Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2006. Том 47, № 2

УДК 517.51

СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ И p–ФЛУКТУАЦИОННЫЙ МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ

С. С. Волосивец

Аннотация: Получены достаточные условия сходимости рядов из коэффициентов Фурье по мультипликативным системам для функций ограниченной p-флуктуации. В ряде случаев установлена их неулучшаемость.

Ключевые слова: функции ограниченной p-флуктуации, мультипликативные системы, абсолютная сходимость, неравенство типа А. В. Ефимова.

Введение

Пусть $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел таких, что $2 \le p_j \le N$ при всех $j \in \mathbb{N}$, а $\mathbb{Z}_j = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$. По определению полагаем $m_0 = 1$, $m_n = p_1 \dots p_n$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда каждое число $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \quad x_j \in \mathbb{Z}_j. \tag{1}$$

Это разложение определяется однозначно, если при $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, брать разложение с конечным числом ненулевых x_j. Если $y \in [0, 1)$ записано в виде

$$y = \sum_{j=1}^{\infty} y_j m_j^{-1}, \quad y_j \in \mathbb{Z}_j, \tag{1$'$}$$

то по определению $x \oplus y = z = \sum\limits_{j=1}^{\infty} z_j m_j^{-1}, z_j \in \mathbb{Z}_j$, где $z_j = x_j + y_j (\operatorname{mod} p_j)$. Аналогично определяется $x \ominus y$.

Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ однозначно представимо в виде

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}, \quad k_j \in \mathbb{Z}_j. \tag{2}$$

Для чисел x вида (1) и k вида (2) по определению положим

$$\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k_j / p_j\right)\right).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00390) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ–1295.2003.1).

Таким образом, получается полная в $L[0,1)$, ортонормированная на $[0,1)$ система функций (см. [1, гл. 1, § 1.5]). Коэффициенты Фурье по этой системе функции $f \in L[0,1)$ задаются формулой $\hat{f}(n) = \int\limits_0^1 f(t)\overline{\chi_n(t)}\,dt$.

Пусть теперь $1 < p < \infty$ и $f(x)$ принадлежит пространству ограниченных на $[0,1)$ функций $B[0,1)$ с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[0,1)} |f(x)|$. Через $\operatorname{osc}(f,[a,b))$ обозначим $\sup\limits_{x,y\in[a,b)} |f(x)-f(y)|$, а через $I_j^{(n)}$ — полуинтервал $[(j-1)/m_n, j/m_n)$, $1 \le j \le m_n$. Введем p-флуктуационные суммы $\kappa_p(f,0) = \operatorname{osc}(f,[0,1))$ и

$$\kappa_p(f,n) = \left(\sum_{j=1}^{m_n} \bigl(\operatorname{osc}\bigl(f, I_j^{(n)}\bigr)\bigr)^p\right)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

По определению $V_p(f)_n = \sup\limits_{k\ge n} \kappa_p(f,k)$. Множество функций $f \in B[0,1)$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} V_p(f)_n = 0$, обозначается через $MC_p[0,1)$ и является банаховым пространством относительно нормы $\|f\|_p = \max(V_p(f)_0, \|f\|_\infty)$ (см. [2]). Величина $V_p(f)_0$, называемая *p-флуктуацией функции* f, была введена и использовалась при изучении равномерной сходимости рядов Фурье по системе $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$ Оневиром и Ватерманом [3]. Через $MC[0,1)$ обозначим пространство функций f из $B[0,1)$, для которых $\lim\limits_{h\to 0} \|f(x\oplus h) - f(x)\|_\infty = 0$. Нормой в этом пространстве является равномерная норма $\|f\|_\infty$. Пространства $L_p[0,1)$, $1 < p < \infty$, вводятся, как обычно, с помощью нормы

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int\limits_0^1 |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}.$$

Пусть

$$W_n = \{f \in L[0,1) : \hat{f}(k) = 0, k \ge n\}, \quad E_n(f)_p = \inf\{\|f - p_n\|_p : p_n \in W_n\}.$$

Аналогично вводятся наилучшие приближения $E_n(f)$ в $MC[0,1)$ и $E_n(f)_{L_p}$ в $L_p[0,1)$, $1 \le p < \infty$. Если $X = L_p[0,1)$, $1 \le p < \infty$, или $X = MC[0,1)$, то

$$\omega_n(f)_X = \sup_{0<h<1/m_n} \|f(x+h) - f(x)\|_X.$$

Для $X = MC[0,1)$ вместо $\omega_n(f)_{MC}$ будем писать $\omega_n(f)$.

Для таких модулей непрерывности имеет место неравенство А. В. Ефимова (см. [1, гл. 10, § 10.5, теорема 10.5.1])

$$\omega_n(f)_X \le E_{m_n}(f)_X \le 2\omega_n(f)_X. \tag{3}$$

Его аналогом является установленное в [2] неравенство ($f \in MC_p[0,1)$, $1 < p < \infty$)

$$V_p(f)_n \le E_{m_n}(f)_p \le 2V_p(f)_n. \tag{3'}$$

Данная работа состоит из четырех пунктов. В п. 1 приводятся необходимые для дальнейшего леммы, в основном хорошо известные. В п. 2 исследованы связи между $E_n(f)_p$ и $E_n(f)_{L_p}$. Основным результатом здесь является теорема 2.

Тригонометрический аналог этих результатов можно найти в работе А. П. Терехина [4], не содержащей доказательств. В п. 3 изучается сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}|\hat{f}(n)|^{\beta}. \qquad (4)$$

Как известно, классические теоремы С. Н. Бернштейна и С. Б. Стечкина об абсолютной сходимости тригонометрического ряда Фурье были перенесены на случай систем $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ Н. Я. Виленкиным и А. И. Рубинштейном (см. [5, гл. 4, § 2, теоремы 4.8, 4.9]). Следует отметить, что для ряда Фурье по системе $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ абсолютная сходимость равносильна сходимости ряда (4) при $\alpha = 0$, $\beta = 1$ (см. [6]). Объединим формулировки этих аналогов в одну теорему.

Теорема А. *Если сходится ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} E_n(f)_{L_2} n^{-1/2}$ *или ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} m_k^{1/2}\omega_k(f)$, *то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n)\chi_n(x)$ *сходится абсолютно на* $[0,1)$.

Так как $E_n(f)_{L_2} \le E_n(f)_{L_p} \le E_n(f)_{\infty}$ при $2 \le p < \infty$, в формулировке теоремы А можно заменить $E_n(f)_{L_2}$ на $E_n(f)_{L_p}$, $2 < p < \infty$, или $E_n(f)_{\infty}$.

Вопрос о неулучшаемости этих теорем в общем случае Н. Я. Виленкиным и А. И. Рубинштейном не обсуждался. Оневиром [7] были построены аналоги полиномов Рудина — Шапиро для случая $p_n = q$ и с их помощью построена функция класса Lip(1/2), ряд Фурье которой по системе $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ не сходится абсолютно. Аналогичные примеры построены в [7] для ряда (4) при $\alpha = 0$. Другой подход к построению таких примеров для произвольной полной ортонормированной системы принадлежит С. В. Бочкареву [8]. В этой статье с помощью аналога одного результата С. Н. Бернштейна [9, гл. 6, § 4, теорема 4.2] доказывается неулучшаемость теоремы А и указывается на возможность доказательства неулучшаемости некоторых ее обобщений. Кроме того, даются условия сходимости ряда (4) в терминах $E_n(f)_p$ или $V_p(f)_n$ и показывается их неулучшаемость в следующих случаях: а) при $1 < p \le 2$ без существенных ограничений; б) при $p \ge 2$, если $\alpha = 0$, $1 \le \beta \le 2$ или $p_n = q$. Аналогичные результаты в тригонометрическом случае были получены в [10], где еще более активную роль, чем здесь, играло неравенство А. П. Терехина для тригонометрических полиномов (см. [4, 11]), аналогом которого является лемма 8, используемая также в п. 2 работы. В п. 4 доказывается аналог неравенства (3′) для систем Гата [12] и обсуждается возможность переноса на эти системы результатов п. 3.

