepsilon x))\cdot(\delta_{\varepsilon^{-1}})_*\varepsilon^{\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}}\widetilde{X}_k^{\varepsilon,A}(x)\\ = \sum_{\mathbf{k}\le\mathbf{i}+\mathbf{j}} C_{ijk}^A(\theta_g(\delta_\varepsilon x))\varepsilon^{\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}}&\left(\widehat{X}_k^{0,A} + \varepsilon r_k + g_k\right)(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{i}+\mathbf{j}} \widehat{C}_{ijk}^A\widehat{X}_k^{0,A}(x).\end{aligned} \tag{3.10}$$

Рассмотрим функции $\rho_i^{j,A}$ из леммы 2.8. Заметим, что

$$\frac{\partial \rho_i^{j,A}}{\partial x_k} = o(\|x\|^{M-C_U-2}), \quad i,j,k = 1,\dots,N.$$

Так как $M \ge 2C_U$, для компонент вектор-функции g_i из (3.7) получаем

$$\varepsilon^{\mathbf{i}-\mathbf{j}}\frac{\partial \rho_i^{j,A}}{\partial x_k} = \varepsilon^{\mathbf{i}+\mathbf{k}-\mathbf{j}}\frac{\partial \rho_i^{j,A}(\delta_\varepsilon x)}{\partial(\varepsilon^{\mathbf{k}}x_k)} = \frac{o(\|\delta_\varepsilon x\|^{M-C_U-2})}{\varepsilon^{\mathbf{j}-\mathbf{i}-\mathbf{k}}} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

Отсюда с использованием (3.7) вытекает, что

$$\begin{aligned}\left[\delta^*_{\varepsilon^{-1}}\widetilde{X}_i^{\varepsilon,A}, \delta^*_{\varepsilon^{-1}}\widetilde{X}_j^{\varepsilon,A}\right](x) &= \left[\widehat{X}_i^{0,A} + \varepsilon r_i + g_i, \widehat{X}_j^{0,A} + \varepsilon r_j + g_j\right](x)\\ &= \left[\widehat{X}_i^{0,A}, \widehat{X}_j^{0,A}\right](x) + o(1) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \left[\widehat{X}_i^{0,A}, \widehat{X}_j^{0,A}\right](x).\end{aligned} \tag{3.11}$$

В силу гладкости векторных полей $(\delta_{\varepsilon^{-1}})_*\widetilde{X}_i^{\varepsilon,A}$ и вектор-функций g_i, r_i сходимости (3.10), (3.11) на множестве $\left(\theta_g^B\right)^{-1}\left(\mathrm{Box}_{cc}^B(g,r_0)\right)$ равномерные. Таким образом, (3.9) следует из (3.10), (3.11).

Обозначим символом $V_i^{0,A}$ векторное подрасслоение, натянутое на векторные поля $\widehat{X}_i^{0,A}$, $h_{\mathbf{i-1}} < i \le h_{\mathbf{i}}$, и пусть $V^{0,A}$ — алгебра Ли, образованная векторными полями $\widehat{X}_i^{0,A}$, $i = 1,\dots,N$. Из (3.8) вытекает, что $V^{0,A} = \bigoplus\limits_{i=1}^{C_U} V_i^{0,A}$. Поэтому с учетом (3.9) алгебра Ли $V^{0,A}$ является (в некоторой окрестности начала координат) градуированной.

Доказательство предложения 3.1. Обозначим через $\{\widehat{X}_i^0\}$ набор векторных полей, который получается применением леммы 3.1 к набору векторных полей $\{\widetilde{X}_i^\varepsilon\}$. Рассмотрим векторные поля

$$\widetilde{X}_i^{f_i} = \left(\theta_g^{-1}\right)_* X_i^{f_i} = \sum_{j=1}^N z_i^{j,f_i}\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = 1,\dots,N,$$

из леммы 2.6. Пусть $f = \delta_\varepsilon t$ для некоторой гладкой вектор-функции $t = (t_1, \dots, t_N)$. Тогда, используя леммы 2.6, 2.7, для каждого векторного поля $\widetilde{X}_i^{f_i}$, $i = 1, \dots, N$, в точке $\delta_\varepsilon x \in \theta_g^{-1} \operatorname{Box}_{cc}(g, \varepsilon r)$ имеем следующее координатное представление:

$$z_i^{j,f_i} = \delta_{ji}\varepsilon^{\mathbf{i}} t_i(g) + \sum_{\substack{2 \le |\alpha+e_i| \le M-C_U,\\ \mathbf{j} \le |\alpha+e_i|_h}} F_{\alpha,e_i}^{j,f} \varepsilon^{|\alpha+e_i|_h} x^\alpha + \rho_i^{j,f}(\delta_\varepsilon x), \tag{3.12}$$

$$\rho_i^{j,f}(\delta_\varepsilon x) = \frac{\partial R_j^f(\delta_\varepsilon x, y)}{\partial y_i}\bigg|_{y=0} = \varepsilon^{\mathbf{i}} o(\|\delta_\varepsilon x\|^{M-C_U-1}) = o(\varepsilon^{M-C_U}),$$

$$F_{\alpha,e_i}^{j,f}(g) = t_i(g) \widehat{F}_{\alpha,e_i}^{j}(g) \quad \text{в случае} \quad \mathbf{j} = |\alpha + e_i|_h.$$

Тогда из леммы 3.1 и соотношений (3.12) получаем, что

$$(\delta_{\varepsilon^{-1}})_* \widetilde{X}_i^f \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} t_i(g) \widehat{X}_i^0, \quad i = 1, \dots, N. \tag{3.13}$$

Используя (3.13) и (2.2), для каждого $i = 1, \dots, N$ имеем

$$\begin{aligned}
(\delta_{\varepsilon^{-1}})_* \widetilde{X}_i^{\varepsilon,B} &= \varepsilon^{\mathbf{i}} (\delta_{\varepsilon^{-1}})_* \widetilde{X}_i^B \\
&= \varepsilon^{\mathbf{i}} (\delta_{\varepsilon^{-1}})_* \left(\sum_{k=1}^{h_{\mathbf{i}}} b_{k,i} X_k \right) = \sum_{k=1}^{h_{\mathbf{i}}} (\delta_{\varepsilon^{-1}})_* \varepsilon^{\mathbf{i}} b_{k,i} X_k \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \sum_{k=h_{\mathbf{i-1}}+1}^{h_{\mathbf{i}}} b_{k,i}(g) \widehat{X}_k^0
\end{aligned}$$

равномерно на $\theta_g^{-1}(\operatorname{Box}_{cc}(g, r_0))$. Предложение 3.1 доказано.