1. Вспомогательные утверждения

Лемма 1 (см. [1, гл. 1, § 1.5]). *Пусть* $D_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \chi_k(x)$. *Тогда*

$$D_{m_n}(x) = m_n X_{[0,1/m_n)}(x), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где X_E *— характеристическая функция множества* E.

Лемма 2 (см. [1, гл. 1, § 1.5]). *Пусть* $f \in W_{m_n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда* $f(x)$ *постоянна на всех* $I_k^{(n)}$, $k = 1, \dots, m_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. *Обратно, если* $f(x)$ *постоянна на всех* $I_k^{(n)}$, $k = 1, \dots, m_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *то* $f \in W_{m_n}$.

Лемма 3 [2]. *Пусть $f \in MC_p[0,1)$, $1 < p < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда имеют место оценки*

$$\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} |\hat{f}(k)|^2 \le C\kappa_p^2(f,n)m_n^{-1}, \quad 1 < p \le 2;$$

$$\sum_{k=m_n}^{m_{n+1}-1} |\hat{f}(k)|^2 \le CV_p^2(f)_n m_{n+1}^{-2/p}, \quad 2 < p.$$

Лемма 4 [5, гл. 4, § 9, лемма 2]. *Пусть $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ — убывающая к нулю последовательность, а последовательность $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ со свойством $\mu_k > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ такова, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k \le C\mu_n$ и $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \mu_k^{-1} \le C\mu_n^{-1}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда при любом $r > 0$ ряды*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (b_n - b_{n+1})^r \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n b_n^r$$

сходятся или расходятся одновременно.

Легко видеть, что последовательность $\mu_k = m_k^{\alpha}$, $\alpha > 0$, удовлетворяет условиям леммы 4.

Лемма 5 [7]. *Пусть $p_n = q$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ существует $Q_n \in W_{q^n}$ такой, что*

1) *$|\widehat{Q}_n(k)| = 1$ при всех $0 \le k < q^n$;*
2) *$\|Q_n\|_{\infty} \le q^{(n+1)/2}$;*
3) *$\widehat{Q}_n(k) = \widehat{Q}_{n+1}(k)$ при всех $0 \le k < q^n$.*

Лемма 6 [13]. *Пусть $F_n(x) = (D_1(x) + D_2(x) + \dots + D_n(x))/n$. Тогда нормы $\|F_n\|_{L_1}$ ограничены.*

Следующий классический результат носит название неравенства Хинчина (см. [9, гл. 5, § 8, теорема 8.4]).

Лемма 7. *Пусть $\phi_k(x) = \operatorname{sign}\sin 2^{k+1}\pi x$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 < \infty$. Тогда сумма $f(x)$ ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\phi_k(x)$ принадлежит пространству $L_r[0,1]$ для всех $r \ge 1$, при этом*

$$A_r \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2\right)^{1/2} \le \|f\|_{L_r} \le B_r \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2\right)^{1/2}.$$

Здесь A_r, B_r зависят только от r.

2. Связь между наилучшими приближениями в $MC_p[0,1)$ и $L_p[0,1)$, $1 < p < \infty$

Лемма 8. *Пусть $t_n \in W_n$, $n \in \mathbb{N}$, $1 \le p < \infty$. Тогда существует константа $C(p) > 0$, не зависящая от n и t_n, такая, что*

$$\|t_n\|_p \le C(p)n^{1/p}\|t_n\|_{L_p}.$$

Доказательство. Если $n \in [m_k, m_{k+1})$, то согласно лемме 2 t_n есть ступенчатая функция, постоянная на всех $I_j^{(k+1)}$, $1 \le j \le m_{k+1}$. Поэтому при вычислении $V_p^p(t_n)_0$ мы рассматриваем суммы, состоящие из не более чем $m_{k+1} \le$

Nn слагаемых, каждое из которых имеет вид $|a_j - a_i|^p$, где a_j — значение t_n на $I_j^{(k+1)}$. Каждое a_j появляется не более чем в одном таком слагаемом, и $|a_j - a_i|^p \le 2^{p-1}(|a_j|^p + |a_i|^p)$. Значит,

$$V_p^p(t_n)_0 \le 2^{p-1} \sum_{j=1}^{m_{k+1}} |a_j|^p = 2^{p-1} m_{k+1} \sum_{j=1}^{m_{k+1}} |a_j|^p m_{k+1}^{-1}$$
$$= 2^{p-1} m_{k+1} \|t_n\|_{L_p}^p \le 2^{p-1} Nn \|t_n\|_{L_p}^p.$$

Аналогичная оценка для $\|t_n\|_\infty$ — частный случай неравенства типа С. М. Никольского (см. [5, гл. 4, § 9, лемма 1]) для системы $\{\chi_n\}_{n=0}^\infty$. Лемма доказана.

Замечание 1. Как и в тригонометрическом случае, имеют место неравенства $\|t_n\|_p \le Cn^{1/p}\|t_n\|_\infty$ и $\|t_n\|_\infty \le Cn^{1/p}\|t_n\|_{L_p}$. Первое, очевидно, является точным по порядку, достаточно взять $t \in W_{m_{k+1}}$, равный 1 на $I_j^{(k+1)}$, $j = lp_{k+1} + 1$, $0 \le l < m_k$, и нулю на остальных $I_j^{(k+1)}$. Тогда $V_p(t)_0 = m_k^{1/p}$, а $\|t\|_\infty = 1$. Второе неравенство также точное по порядку. Возьмем $t_{m_n} = D_{m_n}$. Тогда по лемме 1 имеем $\|D_{m_n}\|_\infty = m_n$ и $\|D_{m_n}\|_{L_p} = m_n^{1-1/p}$. Тем не менее имеет место неравенство леммы 8 вместо неравенства $\|t_n\|_p \le Cn^{2/p}\|t_n\|_{L_p}$, которое следует из двух приведенных здесь неравенств.

Лемма 9. *Пусть $f \in MC_p[0,1)$, $1 < p < \infty$. Тогда*

$$\omega_n(f)_{L_p} \le m_n^{-1/p} V_p(f)_n.$$

Доказательство. По определению получаем

$$\omega_n(f)_{L_p} = \sup_{0<h<1/m_n} \left(\int_0^1 |f(x \oplus h) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}$$
$$= \sup_{0<h<1/m_n} \left(\sum_{j=1}^{m_n} \int_{I_j^{(n)}} |f(x \oplus h) - f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^{m_n} m_n^{-1} \operatorname{osc}^p\big(f, I_j^{(n)}\big) \right)^{1/p}$$
$$\le m_n^{-1/p} \kappa_p(f,n) \le m_n^{-1/p} V_p(f)_n.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть $f \in MC_p[0,1)$, $1 < p < \infty$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство*

$$E_n(f)_{L_p} \le 2N^{1/p} n^{-1/p} E_n(f)_p.$$

Доказательство. Пусть $t_n \in W_n$ таков, что $\|f - t_n\|_p = E_n(f)_p$, и пусть $n \in [m_k, m_{k+1})$. Тогда по лемме 9 и неравенству (3) находим, что

$$E_n(f)_{L_p} = E_n(f - t_n)_{L_p} \le E_{m_k}(f - t_n)_{L_p} \le 2\omega_k(f - t_n)_{L_p} \le 2m_k^{-1/p} V_p(f - t_n)_k$$
$$\le 2m_k^{-1/p} \|f - t_n\|_p \le 2N^{1/p} m_{k+1}^{-1/p} E_n(f)_p \le 2N^{1/p} n^{-1/p} E_n(f)_p.$$

Следствие доказано.

Теорема 1. *Пусть $f \in L_p[0,1)$ и сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1/p-1} E_n(f)_{L_p}. \tag{5}$$

Тогда $f(x)$ эквивалентна ($f(x) = f_0(x)$ п. в.) функции $f_0 \in MC_p[0,1)$, при этом для любого $r \in \mathbb{N}$ верно неравенство

$$E_n(f_0)_p \le C(p) \left(r^{1/p} E_n(f)_{L_p} + \sum_{\nu=r+1}^{\infty} \nu^{1/p-1} E_\nu(f)_{L_p} \right).$$

Доказательство. Пусть $t_n \in W_n$ таков, что $\|f - t_n\|_{L_p} = E_n(f)_{L_p}$. Используя лемму 8, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|t_{m_k} - t_{m_{k-1}}\|_p \le \sum_{k=1}^{\infty} C_1 m_k^{1/p} \|t_{m_k} - t_{m_{k-1}}\|_{L_p} \le 2C_1 \sum_{k=1}^{\infty} m_k^{1/p} E_{m_{k-1}}(f)_{L_p}.$$

Сходимость последнего ряда равносильна сходимости ряда (5). Значит, в силу полноты $MC_p[0,1)$ последовательность

$$t_{m_k} = t_1 + \sum_{i=1}^{k} (t_{m_i} - t_{m_{i-1}})$$

сходится в $MC_p[0,1)$ к $f_0 \in MC_p[0,1)$, и так как t_{m_k} сходится к f в $L_p[0,1)$, то $f(x) = f_0(x)$ п. в., при этом по лемме 8

$$\|f_0\|_p \le \|t_1\|_p + \sum_{k=1}^{\infty} \|t_{m_k} - t_{m_{k-1}}\|_p$$
$$\le (2C_1 + 1) \sum_{k=1}^{\infty} m_k^{1/p} E_{m_{k-1}}(f)_{L_p} \le C_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{1/p-1} E_\nu(f)_{L_p}.$$

Подставим в последнее неравенство $f_0 - t_n$ вместо f_0:

$$\|f_0 - t_n\|_p \le C_2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{1/p-1} E_\nu(f - t_n)_{L_p}. \tag{6}$$

При $\nu \le r$ имеем $E_\nu(f - t_n)_{L_p} \le \|f - t_n\|_{L_p} = E_n(f)_{L_p}$, а при $\nu > r$ будет $E_\nu(f - t_n)_{L_p} \le E_\nu(f)_{L_p}$. При $\nu \ge n$ это очевидно, а при $\nu < n$ получаем

$$E_\nu(f - t_n)_{L_p} \le \|f - t_n\|_{L_p} = E_n(f)_{L_p} \le E_\nu(f)_{L_p}.$$

Подставляя эти оценки в (6), разбивая сумму из (6) на две: от 1 до r и от $r+1$ до ∞, используя неравенство $\sum\limits_{\nu=1}^{r} \nu^{1/p-1} \le C_3 r^{1/p}$, приходим к неравенству теоремы.

Теорема 2. *Пусть $\{E'_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая к нулю последовательность такая, что выполнено условие*

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{-1} E'_\nu = O(E'_n). \tag{B}$$

Тогда соотношение $E_n(f)_{L_p} = O\big(n^{-1/p}E'_n\big)$ *равносильно тому, что* f *эквивалентна* $f_0 \in MC_p[0,1)$, *при этом* $E_n(f_0)_p = O\big(E'_n\big)$.

Доказательство. Если $E_n(f)_{L_p} = O\big(n^{-1/p}E'_n\big)$, то в силу условия (B) ряд (5) сходится, так что по теореме 1 f эквивалентна $f_0 \in MC_p[0,1)$ и при этом

$$E_n(f_0)_p \le C(p)\left(n^{1/p}n^{-1/p}E'_n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{1/p-1}\nu^{-1/p}E'_\nu\right) = O\big(E'_n\big).$$

Обратное утверждение вытекает из следствия 1. Теорема доказана.

Приведем теперь аналогичное утверждение для оценок наилучших приближений снизу.

Теорема 3. *Пусть* $\{E'_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *убывающая к нулю последовательность,* $f \in MC_p[0,1)$, $1 < p < \infty$, *и выполнено условие*

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{1/p-1}E_\nu(f)_{L_p}) = O(n^{1/p}E_n(f)_{L_p}). \tag{$B_{1/p}$}$$

Тогда $E'_n = O(E_n(f)_p)$ *равносильно тому, что* $E'_n = O(n^{1/p}E_n(f)_{L_p})$.

Доказательство. Если $E_n(f)_{L_p} \ge C_1 n^{-1/p}E'_n$, то по следствию 1

$$E_n(f)_p \ge (2N^{1/p})^{-1}n^{1/p}E_n(f)_{L_p} \ge C_2E'_n.$$

Пусть теперь $E_n(f)_p \ge C_3E'_n$. Тогда по теореме 1 при $r = n$ и условию $(B_{1/p})$ имеем

$$C_3E'_n \le E_n(f)_p \le C_4\left(n^{1/p}E_n(f)_{L_p} + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \nu^{1/p-1}E_\nu(f)_{L_p}\right) \le C_5n^{1/p}E_n(f)_{L_p}.$$

Теорема доказана.

3. Сходимость рядов из коэффициентов Фурье по мультипликативным системам

Начнем с достаточных условий сходимости ряда (4).

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in MC_p[0,1)$, $0 < \beta \le 2$, $s = \max(p,2)$, $\alpha - \beta/2 - \beta/s > -1$. *Тогда из сходимости любого из рядов*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\beta/2-\beta/s}E_n^{\beta}(f)_p, \tag{7}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} m_n^{\alpha-\beta/2-\beta/s+1}V_p^{\beta}(f)_n \tag{8}$$

следует сходимость ряда (4).

Доказательство. Сходимость рядов (7) и (8) равносильна в силу (3′) и леммы 6 из [2]. При $p > 2$ аналогично [2] применяем неравенство Гёльдера с показателями $2/\beta$ и $q = 2/(2-\beta)$ (при $\beta = 2$ показатели 1 и ∞), а также лемму 3:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}|\hat{f}(n)|^{\beta} \le \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=m_k}^{m_{k+1}-1} n^{\alpha q}\right)^{1/q}\left(\sum_{n=m_k}^{m_{k+1}-1}|\hat{f}(n)|^{\beta 2/\beta}\right)^{\beta/2}$$
$$\le C_1\sum_{k=0}^{\infty} m_{k+1}^{\alpha+1/q}V_p^{\beta}(f)_k m_{k+1}^{(-2/p)\beta/2} \le C_2(N)\sum_{k=0}^{\infty} m_k^{\alpha-\beta/2-\beta/p+1}V_p^{\beta}(f)_k.$$

Аналогично при $1 < p \le 2$ в силу неравенства Гёльдера и леммы 3 имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}|\hat{f}(n)|^{\beta} \le C_3\sum_{k=0}^{\infty} m_{k+1}^{\alpha+1/q}V_p^{\beta}(f)_k m_k^{-\beta/2} \le C_4(N)\sum_{k=0}^{\infty} m_k^{\alpha-\beta+1}V_p^{\beta}(f)_k.$$

Таким образом, из сходимости ряда (8) следует сходимость ряда (4). Теорема доказана.