Введем обозначения $\widehat{X}_i^A = \big(\theta_g^B\big)_* \widehat{X}_i^{0,A}$, $\widehat{X}_i = (\theta_g)_* \widehat{X}_i^0$, $i = 1, \dots, N$.

Следствие 3.1. *На множестве* $\operatorname{Box}_{cc}^B(g, r_0)$ *имеют место следующие равномерные сходимости:*

$$\begin{gathered}
\big(\Delta_{\varepsilon^{-1}}^B\big)_* X_i^{\varepsilon,B} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \widehat{X}_i^A, \\
\big[\big(\Delta_{\varepsilon^{-1}}^B\big)_* X_i^{\varepsilon,B}, \big(\Delta_{\varepsilon^{-1}}^B\big)_* X_j^{\varepsilon,B}\big] \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \big[\widehat{X}_i^A, \widehat{X}_j^A\big].
\end{gathered} \tag{3.14}$$

Доказательство. С учетом C^{M+1-C_U}-гладкости диффеоморфизма θ_g^B сходимости (3.14) вытекают из (3.7), (3.11).

Следствие 3.2. *Набор векторных полей* $\big\{\widehat{X}_i^A\big\}$ *удовлетворяет следующей таблице коммутаторов на* $\operatorname{Box}_{cc}^B(g, r_0)$*:*

$$\big[\widehat{X}_i^A, \widehat{X}_j^A\big] = \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{i}+\mathbf{j}} \widehat{C}_{ijk}^A \widehat{X}_k^A, \tag{3.15}$$

где константы $\widehat{C}_{ijk}^A$ *из* (3.9).

Доказательство. Поскольку отображение θ_g^B является C^{M+1-C_U}-гладким диффеоморфизмом, то $\big[\big(\theta_g^B\big)_* \widehat{X}_i^{0,A}, \big(\theta_g^B\big)_* \widehat{X}_j^{0,A}\big] = \big(\theta_g^B\big)_* \big[\widehat{X}_i^{0,A}, \widehat{X}_j^{0,A}\big]$ (см., например, [26]). Поэтому следствие 3.2 вытекает из (3.9) и следствия 3.1.

Следствие 3.3. *Для* $u \in \mathrm{Box}^B_{cc}(g, r_0)$ *выполняется равенство*

$$\tau^{\mathbf{i}} \widehat{X}^A_i\big(\Delta^B_\tau u\big) = \big(\Delta^B_\tau\big)_* \widehat{X}^A_i(u),$$

где $\tau > 0$, $i = 1, \dots, N$.

Доказательство. Из (3.8) получаем, что для $x \in \theta_g^{-1}\big(\mathrm{Box}^B_{cc}(g, r_0)\big)$ выполняется тождество $(\delta_\tau)_* \widehat{X}^{0,A}_i(x) = \tau^{\mathbf{i}} \widehat{X}^{0,A}_i(\delta_\tau x)$, откуда в силу C^{M+1-C_U}-гладкости диффеоморфизма θ^B_g вытекает следствие 3.3.

Из (3.8) и диффеоморфности отображения θ^B_g следует, что в каждой точке $u \in \widehat{O}_g$, где $\widehat{O}_g$ — некоторая окрестность точки g, значения векторных полей $\widehat{X}^A_k$, $k = 1, \dots, N$, образуют базис векторного пространства $T_u \widehat{O}_g$. Отображение

$$\hat{\theta}^B_u : (x_1, \dots, x_N) \mapsto \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i \widehat{X}^A_i\right)(u), \quad \hat{\theta}_g(0) = \hat{\theta}_u(0, \dots, 0) = u,$$

является гладким диффеоморфизмом некоторого евклидова шара $B^N_e\big(0, \hat{\epsilon}^B_u\big)$, где $\hat{\epsilon}^B_u$ — достаточно малое положительное число, в некоторую окрестность $\widehat{O}^B_u \subset U$ точки u и задает систему координат 1-го рода в $\widehat{O}^B_u$. Символом $\mathscr{O}^B_g$ обозначается далее некоторая область из U такая, что для каждой точки $u \in \mathscr{O}^B_g$ выполняется

$$\mathscr{O}^B_g \subset \hat{\theta}^B_u\big(B^N_e(0, \hat{\epsilon}^B)\big) \subset U, \quad \text{где } \hat{\epsilon}^B = \inf\big\{\hat{\epsilon}^B_u \mid u \in \mathscr{O}^B_g\big\}.$$

Можно полагать, не уменьшая общности, что $\hat{\epsilon}^B = \epsilon^B$, $\mathscr{O}^B_g = O^B$. Используя известные результаты теории групп и алгебр Ли (см., например, [31]), определим касательный конус пространства Карно — Каратеодори в выделенной точке g.