Получим одно следствие из теоремы 4, касающееся абсолютной суммируемости ряда (4). Напомним, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ называется $|C,\alpha|$-*суммируемым*, $\alpha > -1$, если

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sigma_{n+1}^{\alpha} - \sigma_n^{\alpha}\right| < \infty,$$

где

$$\sigma_n^{\alpha} = \sum_{\nu=0}^{n}\left(A_n^{\alpha}\right)^{-1}A_{n-\nu}^{\alpha}u_{\nu}, \quad A_n^{\alpha} = (\alpha+1)\dots(\alpha+n)/n!, \quad A_0^{\alpha} = 1.$$

Лемма 10 [14]. *Если ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(A_n^{\alpha}\right)^{-1}u_n$ *суммируем методом* $|C,-\alpha|$ *при* $0 < \alpha < 1$.

Следствие 2. *Пусть* $f \in MC_p[0,1)$, $1 < p < \infty$, $s = \max(p,2)$, $\alpha - \beta/2 - \beta/s + \gamma > -1$, $0 < \beta \le 2$, $0 < \gamma < 1$. *Тогда из сходимости ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\beta/2-\beta/s+\gamma}E_n^{\beta}(f)_p$$

следует $|C,-\gamma|$*-суммируемость ряда* (4). *В частности, из сходимости ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\delta}E_n^{\beta}(f)_p$$

при $1 < p \le 2$, $\delta > -1$, $1 > \delta+\beta > 0$ *следует* $|C,-\delta-\beta|$*-суммируемость ряда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\hat{f}(n)|^{\beta}$.

Доказательство. Как известно [9, гл. 3, § 1], при $\gamma > -1$ верно соотношение $C_1 n^{\gamma} \le A_n^{\gamma} \le C_2 n^{\gamma}$. По теореме 4 из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\beta/2-\beta/s+\gamma}E_n^{\beta}(f)_p$$

следует сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha+\gamma}|\hat{f}(n)|^{\beta}$, что равносильно сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n^{\gamma} n^{\alpha}|\hat{f}(n)|^{\beta}$. Отсюда по лемме 10 получаем $|C,-\gamma|$-суммируемость ряда (4). При $\alpha=0$, $s=2$ и $\delta+\beta=\gamma$ выводим второе утверждение следствия.

Теперь докажем лемму, являющуюся аналогом результата С. Н. Бернштейна (см. [9, гл. 6, § 4, теорема 4.2]).

Лемма 11. *Пусть $n\in\mathbb{N}$. Тогда существует*

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1} a_k\chi_k(x),$$

для которого выполнены следующие условия:

1) $\|P_n\|_\infty\le n^{1/2}$;

2) *для всех $r\in[1,2]$ справедлива оценка*

$$\Gamma(P_n,r):=\left(\sum_{k=0}^{n-1}|a_k|^r\right)^{1/r}\ge Bn^{1/r},$$

где B не зависит от n.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$g_t(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\phi_k(t)\chi_k(x),$$

где $\phi_k(t)$ — функции Радемахера из леммы 7. Согласно лемме 7 находим, что

$$\int_0^1\int_0^1 |g_t(x)|\,dx\,dt=\int_0^1\int_0^1 |g_t(x)|\,dt\,dx\ge A_1\int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n-1}|\chi_k(x)|^2\right)^{1/2}dx=A_1n^{1/2}.$$

Отсюда следует существование $t_0\in[0,1]$ со свойством

$$\int_0^1 |g_{t_0}(x)|\,dx\ge A_1n^{1/2}.$$

Пусть теперь

$$f(x)=\operatorname{sign}\ g_{t_0}(x),\quad s_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\hat{f}(k)\chi_k(x),\quad \sigma_n(f)=(s_1(f)+\ldots+s_n(f))/n$$

и

$$\tau_n(f)(x)=2\sigma_{2n}(f)(x)-\sigma_n(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\hat{f}(k)\chi_k(x)+\sum_{k=n+1}^{2n-1}(2-(k+1)/n)\hat{f}(k)\chi_k(x).$$

Согласно известному неравенству для сверток и лемме 6 имеем

$$\|\sigma_\nu(f)\|_\infty\le\|F_\nu\|_{L_1}\|f\|_\infty\le K\|f\|_\infty=K$$

для всех $\nu\in\mathbb{N}$, откуда $\|\tau_n\|_\infty\le 3K$. Ясно, что

$$\Gamma(\tau_n,1)\ge\sum_{k=0}^{n}|\hat{f}(k)|\ge\left|\sum_{k=0}^{n-1}\hat{f}(k)\phi_k(t_0)\right|=\left|\int_0^1 g_{t_0}(x)\tau_n(x)\,dx\right|,$$

так как $g_{t_0} \in W_n$. Поскольку $s_{n+1}(f) = s_{n+1}(\tau_n(f))$, последнее выражение равно

$$\left|\int_0^1 g_{t_0}(x)s_{n+1}(f)(x)\,dx\right| = \left|\int_0^1 g_{t_0}(x)f(x)\,dx\right| = \int_0^1 |g_{t_0}(x)|\,dx \geq A_1 n^{1/2}.$$

Пусть $P_{2n} = P_{2n+1} = n^{1/2}\tau_n/3K$ при $n \in \mathbb{N}$ и $P_1 = 1$. Тогда $P_{2n}, P_{2n+1} \in W_{2n}$, $\|P_{2n}\|_\infty, \|P_{2n+1}\|_\infty \leq n^{1/2}$ и $\Gamma(P_{2n}, 1) \geq A_1 n/3K$, $\Gamma(P_{2n+1}, 1) \geq A_1 n/3K$, что дает нам $\Gamma(P_n, 1) \geq A_1 n/9K$. Наконец, из неравенства Гёльдера получаем $\Gamma(P_n, 1) \leq n^{1-1/r}\Gamma(P_n, r)$, что и завершает доказательство леммы.

Докажем теперь неулучшаемость теоремы A.

Теорема 5. *Пусть $\{E'_n\}_{n=1}^\infty$ — убывающая к нулю последовательность такая, что*

$$\sum_{n=1}^\infty n^{-1/2}E'_n = +\infty.$$

Тогда существует $f \in MC[0,1)$, для которой $E_n(f)_{L_2} \leq E_n(f) \leq E'_n$, $n \in \mathbb{N}$, и ряд $\sum_{k=0}^\infty |\hat{f}(k)|$ расходится.

Аналогично если $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ — убывающая к нулю последовательность со свойством

$$\sum_{n=1}^\infty m_n^{1/2}\alpha_n = +\infty,$$

то существует $f \in MC[0,1)$, для которой $\omega_n(f) \leq \alpha_n$, $n \in \mathbb{N}$, и ряд $\sum_{k=0}^\infty |\hat{f}(k)|$ расходится.