Определение 3.1. Локальная группа Ли $\big(\mathscr{O}^B_g, d^{g,B}_c\big)$ с групповой операцией

$$\hat{x} \cdot \hat{y} = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i \widehat{X}^A_i\right) \circ \exp\left(\sum_{i=1}^N x_i \widehat{X}^A_i\right)(g) = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i \widehat{X}^A_i\right)(x) = \exp\left(\sum_{i=1}^N z_i \widehat{X}^A_i\right)(g),$$

где величины z_i однозначно определяются при помощи (3.15) и леммы 2.8, с соответствующим квазирасстоянием Карно — Каратеодори $d^{g,B}_c$ называется *нильпотентным касательным конусом* пространства Карно — Каратеодори $\big(O^B, d^B_{cc}\big)$ в выделенной точке $g \in O^B$.

3.2. Свойства нильпотентного касательного конуса. Введем обозначения

$$X^{\varepsilon,B}_x = \sum_{i=1}^N x_i X^{\varepsilon,B}_i, \quad \widehat{X}^{\varepsilon,B}_x = \sum_{i=1}^N x_i \widehat{X}^{\varepsilon,B}_i.$$

Определим функции

$$z^A_i = z^A_i(x, y) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{P^A_i(\delta_\varepsilon x, \delta_\varepsilon y)}{\varepsilon^{\deg X_i}},$$

где P^A_i из леммы 2.8. Из лемм 2.3, 2.8 вытекает, что

$$z^A_i(x, y) = x_i + y_i, \quad 1 \le i \le h_1, \tag{3.16}$$

$$z_i^A(x,y) = x_i + y_i + \sum_{|\alpha|_h+|\beta|_h=k} \widehat{F}^{i,A}_{\alpha,\beta} x^\alpha y^\beta = x_i + y_i$$

$$+ \sum_{\substack{k,m=1,\\ k>m}}^{N} \sum_{\substack{\gamma,\delta,\gamma+\delta>0,\\ |\gamma+\delta+e_k+e_m|_h=\mathbf{i}}} \widehat{G}^{j,A}_{\gamma,\delta,k,m} x^\gamma \cdot y^\delta (x_k y_m - x_m y_k), \quad h_{k-1} < i \le h_k.$$

Лемма 3.2. *Для каждого* $i = 1, \dots, N$ *величины* z_i *из определения* 3.1 *совпадают с* z_i^A *из* (3.16).

Доказательство. Из следствия 3.1 и теорем о единственности и непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров [28] вытекает сходимость

$$\exp\big((\Delta^B_{\varepsilon^{-1}})_* X^{\varepsilon,B}_y\big) \circ \exp\big((\Delta^B_{\varepsilon^{-1}})_* X^{\varepsilon,B}_x\big)(g) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \exp\big(\widehat{X}^A_y\big) \circ \exp\big(\widehat{X}^A_x\big)(g).$$

С другой стороны, по лемме 2.8 имеем

$$\exp\big((\Delta^B_{\varepsilon^{-1}})_* X^{\varepsilon,B}_y\big) \circ \exp\big((\Delta^B_{\varepsilon^{-1}})_* X^{\varepsilon,B}_x\big)(g) = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{P_i^A(\delta_\varepsilon x, \delta_\varepsilon y)}{\varepsilon^{\deg X_i}} (\Delta^B_{\varepsilon^{-1}})_* X^{\varepsilon,B}_i\right)(g).$$

Тогда, используя (3.14), получаем

$$z_i = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{P_i^A(\delta_\varepsilon x, \delta_\varepsilon y)}{\varepsilon^{\deg X_i}} = z_i^A.$$

Предложение 3.2. *Имеет место равенство*

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \widetilde{X}^{1,A}_i\right)(0) = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \widehat{X}^{0,A}_i\right)(0), \quad \|(\alpha_1, \dots, \alpha_N)\| < \epsilon^B.$$

Доказательство. Пусть

$$\exp\left(s \sum_{i=1}^{N} \alpha_i X^B_i\right)(g) = I(s), \quad s \in [0,1].$$

Из определения отображения θ^B_g вытекает, что

$$\big(\theta^B_g\big)^{-1}(I(s)) = \exp\left(s \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \widetilde{X}^{1,A}_i\right)(0) = (s\alpha_1, \dots, s\alpha_N).$$

Из леммы 3.2 следует, что векторное поле $\widehat{X}^{0,A}_i$ является i-м столбцом матрицы

$$\left.\frac{\partial(z_1^A, \dots, z_N^A)}{\partial(y_1, \dots, y_N)}\right|_{(y_1,\dots,y_N)=(0,\dots,0)}. \tag{3.17}$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\dot{x}(s) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \widehat{X}^{0,A}_i(s), \quad x(0) = 0, \quad s \in [0,1],$$

и пусть $x(s) = (x_1(s), \dots, x_N(s))$ — ее решение. Покажем, что

$$x(s) = \big(\theta^B_g\big)^{-1}(I(s)).$$

Из (3.8) следует, что
$$x_k(s) = s\alpha_k, \quad 1 \le k \le h_1. \tag{3.18}$$
Рассмотрим $x_k(s)$ для $h_1 < k \le h_2$. Используя (3.8), (3.16)–(3.18), получаем
$$\dot{x}_k = \alpha_k + \sum_{|e_i+e_j|_h=2} \widehat{F}^{k,A}_{e_i,e_j}(\alpha_i x_j - \alpha_j x_i) = \alpha_k.$$
Таким образом, $x_k(s) = s\alpha_i$ для $h_1 < k \le h_2$. Теперь предположим, что для некоторого натурального числа $t < C_U$ доказаны тождества
$$x_k(s) = s\alpha_k, \quad 1 \le k \le h_t. \tag{3.19}$$
Используя (3.8), (3.16), (3.17), (3.19), для $h_t < k \le h_{t+1}$ получаем
$$\dot{x}_k = \alpha_k + \sum_{\substack{l,m=1,\\ l>m}}^{h_t} \sum_{\substack{\gamma\ge 0,\\ |\gamma+e_l+e_m|_h=\mathbf{k}}} \widehat{G}^{j,A}_{\gamma,0,l,m} x^{\omega}(x_l\alpha_m - x_m\alpha_l). \tag{3.20}$$
Из (3.19) и условий суммирования в (3.20) следует, что $x_k = s\alpha_k$. Предложение 3.2 доказано.