Доказательство. Пусть P_n, $n \in \mathbb{N}$, — многочлены, построенные в лемме 11. Рассмотрим ряд

$$f_0(t) = \sum_{k=1}^\infty m_k^{-1/2}\big(E'_{m_{k+1}} - E'_{m_{k+2}}\big)\chi_{m_k}(t)P_{m_k}(t).$$

Тогда носитель выражения $h_k = \chi_{m_k}P_{m_k}$ (множество $l \in \mathbb{Z}_+$ таких, что $\hat{h}_k(l) \neq 0$) содержится в $[m_k, m_{k+1})$ и при разных k эти носители не пересекаются. Сначала находим, что

$$E_{m_n}(f_0) \leq \sum_{k=n}^\infty m_k^{-1/2}\big(E'_{m_{k+1}} - E'_{m_{k+2}}\big)\|P_{m_k}(t)\|_\infty \leq \sum_{k=n}^\infty \big(E'_{m_{k+1}} - E'_{m_{k+2}}\big) \leq E'_{m_{n+1}},$$

откуда $E_n(f_0) \leq E'_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Так как носители h_k не пересекаются, то

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^\infty |\hat{f}_0(n)| &\geq \sum_{k=1}^\infty m_k^{-1/2}\big(E'_{m_{k+1}} - E'_{m_{k+2}}\big)\Gamma(P_{m_k}, 1)\\ &\geq BN^{-1/2}\sum_{k=1}^\infty m_{k+1}^{1/2}\big(E'_{m_{k+1}} - E'_{m_{k+2}}\big)\\ &= BN^{-1/2}\left(\sum_{k=2}^\infty m_k^{1/2}E'_{m_k} - \sum_{k=3}^\infty m_{k-1}^{+1/2}E'_{m_k}\right)\\ &\geq BN^{-1/2}(1-(1/2)^{1/2})\sum_{k=2}^\infty m_k^{1/2}E'_{m_k}.\end{aligned}$$

Последний ряд расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}E'_n(f)$, что и доказывает первое утверждение теоремы. Второе утверждение доказывается аналогично, если заменить E'_{m_k} на α_k и использовать неравенство (3). Теорема доказана.

Переходим к доказательству неулучшаемости условий теоремы 4. Начнем со случая $1 < p \le 2$.

Теорема 6. *Пусть $1 < p \le 2$, $0 < \beta \le 2$, $\alpha - \beta > -1$ и $\{E'_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая к нулю последовательность такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\beta}(E'_n)^{\beta} = \infty.$$

Тогда существует $f \in MC_p[0,1)$, для которой $E_n(f)_p \le E'_n$, $n \in \mathbb{N}$, при этом ряд (4) *расходится.*

Доказательство. Из леммы 1 легко следует, что $\|D_{m_n} - D_{m_{n-1}}\|_{L_p} \le 2m_n^{1-1/p}$, откуда по лемме 8 $\|D_{m_n} - D_{m_{n-1}}\|_p \le C_1 m_n$ (последний результат можно доказать и непосредственно). Рассмотрим функцию

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k^{-1}\bigl(E'_{m_k} - E'_{m_{k+1}}\bigr)(D_{m_k}(x) - D_{m_{k-1}}(x)).$$

Для нее имеем

$$E_{m_n}(f_1)_p \le \sum_{k=n+1}^{\infty} m_k^{-1}\bigl(E'_{m_k} - E'_{m_{k+1}}\bigr)\|D_{m_k}(x) - D_{m_{k-1}}(x)\|_p \le C_1 E'_{m_{n+1}}.$$

В частности, $f_1 \in MC_p[0,1)$. Поэтому при $i \in [m_n, m_{n+1})$ получаем $E_i(f_1)_p \le E_{m_n}(f_1)_p \le C_1 E'_{m_{n+1}} \le C_1 E'_i$. С другой стороны,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}|\hat{f}_1(n)|^{\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} m_k^{-\beta}\bigl(E'_{m_k} - E'_{m_{k+1}}\bigr)^{\beta} \sum_{n=m_{k-1}}^{m_k-1} n^{\alpha}$$
$$\ge C_2 \sum_{k=1}^{\infty} m_k^{\alpha-\beta+1}\bigl(E'_{m_k} - E'_{m_{k+1}}\bigr)^{\beta}.$$

По лемме 4 последний ряд расходится, так как расходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k^{\alpha-\beta+1}(E'_{m_k})^{\beta}.$$

Значит, f_1/C_1 удовлетворяет всем требованиям теоремы. Теорема доказана.

При $p > 2$ дадим две теоремы. В теореме 7 полностью решается вопрос о неулучшаемости условий теоремы 4, но при ограничении $p_n \equiv q$. В теореме 8 нет условий на последовательность p_n, кроме ее ограниченности, но зато требуются равенство $\alpha = 0$ и неравенство $1 \le \beta$.

Теорема 7. *Пусть $p_n = q$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $p > 2$, $0 < \beta \le 2$, $\alpha - \beta/2 - \beta/p > -1$ и $\{E'_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая к нулю последовательность такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-\beta/2-\beta/p}(E'_n)^{\beta} = \infty.$$

Тогда существует $f \in MC_p[0,1)$, для которой $E_n(f)_p \le E'_n$, $n \in \mathbb{N}$, при этом ряд (4) расходится.

Доказательство. Рассмотрим функцию ($Q_0 = 0$)

$$f_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} q^{-k(1/p+1/2)}\big(E'_{q^k} - E'_{q^{k+1}}\big)(Q_k(x) - Q_{k-1}(x)),$$

где $Q_k \in W_{q^k}$ построены согласно лемме 5. По лемме 8 и п. 2 леммы 5 получаем

$$\|Q_k - Q_{k-1}\|_p \le C_1 q^{k/p}\|Q_k - Q_{k-1}\|_{L_p} \le \mathrm{C}_1 q^{k/p}\|Q_k - Q_{k-1}\|_{\infty} \le 2q^{1/2}C_1 q^{k(1/2+1/p)}.$$

Поэтому аналогично доказательству предыдущей теоремы $E_{q^n}(f_2)_p \le C_2 E'_{q^{n+1}}$ и $E_i(f_2)_p \le C_2 E'_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Согласно пп. 1 и 3 леммы 5 оцениваем снизу сумму ряда (4):

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}|\hat f(n)|^{\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} q^{-k\beta(1/p+1/2)}\big(E'_{q^k} - E'_{q^{k+1}}\big)^{\beta} \sum_{n=q^{k-1}}^{q^k-1} n^{\alpha} \ge C_3 \sum_{k=1}^{\infty} q^{k(\alpha+1-\beta/p-\beta/2)}\big(E'_{q^k} - E'_{q^{k+1}}\big)^{\beta}.$$

С помощью леммы 4 получаем, что последний ряд расходится и, стало быть, f_2/C_2 удовлетворяет всем условиям теоремы.

Теорема 8. *Пусть $p > 2$, $1 \le \beta \le 2$, $\beta/2 + \beta/p < 1$ и $\{E'_n\}_{n=1}^{\infty}$ — убывающая к нулю последовательность такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta/p-\beta/2}(E'_n)^{\beta} = \infty.$$

Тогда существует $f \in MC_p[0,1)$, для которой $E_n(f)_p \le E'_n$, $n \in \mathbb{N}$, при этом ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\hat f(n)|^{\beta} \tag{9}$$

расходится.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f_3 = \sum_{k=1}^{\infty} m_k^{-1/p-1/2}\big(E'_{m_{k+1}} - E'_{m_{k+2}}\big)\chi_{m_k}P_{m_k},$$

где P_{m_k} — полиномы, построенные в лемме 11. По лемме 8 получаем

$$\|\chi_{m_k}P_{m_k}\|_p \le (2m_k)^{1/p}C_1\|\chi_{m_k}P_{m_k}\|_{L_p} \le (2m_k)^{1/p}C_1\|P_{m_k}\|_{\infty} \le C_2 m_k^{1/2+1/p}.$$

Поэтому
$$E_{m_n}(f_3)_p \le C_2 \sum_{k=n}^{\infty} \bigl(E'_{m_{k+1}} - E'_{m_{k+2}}\bigr) \le C_2 E'_{m_{n+1}},$$
откуда $E_i(f_3)_p \le C_2 E'_i$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Учитывая, что носители $h_k = \chi_{m_k} P_{m_k}$ при разных k не пересекаются, согласно лемме 11 имеем
$$\sum_{n=1}^{\infty} |\hat f(n)|^\beta \ge \sum_{k=1}^{\infty} m_k^{-\beta/p-\beta/2} \bigl(E'_{m_{k+1}} - E'_{m_{k+2}}\bigr)^\beta \Gamma^\beta\bigl(P_{m_k}, \beta\bigr)$$
$$\ge C_3(N) \sum_{k=1}^{\infty} m_{k+1}^{-\beta/p-\beta/2} \bigl(E'_{m_{k+1}} - E'_{m_{k+2}}\bigr)^\beta m_k B^\beta.$$
Снова используя лемму 4, заключаем, что последний ряд расходится одновременно с рядом
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta/p-\beta/2} (E'_n)^\beta.$$
Значит, f_3/C_2 — искомая функция. Теорема доказана.