Следствие 3.4. *Справедливо равенство*
$$\exp\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i X_i^B\right)(g) = \exp\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \widehat{X}_i^A\right)(g), \quad \|(\alpha_1,\dots,\alpha_N)\| < \epsilon^B.$$

Доказательство. Следствие 3.4 вытекает из диффеоморфности отображения θ_g^B и предложения 3.2.

Обозначим
$$\mathrm{Box}_c^{g,B}(x,r) = \left\{y \in \left(\mathscr{O}_g^B, d_c^{g,B}\right) \mid d_c^{g,B}(x,y) < r\right\},$$
где $x \in \left(\mathscr{O}_g^B, d_c^{g,B}\right)$. Ввиду следствия 3.4 имеем $\mathrm{Box}_c^{g,B}(g,r) = \mathrm{Box}_{cc}^B(g,r)$.

Рассмотрим следующую *групп-алгебру* $\mathbb{G}$ (см. [26]). Ее элементы x отождествляются с точками из $\mathbb{R}^N$: $x = (x_1,\dots,x_N) = \sum\limits_{i=1}^N x_i e_i$, касательное пространство в начале координат представляет собой прямую сумму подпространств $\bigoplus\limits_{i=1}^{C_U} V_i'(0)$, где каждое $V_i'(0)$ натянуто на векторы $e_{h_{i-1}+1},\dots,e_{h_i}$, удовлетворяющие следующей таблице коммутаторов:
$$[e_i,e_j] = \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{i}+\mathbf{j}} \widehat{C}^A_{ijk} e_k. \tag{3.21}$$
Операцию умножения слева (групповую операцию) на $\mathbb{G}$ определим формально, используя (3.21), посредством формул (1.5), (1.6):
$$(x_1,\dots,x_N)\cdot(y_1,\dots,y_N) = \exp\left(\sum_{i=1}^N y_i e_i\right) \circ \left(\sum_{i=1}^N x_i e_i\right)(0)$$
$$= \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} Z_i\right)(0) = \exp\left(\sum_{i=1}^N z_i e_i\right)(0) = (z_1,\dots,z_N). \tag{3.22}$$

Из таблицы (3.21) вытекает, что «бесконечный» ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} Z_i$ из (3.22) на самом деле обрывается на шаге C_U. Базис левоинвариантных векторных полей группы $\mathbb{G}$ в каждой точке x составляют вектор-столбцы матрицы

$$\frac{\partial(z_1,\dots,z_N)}{\partial(y_1,\dots,y_N)}\bigg|_{(y_1,\dots,y_N)=(0,\dots,0)}. \tag{3.23}$$

Предложение 3.3. *На $B_e^N(0,\epsilon^B)$ i-й столбец матрицы* (3.23) *имеет координаты $\left(\hat{z}_i^{1,A},\dots,\hat{z}_i^{N,A}\right)$, где $\hat{z}_i^{j,A}$ из* (3.8), *а функции $z_i=z_i(x,y)$ из* (3.22) *совпадают с z_i^A из* (3.16).

Доказательство. Используя лемму 2.3 и (3.21), получаем, что

$$Z_{n+1}=\sum_{j=1}^{N} q_j(x,y)e_j,\quad q_j=\sum_{\substack{|\alpha+\beta|=n+1,\\ |\alpha+\beta|_h=\mathbf{j}}} \widehat{F}^{j,A}_{\alpha,\beta}(g)x^{\alpha}\cdot y^{\beta}. \tag{3.24}$$

Это влечет, в частности, что $Z_{n+1}=0$ для $n>C_U$ в (3.22). Подставляя Z_{n+1} из (3.24) в (3.22) и учитывая лемму 2.8, заключаем, что функции $z_i=z_i(x,y)$ из (3.22) совпадают с z_i^A из (3.16). Так как векторное поле $\widehat{X}_i^{0,A}$ является i-м столбцом матрицы (3.17), предложение 3.3 доказано.

Следствие 3.5. *Коэффициенты z_i в определении* 3.1 *совпадают с коэффициентами z_i из* (3.22) *для соответствующих значений x_i, y_i, $i=1,\dots,N$.*

Пусть V_i^A — векторное подрасслоение, натянутое на векторы $\widehat{X}_j^A$, $h_{i-1}<j\le h_i$, V^A — алгебра Ли, образованная векторными полями $\widehat{X}_i^A$, $i=1,\dots,N$.

Предложение 3.4. *Алгебра Ли V^A стратифицирована* [22], *т. е.*

$$\left[V_1^A,V_i^A\right]=\begin{cases} V_{i+1}^A, & i=2,\dots,C_U-1,\\ \{0\}, & i=C_U.\end{cases}$$

Доказательство. Используя (2.2), (2.5) и определение векторных полей X_i, см. § 2, для каждого $i>h_1$ на множестве $\mathrm{Box}^B_{cc}(g,\varepsilon)$ имеем

$$\begin{aligned}
X_i^B=\sum_{k=1}^{h_{\mathbf{i}}} b_{k,i}X_k&=\sum_{k=1}^{h_{\mathbf{i}}} b_{k,i}\Big(\sum_{\substack{p^k=(p_2^k,\dots,p_l^k)\ge 0,\\ |p^k|+1\le\mathbf{k}}}\alpha_{p^k}(\operatorname{ad}X_{i_l})^{p_l^k}\dots(\operatorname{ad}X_{i_2})^{p_2^k}X_{i_1}\Big)\\
&=\sum_{k=1}^{h_{\mathbf{i}}} b_{k,i}\left(\sum_{i_l=1}^{h_1}\left(\sum_{j=1}^{h_{\mathbf{k}-1}} c_{j,i_l}[X_{i_l},X_j]\right)+\sum_{\mathbf{l}<\mathbf{k}} c_lX_l\right)\\
=\sum_{k=1}^{h_{\mathbf{i}}} b_{k,i}&\left(\sum_{i_l=1}^{h_1}\left(\sum_{j=1}^{h_{\mathbf{k}-1}} c_{j,i_l}\left[\sum_{s=1}^{h_1}a_{s,i_l}X_s^B,\sum_{s=1}^{h_{\mathbf{j}}}a_{s,j}X_s^B\right]\right)+\sum_{\mathbf{l}<\mathbf{k}} c_l\left(\sum_{s=1}^{h_{\mathbf{l}}}a_{s,l}X_s^B\right)\right)\\
&=\sum_{k=1}^{h_1}\sum_{j=1}^{h_{\mathbf{i}-1}}\Phi^1_{kji}\left[X_k^B,X_j^B\right]+\sum_{s=1}^{h_{\mathbf{i}-1}}\Phi^2_sX_s^B,
\end{aligned}\tag{3.25}$$

где $\deg X_{i_j}=1$, $j=1,\dots,l$, $\sum\limits_{j=2}^{l}p_j^k\le\mathbf{k}-1$, α_{p^k}, c_{j,i_l}, c_l, Φ^1_{kji}, Φ^2_s — некоторые C^2-гладкие функции. Используя (3.25), получаем

$$X_i^{\varepsilon,B}=\varepsilon^{\mathbf{i}}\left(\sum_{k=1}^{h_1}\sum_{j=1}^{h_{\mathbf{i}-1}}\Phi^1_{kji}\big[X_k^B,X_j^B\big]+\sum_{s=1}^{h_{\mathbf{i}-1}}\Phi^2_sX_s^B\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{h_1}\varepsilon^{\mathbf{i}-\mathbf{j}-1}\sum_{j=1}^{h_{\mathbf{i}-1}}\Phi^1_{kji}\big[X_k^{\varepsilon,B},X_j^{\varepsilon,B}\big]+\varepsilon^{\mathbf{i}-\mathbf{s}}\sum_{s=1}^{h_{\mathbf{i}-1}}\Phi^2_sX_s^{\varepsilon,B}. \quad (3.26)$$

Из следствия 3.1 вытекает, что

$$\big(\Delta^B_{\varepsilon^{-1}}\big)_*X_i^{\varepsilon,B}\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}\widehat{X}_i^A,\quad \big(\Delta^B_{\varepsilon^{-1}}\big)_*\sum_{s=1}^{h_{\mathbf{i}-1}}\Phi^2_sX_s^{\varepsilon,B}\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}\sum_{s=1}^{h_{\mathbf{i}-1}}\widehat{\Phi}^2_sX_s^A, \quad (3.27)$$
$$\big(\Delta^B_{\varepsilon^{-1}}\big)_*\sum_{j=1}^{h_{\mathbf{i}-1}}\Phi^1_{kji}\big[X_k^{\varepsilon,B},X_j^{\varepsilon,B}\big]\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}\sum_{j=1}^{h_{\mathbf{i}-1}}\widehat{\Phi}^1_{kji}\big[X_k^A,X_j^A\big]$$

равномерно на $\mathrm{Box}^B_{cc}(g,r)$, $\widehat{\Phi}^1_{kji}=\Phi^1_{kji}(g)=\mathrm{const}$, $\widehat{\Phi}^2_{kji}=\Phi^2_{kji}(g)=\mathrm{const}$. Тогда, используя (3.26), (3.27), выводим, что

$$\widehat{X}_i^A=\sum_{\substack{k,j\ge1,\\ \mathbf{k}=1,\mathbf{j}+1=\mathbf{i}}}\widehat{\Phi}^1_{kji}\big[X_k^A,X_j^A\big].$$

Следовательно $V_{i+1}^A\subset[V_1^A,V_i^A]$ для $i=2,\dots,C_U-1$. Учитывая (3.15), получаем $V_{i+1}=[V_1,V_i]$ для $i=2,\dots,C_U-1$ и $[V_1,V_{C_U}]=\{0\}$.

Свойство 3.1. *Пусть*

$$\exp\big(\widehat{X}_y^A\big)\circ\exp\big(\widehat{X}_x^A\big)(g')=\exp\left(\sum_{i=1}^{N}z'_i(x,y)\widehat{X}_i^A\right)(g'),\quad g'\in\mathscr{O}_g^B.$$

Тогда $z'_i(x,y)=z_i^A(x,y)$, *где* z_i^A *из* (3.16).

Доказательство. Из (3.15), (3.22), (3.23) и предложения 3.3 имеем

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{N}y_i\widehat{X}_i^{0,A}\right)\circ\exp\left(\sum_{i=1}^{N}x_i\widehat{X}_i^{0,A}\right)(u)=\exp\left(\sum_{i=1}^{N}z_i^A\widehat{X}_i^{0,A}\right)(u) \quad (3.28)$$

для каждой точки $u\in B_e(0,\epsilon^B)$, где z_i^A те же, что и в (3.16). Поэтому свойство 3.1 вытекает из (3.28) и диффеоморфности отображения θ_g^B.

Следствие 3.6. *Имеем* $d_c^{g,B}(x\cdot a,x\cdot b)=d_c^{g,B}(a,b)$, *где* $a,b,x\in\big(\mathscr{O}_g^B,d_c^{g,B}\big)$.