Следствие 3. *Пусть $p > 2$, $1 \le \beta \le 2$, $\beta/2 + \beta/p < 1$ и $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ — убывающая к нулю последовательность такая, что*
$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{1-\beta/p-\beta/2} (\alpha_n)^\beta = \infty.$$
Тогда существует $f \in MC_p[0,1)$, для которой $V_p(f)_n \le \alpha_n$, при этом ряд (9) расходится.

Для доказательства рассматривается функция f_3, в определении которой E'_{m_n} заменены на α_n, и повторяются рассуждения из доказательства теоремы 8.

Замечание 2. Аналогично доказательствам теорем 5 и 8 можно показать, что если
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\beta/2} (E'_n)^\beta = \infty, \tag{10}$$
где E'_n монотонно убывает к нулю, то существует $f \in MC[0,1)$ такая, что $E_n(f) \le E'_n$ и ряд (9) расходится. Достаточность сходимости левой части (10) для сходимости ряда (9) доказывается почти так же, как аналоги теорем Бернштейна и Саса [5, гл. 4, § 2, теоремы 4.8, 4.9].

4. Неравенства типа А. В. Ефимова для систем Гата

Пусть p_k и m_k те же, что и раньше. Рассмотрим множество $G(p_i)$ из элементов $0, 1, \dots, p_i - 1$ с дискретной топологией и мерой $\mu_i(a) = 1/p_i$ для $a \in G(p_i)$. Пусть $G_{\mathbf{P}}$ — прямое произведение $G(p_i)$, причем топология и мера μ в $G_{\mathbf{P}}$ суть прямые произведения соответствующих топологий и мер. Тогда множество $G_{\mathbf{P}}$, состоящее из последовательностей $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$, $x_i \in G(p_i)$, $1 \le i < \infty$, является компактом, $\mu(G_{\mathbf{P}}) = 1$ и база окрестностей точки x в $G_{\mathbf{P}}$ состоит из $I^{(n)}(x) = \{y \in G_{\mathbf{P}} : y_1 = x_1, \dots, y_n = x_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ($I^{(0)}(x) = G_{\mathbf{P}}$). Для $k \in \mathbb{N}$ с разложением (2) пусть (k) — число $l \in \mathbb{N}$ такое, что $m_{l-1} \le k < m_l$, и $k^{(i)} = \sum\limits_{j=i}^{\infty} k_j m_{j-1}$. Рассмотрим $\mathscr{A}_n$-алгебру, порожденную всеми $I^{(n)}(x)$, и $\mathscr{E}_n(f)$ — условное математическое ожидание по отношению к $\mathscr{A}_n$.

Пусть $k,n\in\mathbb{Z}_+$, $n=\sum\limits_{j=1}^{\infty}n_jm_{j-1}$ — разложение (2) и $r_k^n(x)$ — комплекснозначная функция на $G_{\mathbf{P}}$, удовлетворяющая следующим свойствам:

(i) $r_k^n(x)$ зависит лишь от $x_1,\dots,x_k$, а $r_k^0(x)=1$ при всех $k,n\in\mathbb{Z}_+$;

(ii) если m_{k-1} делит n и l, $n^{(k+1)}=l^{(k+1)}$ $(l,n\in\mathbb{Z}_+,\ k\in\mathbb{N})$, то $\mathscr{E}_{k-1}\big(r_k^n\bar r_k^l\big)=\delta(n_k,l_k)$, где $\bar z$ — комплексное сопряжение к z, $\delta(a,b)$ — символ Кронекера;

(iii) если m_k делит n (т. е. $n=n_{k+1}m_k+\dots n_{(n)}m_{(n)-1}$), то

$$\sum_{j=0}^{p_k-1}\big|r_k^{jm_{k-1}+n}(x)\big|^2=p_k$$

при всех $x\in G_{\mathbf{P}}$;

(iv) существует $\delta>1$ такое, что $\|r_k^n\|_\infty\le(p_k/\delta)^{1/2}$.

Для $n\in\mathbb{Z}_+$ полагаем

$$\psi_n(x)=\prod_{k=1}^{\infty}r_k^{n^{(k)}}.$$

Эта система является ортонормированной на $G_{\mathbf{P}}$. Если $G(p_i)$ совпадают с циклическими группами $\mathbb{Z}_{p_i}$, то, вводя в $G_{\mathbf{P}}$ покоординатное сложение по модулю p_i, получаем, что $\psi_n(x)$ совпадают с $\chi_n(x)$, перенесенными с $[0,1)$ на $\mathbf{P}$-ичную группу, являющуюся прямой суммой $\mathbb{Z}_{p_i}$ (см. [1, гл. 1, § 1.5]). Разнообразные и интересные примеры систем $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ можно найти в статье Гата [12], которому и принадлежит это определение.

Пусть λ_i — взаимно однозначное отображение $G(p_i)$ на себя, и пусть $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\dots)$ — отображение $G_{\mathbf{P}}$ на себя, задаваемое формулой

$$\lambda(x)=(\lambda_1(x_1),\lambda_2(x_2),\dots)\quad\text{для } x=(x_1,x_2,\dots).$$

Рассмотрим множество Λ_n таких отображений λ, для которых $\lambda_i(x_i)=x_i$ при $x_i\in G(p_i)$, $1\le i\le n$. Для $[0,1)$ с операцией $\oplus$ аналогом $\lambda\in\Lambda_n$ является отображение $x\to x\oplus h$, $0\le h<1/m_n$. Каждому $k\in\mathbb{Z}_+$ с разложением (2) сопоставим элемент $k^*=(k_1,k_2,\dots)\in G_{\mathbf{P}}$. Пусть

$$\operatorname{osc}(f,I^{(n)}(x))=\sup\{|f(y)-f(\lambda(y))|:y\in I^{(n)}(x),\lambda\in\Lambda_n\}.$$

По определению для $p\in(1,+\infty)$ и функций $f:G_{\mathbf{P}}\to\mathbb{C}$, ограниченных на $G_{\mathbf{P}}$, положим

$$\kappa_p(f,n)=\left(\sum_{j=0}^{m_n-1}(\operatorname{osc}(f,I^{(n)}(j^*)))^p\right)^{1/p},\quad n\in\mathbb{N},\quad \kappa_p(f,0)=\operatorname{osc}\big(f,I_0^{(0)}\big).$$

Если для $V_p(f)_n:=\sup\limits_{k\ge n}\kappa_p(f,k)$ выполнено соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}V_p(f)_n=0$, то f принадлежит пространству $MC_p(G_{\mathbf{P}})$ — аналогу пространства $MC_p[0,1)$. Подобно лемме 1 из [2] доказывается, что это пространство полно относительно нормы $\|f\|_p=\max(V_p(f)_0,\sup\{|f(x)|:x\in G_{\mathbf{P}}\})$. Пусть W_n определяется, как во введении, и $E_n(f)_p=\inf\{\|f-t_n\|_p:t_n\in W_n\}$.

Докажем аналог неравенства $(3')$.