Доказательство. Пусть

$$\exp\big(\widehat{X}_\alpha^A\big)(g)=a,\quad \exp\big(\widehat{X}_\beta^A\big)(g)=b,\quad \exp\big(\widehat{X}_y^A\big)(a)=b,$$

где $\alpha,\beta,y\in B_e(0,\epsilon^B)$. Из предложения 3.3 имеем $\beta=z^A(a,y)$, а из свойства 3.1 получаем, что $\exp\big(\widehat{X}_y^A\big)\circ\exp\big(\widehat{X}_\alpha^A\big)(x)=\exp\big(\widehat{X}_\beta^A\big)(x)$. С учетом определения квазирасстояния Карно — Каратеодори следствие 3.6 доказано.

Свойство 3.2. *Пусть* $a, b \in \big(\mathscr{O}_g^B, d_c^{g,B}\big)$, $a = \exp\big(\widehat{X}^A_\alpha\big)(g)$, $b = \exp\big(\widehat{X}^A_\beta\big)(a)$, *где* $\alpha, \beta \in B_e(0, \epsilon^B)$. *Тогда* $\Delta^B_{\varepsilon^{-1}} \exp\big(\widehat{X}^A_{\delta_\varepsilon\beta}\big) \circ \exp\big(\widehat{X}^A_{\delta_\varepsilon\alpha}\big)(g) = a \cdot b$.

Доказательство. Свойство 3.2 следует из (3.16).

Следствие 3.7. *Пусть* $a, b \in \big(\mathscr{O}_g^B, d_c^{g,B}\big)$, $a = \exp\big(\widehat{X}^A_\alpha\big)(g)$, $b = \exp\big(\widehat{X}^A_\beta\big)(g)$, *где* α, $\beta \in B_e(0, \epsilon^B)$. *Тогда* $\varepsilon d_c^{g,B}(a, b) = d_c^{g,B}\big(\Delta^B_\varepsilon a, \Delta^B_\varepsilon b\big)$.

Доказательство. Из теорем существования и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений [28] следует, что найдется единственное векторное поле $\widehat{X}^A_z$ такое, что $\exp\big(\widehat{X}^A_z\big)\big(\Delta^B_\varepsilon a\big) = \Delta^B_\varepsilon b$. Из свойства 2.1 вытекает, что $|z_i| \le C\varepsilon^{\mathbf{i}}$, где $C = \mathrm{const}$. Поэтому, не уменьшая общности, полагаем, что $\exp\big(\widehat{X}^A_{\delta_\varepsilon c}\big)\big(\Delta^B_\varepsilon a\big) = \Delta^B_\varepsilon b$ для некоторой точки $c \in B^N_e(0, \epsilon^B)$. Тогда следствие 3.7 вытекает из свойства 3.2 и (3.16).

§ 4. Изоморфизм нильпотентных касательных конусов

Пусть B — матрица (2.3), $\widehat{B}$ — блочно-диагональная $N \times N$-матрица, получающаяся из матрицы B заменой всех элементов, не принадлежащих блокам $B_{i,i}$, $i = 1, \dots, C_U$, на 0.

Предложение 4.1. *Рассмотрим семейство отображений* $\delta_{\varepsilon^{-1}} \circ \theta_g^{-1} \circ \theta_g^B \circ \delta_\varepsilon : B^N_e(0, \epsilon^B) \to B^N_e(0, \epsilon)$. *Тогда* $\delta_{\varepsilon^{-1}} \circ \theta_g^{-1} \circ \theta_g^B \circ \delta_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \widehat{B}(g)$ *на* $B^N_e(0, \epsilon')$, $\epsilon' = \epsilon'(\epsilon, \epsilon^B)$.

Доказательство. Рассмотрим на $O \cap O^B$ следующую задачу Коши:

$$\dot{u}(s) = \sum_{i=1}^N \varepsilon^{\mathbf{i}} y_i X_i^B(u(s)) = \sum_{i=1}^N y_i X_i^{\varepsilon,B}(s), \quad u(0) = g, \quad s \in [0,1]. \tag{4.1}$$

Тогда $\theta_g^B \circ \delta_\varepsilon(y) = u(1)$. В координатах θ_g^{-1} задача (4.1) имеет вид

$$\dot{x^\varepsilon}(s) = \sum_{i=1}^N y_i \widetilde{X}_i^{\varepsilon,B}(x^\varepsilon(s)), \quad x^\varepsilon(0) = 0, \quad s \in [0,1]. \tag{4.2}$$

В доказательстве свойства 2.2 установлено, что координаты решения задачи (4.2) удовлетворяют оценкам $\big|x_i^\varepsilon(s)\big| \le \mathrm{const}\, \varepsilon^{\mathbf{i}}$, $i = 1, \dots, N$. В координатах $\delta_{\varepsilon^{-1}} \circ \theta_g^{-1}$ задача (4.1) имеет вид

$$\dot{x}(s) = \sum_{i=1}^N y_i \big((\delta_{\varepsilon^{-1}})_* \widetilde{X}_i^{\varepsilon,B}\big)(s), \quad x(0) = 0, \; s \in [0,1]. \tag{4.3}$$

Пусть $x(s)$ — решение задачи (4.3). Тогда $\big(\delta_{\varepsilon^{-1}} \circ \theta_g^{-1} \circ \theta_g^B \circ \delta_\varepsilon\big)(y) = x(1)$. Из предложения 3.1 следует, что

$$(\delta_{\varepsilon^{-1}})_* \widetilde{X}_i^{\varepsilon,B} \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \sum_{l=h_{\mathbf{i}-\mathbf{1}}+1}^{h_{\mathbf{i}}} b_{k,i}(g) \widehat{X}^0_k.$$

Используя теоремы о непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров [28], мы можем утверждать, что решения систем (4.3), параметризованных при помощи ε, сходятся при $\varepsilon \to 0$ к решению «предельной» системы

$$\dot{x}(s)=\sum_{i=1}^{N}y_i\left(\sum_{k=h_{\mathbf{i-1}}+1}^{h_{\mathbf{i}}}b_{k,i}(g)\widehat{X}^0_k\right)(s)$$
$$=\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=h_{\mathbf{k-1}}+1}^{h_{\mathbf{k}}}y_ib_{k,i}(g)\right)\widehat{X}^0_k(s),\quad x(0)=0,\quad s\in[0,1]. \tag{4.4}$$