Теорема 9. *Пусть $1<p<\infty$, $n\in\mathbb{N}$, $f\in MC_p(G_{\mathbf{P}})$. Тогда*

$$V_p(f)_n\le E_{m_n}(f)_p\le 2V_p(f)_n.$$

Доказательство. По определению полином $Q \in W_{m_n}$ содержит ψ_i, $i < m_n$, т. е. $i^{(k)} = 0$ при $k > n$ и ψ_i — произведение r_k^l, $k \le n$. Значит, ψ_i постоянны на всех $I^{(n)}(j^*)$ и тем более на всех $I^{(k)}(j^*)$, $k \ge n$. То же самое верно для Q. Поэтому $\operatorname{osc}(f, I^{(k)}(j^*)) = \operatorname{osc}(f - Q, I^{(k)}(j^*))$ при $j < m_k$ и $k \ge n$, откуда $V_p(f-Q)_0 \ge V_p(f-Q)_n = V_p(f)_n$. В частности, $E_{m_n}(f)_p \ge V_p(f)_n$. Теперь воспользуемся равенством (см. [12])

$$S_{m_n}(f)(x) = m_n \int\limits_{I^{(n)}(x)} f(t)\,d\mu(t), \tag{11}$$

где $\mu(t)$ — мера на $G_{\mathbf{P}}$ и $S_n(f)(x) \in W_n$ — частичная сумма ряда Фурье функции f по системе $\{\psi_i\}_{i=0}^{\infty}$. Тогда

$$f(x) - S_{m_n}(f)(x) = m_n \int\limits_{I^{(n)}(x)} (f(x) - f(t))\,d\mu(t). \tag{11$'$}$$

Поскольку $S_{m_n}(f)$ принадлежит W_{m_n}, то, как показано выше, она постоянна на $I^{(k)}(j^*)$, $k \ge n$, $0 \le j < m_k$, откуда при $k \ge n$ видно, что $\kappa_p(f - S_{m_n}(f), k) = \kappa_p(f)_k \le V_p(f)_n$. При $k < n$ имеем

$$(\operatorname{osc}(f - S_{m_n}(f), I^{(k)}(j^*)))^p \le \big(2 \sup\{|f(x) - S_{m_n}(f)(x)| : x \in I^{(k)}(j^*)\}\big)^p. \tag{12}$$

В силу (11$'$) правая часть (12) не превосходит

$$2^p \max_{jm_n/m_k \le i < (j+1)m_n/m_k} (\operatorname{osc}(f, I^{(n)}(i^*)))^p \le 2^p \sum_{jm_n/m_k \le i < (j+1)m_n/m_k} (\operatorname{osc}(f, I^{(n)}(i^*)))^p.$$

Суммируя эти неравенства по j от 0 до $m_k - 1$, получаем

$$\kappa_p^p(f - S_{m_n}(f), k) \le 2^p \sum_{j=0}^{m_k-1} \sum_{jm_n/m_k \le i < (j+1)m_n/m_k} (\operatorname{osc}(f, I^{(n)}(i^*)))^p \le 2^p V_p^p(f)_n.$$

Окончательно для всех $k \in \mathbb{N}$ видим, что $\kappa_p(f - S_{m_n}(f), k) \le 2V_p(f)_n$ и

$$\sup_{x \in G_{\mathbf{P}}} |f(x) - S_{m_n}(f(x))| \le \max_{0 \le i < m_n} \operatorname{osc}(f, I^{(n)}(i^*)) \le V_p(f)_n$$

также благодаря (11$'$). Теорема доказана.

Следствие 4. *Множество полиномов по системе $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ плотно в $MC_p(G_{\mathbf{P}})$.*

Введем еще один p-флуктуационный модуль непрерывности:

$$V_p(f)_n^* = \sup_{\lambda \in \Lambda_n} \|f(x) - f(\lambda(x))\|_p.$$

Легко видеть, что $V_p(f+g)_n^* \le V_p(f)_n^* + V_p(g)_n^*$. Для аналогичных модулей непрерывности в $C(G_{\mathbf{P}})$ и $L_p(G_{\mathbf{P}})$ Гат [15] доказал аналог неравенства А. В. Ефимова (3). Сложность такого переноса заключается в отсутствии групповой структуры в $G_{\mathbf{P}}$, в то время как ее наличие использовалось в доказательстве А. В. Ефимова (см. [1, гл. 10, § 10.5, теорема 10.5.1]).

Теорема 10. *Пусть $1 < p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in MC_p(G_{\mathbf{P}})$. Тогда справедливы неравенства*
$$(1/2)V_p(f)^*_n \le E_{m_n}(f)_p \le V_p(f)^*_n.$$

Доказательство. Сначала покажем, что для $n \in \mathbb{N}$, $f \in MC_p(G_{\mathbf{P}})$
$$V_p(f)^*_n \le 2V_p(f)_n. \tag{13}$$

По определению имеем
$$V_p(f)^*_n = \sup_{\lambda\in\Lambda_n}\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j=0}^{m_k-1}\sup_{u,t\in I^{(k)}(j^*)}|f(u)-f(\lambda(u))-f(t)+f(\lambda(t))|^p\right)^{1/p}.$$

При $k \le n$, $\lambda \in \Lambda_n$, $u(j), t(j) \in I^{(k)}(j^*)$ элементы $\lambda(u(j))$ и $u(j)$ принадлежат одному $I^{(n)}(i^*)$ и то же верно для пары $\lambda(t(j))$ и $t(j)$. Таким образом,
$$\begin{aligned}|f(u(j)) - f(\lambda(u(j))) - f(t(j)) + f(\lambda(t(j)))|^p \\ \le 2^{p-1}(|f(u(j)) - f(\lambda(u(j)))|^p + |f(t(j)) - f(\lambda(t(j)))|^p) \\ \le 2^p \max_{i^*\in I^{(k)}(j^*)} \operatorname{osc}^p(f, I^{(n)}(i^*)).\end{aligned}$$

Переходя к точной верхней грани и суммируя эти неравенства, получаем
$$\left(\sum_{j=0}^{m_k-1}\sup_{u,t\in I^{(k)}(j^*)}|f(u)-f(\lambda(u))-f(t)+f(\lambda(t))|^p\right)^{1/p} \le 2V_p(f)_n.$$

При $k > n$, $\lambda \in \Lambda_n$, $u(j), t(j) \in I^{(k)}(j^*)$ пара $\lambda(u(j))$, $\lambda(t(j))$ также содержится в одном $I^{(k)}(j^*_1)$ (так как $u_{n+1}(j) = t_{n+1}(j), \dots, u_k(j) = t_k(j)$, то $\lambda_{n+1}(u_{n+1}(j)) = \lambda_{n+1}(t_{n+1}(j)), \dots, \lambda_k(u_k(j)) = \lambda_k(t_k(j))$). Если же u и t принадлежат разным $I^{(k)}(j^*)$, то в силу взаимной однозначности λ_i, $n < i \le k$, $\lambda(u)$ и $\lambda(t)$ тоже будут лежать в разных $I^{(k)}(j^*)$. В итоге если $u(j), t(j) \in I^{(k)}(j^*)$, то кроме них в $I^{(k)}(j^*)$ будут ровно два элемента $\lambda(u(i))$, $\lambda(t(i))$, $0 \le i < m_k$. Учитывая это обстоятельство и применяя неравенство Гёльдера, получаем
$$\left(\sum_{j=0}^{m_k-1}\sup_{u,t\in I^{(k)}(j^*)}|f(u)-f(\lambda(u))-f(t)+f(\lambda(t))|^p\right)^{1/p} \le 2V_p(f)_k \le 2V_p(f)_n.$$

Таким образом, (13) доказано, а из него и левого неравенства теоремы 9 следует левое неравенство данной теоремы.

Для доказательства правого неравенства теоремы используем метод, близкий к примененному в [15]. Пусть $Q \in W_{m_N}$, $N > n$. В силу формулы (11) и постоянства Q на $I^{(N)}(x)$ получаем
$$S_{m_n}(Q)(x) = m_n m_N^{-1}\sum Q(\alpha(x,t)),$$
где $\alpha(x,t) = (x_1, \dots, x_n, t_{n+1}, \dots, t_N, t_{N+1}, \dots) \in G_{\mathbf{P}}$, а сумма берется по всем $t_i \in G(p_i)$, $n+1 \le i \le N$. Пусть $\lambda_i(y_i, x_i)$ при фиксированном $x_i \in G(p_i)$ или $y_i \in G(p_i)$ взаимно однозначно отображает $G(p_i)$ на себя. Имеем равенство
$$S_{m_n}(Q)(x) = m_n m_N^{-1}\sum Q(\lambda(y,x)), \tag{14}$$

где $\lambda(y,x) = (x_1,\dots,x_n,\lambda_{n+1}(y_{n+1},x_{n+1}),\dots)$ и сумма берется по всем $y_i \in G(p_i)$, $n+1 \le i \le N$. Будем записывать эту сумму так: $\sum\limits_{y_{n+1},\dots,y_N}$. Ясно, что $\lambda(y,x)$ как функция от x принадлежит Λ_n.

При $k \ge N$ в силу постоянства $Q(x)$ и $S_{m_n}(Q)(x)$ на $I^{(k)}(i^*)$, $0 \le i < m_k$, получаем, что $\kappa_p(S_{m_n}(Q)(x) - Q(x), k) = 0$. При $k < N$ по формуле (14) в силу конечнозначности Q существуют $x(j), z(j) \in I^{(k)}(j^*)$, $0 \le j < m_k$, такие, что

$$\begin{aligned}&\operatorname{osc}(S_{m_n}(Q)(x) - Q(x), I^{(k)}(j^*))\\ &\quad = m_n m_N^{-1}\Big|\sum_{y_{n+1},\dots,y_N}(Q(x(j)) - Q(\lambda(y,x(j))) - Q(z(j)) + Q(\lambda(y,x(j))))\Big|.\end{aligned}$$

Согласно неравенству Гёльдера имеем

$$\begin{aligned}&\kappa_p^p(S_{m_n}(Q)(x) - Q(x), k) \le (m_n/m_N)^p(m_N/m_n)^{p-1}\\ &\qquad\times\sum_{j=0}^{m_k-1}\sum_{y_{n+1},\dots,y_N}(\operatorname{osc}(Q(\lambda(y,x)) - Q(x), I^{(k)}(j^*))^p \le (V_p(Q)_n^*)^p,\end{aligned}$$

поскольку $\lambda(y,x) \in \Lambda_n$. В итоге

$$\|S_{m_n}(Q) - Q\|_p \le V_p(Q)_n^*. \tag{15}$$

Пусть теперь $f \in MC_p(G_{\mathbf{P}})$ и $\varepsilon > 0$. По следствию 4 найдем $Q \in W_{m_N}$, $N > n$, такой, что $\|f - Q\|_p < \varepsilon$. Тогда

$$\|f - S_{m_n}(f)\|_p \le \|S_{m_n}(f) - S_{m_n}(Q)\|_p + \|S_{m_n}(Q) - Q\|_p + \|Q - f\|_p.$$

Из формулы (11) легко видеть, что

$$\operatorname{osc}(S_{m_n}(f)(x), I^{(k)}(j^*)) \le \operatorname{osc}(f(x), I^{(k)}(j^*)),$$

откуда $\|S_{m_n}(f)\|_p \le \|f\|_p$. Благодаря этому неравенству и (15)

$$\begin{aligned}\|S_{m_n}(f) - f\|_p &\le V_p(f)_n^* + 2\|f - Q\|_p \le V_p(f - Q)_n^* + V_p(f)_n^*\\ &\quad + 2\|f - Q\|_p V_p(f)_n^* + 4\|f - Q\|_p \le V_p(f)_n^* + 4\varepsilon.\end{aligned}$$

Здесь для оценки $V_p(f - Q)_n^* \le 2\|f - Q\|_p$ использовано левое неравенство теоремы. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем правое неравенство теоремы, что завершает ее доказательство.

Следствие 5. *Пусть* $1 < p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in MC_p(G_{\mathbf{P}})$. *Тогда*

$$V_p(f)_n \le V_p(f)_n^* \le 2V_p(f)_n.$$

Доказательство. Правое неравенство следствия установлено при доказательстве теоремы 10, левое следует из теорем 9 и 10.

Что касается переноса результатов об абсолютной сходимости на системы Гата, то в силу отсутствия групповой структуры у $G_{\mathbf{P}}$ возникают проблемы с получением достаточных условий типа теоремы А или теоремы 4. Напротив, для переноса результатов о неулучшаемости есть все необходимые средства. Так, аналогом леммы 6 является теорема 12 из [12], а лемма 3 из той же статьи [12] — аналог леммы 1. В силу мультипликативности системы $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$, следующей из определения, и ее ортонормированности представляется возможным получить аналоги леммы 11 и теорем 5, 6 и 8.

Автор выражает глубокую признательность профессору Б. И. Голубову за полезное обсуждение результатов данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А.* Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
2. *Волосивец С. С.* Приближение функций ограниченной p-флуктуации полиномами по мультипликативным системам // Anal. Math. 1995. V. 21, N 1. P. 61–77.
3. *Onneweer C. W., Waterman D.* Uniform convergence of Fourier series on groups // Michigan J. Math. 1971. V. 18, N 3. P. 265–273.
4. *Терехин А. П.* Интегральные конструктивные свойства периодических функций ограниченной p-вариации // Труды молодых ученых СГУ. Математика и механика // Саратов: Изд-во СГУ, 1969. Вып. 2. С. 131–135.
5. *Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И.* Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981.
6. *Виленкин Н. Я.* Об одном классе полных ортонормальных систем // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1947. Т. 11, № 4. С. 363–400.
7. *Onneweer C. W.* Absolute convergence of Fourier series on certain groups // Duke Math. J. 1972. V. 39, N 4. P. 599-610.
8. *Бочкарев С. В.* Абсолютная сходимость рядов Фурье по полным ортонормированным системам // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 2. С. 53–76.
9. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 1.
10. *Volosivets S. S.* Convergence of series of Fourier coefficients of p-absolutely continuous functions // Anal. Math. 2000. V. 26, N 1. P. 63–80.
11. *Терехин А. П.* Интегральные свойства гладкости периодических функций ограниченной p-вариации // Мат. заметки. 1967. Т. 2, № 3. С. 288–300.
12. *Gat G.* On $(C, 1)$ summability of integrable functions on compact totally disconnected spaces // Studia Math. 2001. V. 144, N 2. P. 101–120.
13. *Pal J., Simon P.* On a generalization of the concept of derivative // Acta Math. Hungar. 1977. V. 29, N 1–2. P. 155–164.
14. *Sunouchi G.-I.* Notes on Fourier analysis. XI. On the absolute summability of Fourier series // J. Math. Soc. Japan. 1949. V. 1, N 2. P. 122–129.
15. *Gat G.* Best approximation by Vilenkin-like systems // Acta Math. Paed. Nyireg. 2001. V. 17, N 3. P. 161–169.

Статья поступила 24 декабря 2004 г.

Волосивец Сергей Сергеевич
Саратовский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Астраханская, 83, Саратов 410028
VolosivetsSS@mail.ru