Пусть $x(s)$ — решение задачи (4.4). Имеем $\delta_{\varepsilon^{-1}}\circ\theta_g^{-1}\circ\theta_g^B\circ\delta_\varepsilon\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}L(y)=x$, где $x=x(1)$. Используя предложение 3.2, получаем, что координаты решения задачи (4.4) удовлетворяют соотношениям $x_i(s)=s\sum\limits_{i=h_{\mathbf{k-1}}+1}^{h_{\mathbf{k}}}y_ib_{k,i}(g)$. Поэтому $L(y)=\widehat{B}(g)y=x$. Предложение 4.1 доказано.

Предложение 4.2. *Пусть $\widehat{T}$, $\widehat{T}_B$ — матрицы из вектор-столбцов $\widehat{X}_i$, $\widehat{X}_i^A$, $i=1,\dots,N$, соответственно. Тогда $\widehat{T}=(\theta_g)_*\widehat{B}(g)\big(\theta_g^B\big)_*^{-1}(\widehat{T}_B\widehat{B}^{-1}(g))$ на $O\cap O^B$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицы A, B из (2.3), (2.4). Расписывая поэлементно тождество $AB=E$, несложно заметить, что

$$\begin{pmatrix}A_{1,1}&0&\dots&0\\0&A_{2,2}&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\\\dots\dots\dots&&&A_{C_U,C_U}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{1,1}&0&\dots&0\\0&B_{2,2}&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\\\dots\dots\dots&&&B_{C_U,C_U}\end{pmatrix}$$
$$=\widehat{A}\widehat{B}=E\Rightarrow\widehat{A}=\widehat{B}^{-1}.$$

Из леммы 3.1 следует, что $(\Delta_{\varepsilon^{-1}})_*X_j^\varepsilon\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}\widehat{X}_j$. Учитывая (2.5), имеем

$$(\Delta_{\varepsilon^{-1}})_*X_j^\varepsilon=\big(\Delta_{\varepsilon^{-1}}\circ\Delta^B_\varepsilon\circ\Delta^B_{\varepsilon^{-1}}\big)_*\left(\varepsilon^{\deg X_j}\sum_{k=1}^{h_{\mathbf{j}}}a_{k,j}X_k^B\right)$$
$$=\big(\Delta_{\varepsilon^{-1}}\circ\Delta^B_\varepsilon\big)_*\left(\big(\Delta^B_{\varepsilon^{-1}}\big)_*\varepsilon^{\deg X_j}\sum_{k=1}^{h_{\mathbf{j}}}a_{k,j}X_k^B\right)=A_\varepsilon B_\varepsilon. \tag{4.5}$$

Используя предложения 3.1, 4.1, лемму 3.1 и следствие 3.1, получаем, что

$$B_\varepsilon\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}\sum_{k=h_{\mathbf{j}-1}+1}^{h_{\mathbf{j}}}a_{k,j}(g)\widehat{X}_k^A,\quad A_\varepsilon\xrightarrow[\varepsilon\to0]{}(\theta_g\circ\widehat{B}(g)\circ(\theta_g^B)^{-1})_*.$$

Предложение 4.2 доказано.

Следствие 4.1. *Отображение $\theta_g\circ\widehat{B}\circ(\theta_g^B)^{-1}$ осуществляет локальный изоморфизм пространств $\big(\mathscr{O}_g\cap\mathscr{O}_g^B,d_c^{g,B}\big)$, $\big(\mathscr{O}_g\cap\mathscr{O}_g^B,d_c^g\big)$.*

Предложение 4.3. *Предположим, что матрица $\big(\theta_g^{-1}\circ\theta_g^B\big)_*$ имеет вид*

$$\begin{pmatrix}D_{1,1}&0&\dots&0\\0&D_{2,2}&\dots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\\\dots\dots\dots&&&D_{C_U,C_U}\end{pmatrix}=D,$$

где $D_{i,i}$ — диагональные блоки размером $(h_i - h_{i-1}) \times (h_i - h_{i-1})$. Тогда отображение $\mathrm{Id} : \left(\mathscr{O}_g \cap \mathscr{O}_g^B, d_c^g\right) \to \left(\mathscr{O}_g \cap \mathscr{O}_g^B, d_c^{g,B}\right)$ *билипшицево.*

Доказательство. Рассмотрим в нашем случае выражение A_ε из (4.5). Поскольку матрицы $\delta_{\varepsilon^{-1}}$, δ_ε имеют соответствующий диагональный вид, получаем

$$A_\varepsilon = \left(\Delta_{\varepsilon^{-1}} \circ \Delta_\varepsilon^B\right)_* = (\theta_g)_*(\delta_{\varepsilon^{-1}})_*(\theta_g)_*^{-1}\left(\theta_g^B\right)_*(\delta_\varepsilon)_*\left(\theta_g^B\right)_*^{-1}$$
$$= (\theta_g)_*(\delta_{\varepsilon^{-1}})_* D(\delta_\varepsilon)_*\left(\theta_g^B\right)_*^{-1} = (\theta_g)_* D\left(\theta_g^B\right)_*^{-1} = (\theta_g)_*\left(\theta_g^{-1} \circ \theta_g^B\right)_*\left(\theta_g^B\right)_*^{-1} = E.$$

Таким образом,

$$A_\varepsilon B_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \sum_{k=h_{\mathbf{j}-1}+1}^{h_{\mathbf{j}}} a_{k,j}(g)\widehat{X}_k^A.$$

Так как $(\Delta_{\varepsilon^{-1}})_* X_j^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \widehat{X}_j$, то $\widehat{X}_j = \sum\limits_{k=h_{\mathbf{j}-1}+1}^{h_{\mathbf{j}}} a_{k,j}(g)\widehat{X}_k^A$. Тогда предложение 4.3 вытекает из следствия 2.2.

Следствие 4.2. *Пусть для матрицы B из* (2.2) *выполняются условия: $B_{i,i} = \mathrm{const}$ для $i = 1, \dots, N$, $B_{i,j} = 0$ для $i \neq j$. Тогда отображение* $\mathrm{Id} : \left(\mathscr{O}_g \cap \mathscr{O}_g^B, d_c^g\right) \to \left(\mathscr{O}_g \cap \mathscr{O}_g^B, d_c^{g,B}\right)$ *билипшицево.*

Доказательство. Используя (2.2), получаем

$$\theta_g^{-1} \circ \theta_g^B : (y_1, \dots, y_N) \mapsto (x_1, \dots, x_N), \quad x_k = \sum_{j=h_{\mathbf{k}-1}+1}^{\dim h_{\mathbf{k}}} y_j b_{k,j},$$

поэтому $\left(\theta_g^{-1} \circ \theta_g^B\right)_* = \frac{\partial(x_1,\dots,x_N)}{\partial(y_1,\dots,y_N)} = B$. Следствие 4.2 вытекает из предложения 4.3.

С использованием доказательства теоремы о *cc*-дифференцируемости липшицевых отображений [18, 32] в работе [32] доказывается (в других обозначениях), что существует $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Delta_{\varepsilon^{-1}} \circ \Delta_\varepsilon^B$ и предельное отображение осуществляет изоморфизм соответствующих касательных конусов. При этом сам предел $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Delta_{\varepsilon^{-1}} \circ \Delta_\varepsilon^B$ в [32] не вычисляется.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mitchell J.* On Carnot–Carathéodory metrics // J. Differential Geometry. 1985. V. 21. P. 35–45.
2. *Petersen V. P.* Gromov–Hausdorff convergence in metric space // Differential geometry: Riemannian geometry. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993. P. 489–504. (Proc. Sympos. Pure Mathematics; V. 54, Pt. 3).
3. *Gromov M.* Carnot–Caratheodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323.
4. *Belläiche A.* The tangent space in sub-Riemannian geometry // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 1–78.
5. *Vodop'yanov S. K.* Sobolev classes and quasiconformal mappings on Carnot–Caratheodory spaces // Geometry, Topology and Physics: Proc. First Brazil–USA Workshop held in Campinas, Brazil, June 30–July 7, 1996. Berlin; New York: Walter de Gruyter & Co, 1997. P. 301–316.
6. *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.
7. *Montgomery R.* A tour of subriemannian geometries, their geodesics and applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002.

8. *Capogna L., Garofalo N.* Boundary behavior of nonnegative solutions of subelliptic equations in NTA domains for Carnot–Carathéodory metrics // J. Fourier Anal. Appl. 1998. V. 4, N 4. P. 403–432.

9. *Nagel A., Stein E. M., Wainger S.* Balls and metrics defined by vector fields. I: Basic properties // Acta Math. 1985. V. 155. P. 103–147.

10. *Stein E. M.* Some geometrical concepts arising in harmonic analysis // Geom. Funct. Anal. 2000. Special Volume. P. 434–453.

11. *Gromov M.* Groups of polynomial growth and expanding maps // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1981. V. 53. P. 53–73.

12. *Gromov M.* Structures métriques pour les variétés riemanniennes. Paris: CEDIC, 1981.

13. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un // Ann. Math. (2). 1989. V. 129, N 1. P. 1–60.

14. *Koranyi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111. P. 1–87.

15. *Vodop'yanov S. K.* $\mathscr{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Труды по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН. 2000. С. 603–670.

16. *Margulis G. A., Mostow G. D.* The differential of a quasi-conformal mapping of a Carnot–Carathéodory space // Geom. Funct. Anal. 1995. V. 5, N 2. P. 402–433.

17. *Margulis G. A., Mostow G. D.* Some remarks on the defenition of tangent cones in a Carnot–Carathéodory space // J. Anal. Math. 2000. V. 80. P. 299–317.

18. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* О дифференцируемости отображений пространств Карно — Каратеодори // Докл. РАН. 2003. Т. 389, № 5. С. 592–596.

19. *Metivier G.* Fonction spectrale et valeurs proposes d'une classe d'operateurs // Comm. Partial Differential Equations. 1976. V. 1. P. 479–519.

20. *Folland G. B., Stein I. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. Princeton: Princeton Univ. Press, 1982. (Math. Notes; 28).

21. *Берестовский В. Н.* Однородные пространства с внутренней метрикой. Дис. … докт. физ.-мат. наук. Новосибирск: Институт математики им. С. Л. Соболева. 1988.

22. *Rothchild L. P., Stein E. S.* Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups // Acta Math. 1976. V. 137. P. 247–320.

23. *Постников М. М.* Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1988.

24. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.

25. *Дынкин Е. Б.* Нормированные алгебры Ли и аналитические группы // Успехи мат. наук. 1950. Т. 5, № 1. С. 135–186.

26. *Постников М. М.* Группы и алгебры Ли. М.: Наука, 1982.

27. *Hörmander L.* Hypoelliptic second order differential equations // Acta Math. 1967. V. 119. P. 147–171.

28. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматгиз, 1961.

29. *Stein E. M.* Harmonic analysis: Real-variables methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.

30. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. М.: Наука, 1984.

31. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.

32. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* Дифференцируемость отображений в геометрии пространств Карно — Каратеодори // В печати.

Статья поступила 17 декабря 2004 г.,
окончательный вариант — 27 сентября 2005 г.

Грешнов Александр Валерьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`greshnov@math.nsc.ru`