Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2006. Том 47, № 1

УДК 517.54

ПОЛНОТА ПРОСТРАНСТВА СЕПАРАБЕЛЬНЫХ МЕР В МЕТРИКЕ КАНТОРОВИЧА — РУБИНШТЕЙНА

А. С. Кравченко

Аннотация: Рассматривается пространство сепарабельных мер $M(X)$, определенных на борелевской σ-алгебре $\mathscr{B}(X)$ метрического пространства X. Пространство $M(X)$ метризуется расстоянием Канторовича — Рубинштейна, известным также как «расстояние Хатчинсона» (см. [1]). Доказывается теорема о том, что пространство $M(X)$ полно в том и только том случае, если полно пространство X. Рассмотрены приложения этой теоремы в теории самоподобных фракталов.

Ключевые слова: фракталы, самоподобные множества, инвариантные меры, сепарабельные меры, метрика Канторовича — Рубинштейна, расстояние Хатчинсона.

1. Введение. В работе [2] Хатчинсон, вводя понятие инвариантной меры для конечной системы сжимающих подобий, рассматривает метрическое пространство (X, ρ) и пространство $M_{\text{loc}}(X)$ мер ν на X с ограниченным носителем, нормированных условием $\nu(X) = 1$, в котором вводится метрика [2, 4.3(1)]

$$H(\nu, \mu) = \sup \left| \int_X f \, d\nu - \int_X f \, d\mu \right|, \tag{1}$$

где супремум берется по всем функциям f из пространства

$$\text{lip}_1(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y) \text{ для всех } x, y \in X\}.$$

Эта метрика, названная в [1] «расстоянием Хатчинсона», была введена в 50-х гг. в работах Л. В. Канторовича и Г. Ш. Рубинштейна (см. [3, гл. 4, § 4]).

При доказательстве теоремы о существовании инвариантной меры на самоподобном множестве в [2, 4.4(1)] используется теорема Банаха о неподвижной точке, но отсутствует доказательство полноты рассматриваемого пространства мер $M_{\text{loc}}(X)$. В случае компактного X пространство $M_{\text{loc}}(X)$ является компактным (см. [3, гл. 8, § 4]) и, следовательно, полным. Однако в общем случае справедливо

Утверждение 1.1. *Если пространство X неограниченное, то пространство $M_{\text{loc}}(X)$ не полно.*

Действительно, выбирая последовательность точек $x_k \in X$, для которой $\rho(x_0, x_k) \leq k$ и $\rho(x_0, x_k) \to \infty$ при $k \to \infty$, и используя меру Дирака δ_x (см. п. 2), можем определить последовательность мер $\nu_n = 2^{-n}\delta_{x_0} + \sum\limits_{k=1}^{n} 2^{-k}\delta_{x_k}$, фундаментальную в $M_{\text{loc}}(X)$, но не имеющую предела в этом пространстве.

Пробел в доказательстве теоремы Хатчинсона отмечен в [1], где для случая $X = \mathbb{R}^n$ дано новое доказательство этой теоремы с использованием пространства $M(X)$ мер ν, удовлетворяющих условиям $\nu(X) = 1$ и $\int\limits_X \rho(x_0, x)\, d\nu < \infty$ для некоторой точки $x_0 \in X$, наделенного метрикой (1). Там же была установлена полнота пространства $M(X)$ для частного случая $X = \mathbb{R}^n$. В п. 4 мы доказываем основной результат (теорема 4.2) об эквивалентности свойств полноты пространства $M(X)$ и полноты пространства X в общем случае. Приложение этой теоремы к самоподобным фракталам (п. 5) не только полностью снимает вопрос о корректности теоремы Хатчинсона в общем случае, но и распространяет ее на случай счетных систем сжимающих отображений. Это позволяет рассматривать аттрактор (счетной) системы сжимающих подобий в банаховом пространстве как носитель инвариантной меры без априорного требования его компактности.

2. Основные понятия. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $C_b(X)$ — пространство всех непрерывных ограниченных функций $f : X \to \mathbb{R}$ с нормой $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in X} |f(x)|$. При этом число

$$\operatorname{Lip} f = \sup\left\{ \left| \frac{f(x) - f(y)}{\rho(x, y)} \right| : x \neq y,\ x, y \in X \right\}$$

называем *константой липшицевости* функции f, и если оно конечно, то функцию f называем *липшицевой*. Пространства всех вещественных липшицевых функций, ограниченных липшицевых функций и функций с константой липшицевости $< \alpha$ на X обозначаются соответственно через $\operatorname{lip}(X)$, $\operatorname{lip}^\circ(X)$ и $\operatorname{lip}_\alpha(X)$. Введем обозначения: $\operatorname{diam}(A) = \sup\{\rho(x, y) : x, y \in A\} \in [0, +\infty]$ — диаметр множества $A \subset X$, $\rho(x, A) = \inf\limits_{y \in A} \rho(x, y)$ — расстояние от точки $x \in X$ до множества A. *Носителем вещественной функции* $f : X \to [0, +\infty)$ называется множество $\operatorname{spt} f = \{x \in X : f(x) > 0\}$.

Будем писать $\alpha_n \downarrow \alpha_0$ (или $\alpha_n \uparrow \alpha_0$) для монотонно убывающей (соответственно возрастающей) числовой последовательности $\{\alpha_n\}$, сходящейся к α_0. Аналогично будем писать $f_n \downarrow f_0$ (или $f_n \uparrow f_0$) на множестве X, если последовательность вещественных функций $\{f_n\}$, определенных на X, убывает (соответственно возрастает) и поточечно сходится к функции f_0 всюду на X.

Под *мерой* ν на X мы понимаем вещественную неотрицательную счетно-аддитивную функцию множества, заданную на σ-алгебре $\mathscr{B}(X)$ всех борелевских подмножеств пространства X и удовлетворяющую равенству $\nu(\varnothing) = 0$. Меру $\delta_x(A) = \{1$ при $x \in A;\ 0$ при $x \notin A\}$ называем *мерой Дирака* в точке $x \in X$ (см. [4, 10.9.4(1)]). Мера μ на X, удовлетворяющая условию $\mu(X) < +\infty$, называется *конечной*. *Носитель* меры μ есть множество $\operatorname{spt} \mu = X \setminus \cup\{A \subset X :$ A открыто и $\mu(A) = 0\}$. Множество $A \subset X$ называется *сепарабельным*, если оно содержится в замыкании своего не более чем счетного подмножества. Следуя [5, гл. 1, § 1.], мы называем меру μ *сепарабельной*, если существует борелевское сепарабельное множество $A \subset X$ такое, что $\mu(X \setminus A) = 0$. Известно [6, 2.2.16], что носитель конечной меры всегда является сепарабельным множеством и поэтому для конечных мер условие $\mu(X \setminus \operatorname{spt} \mu) = 0$ равносильно сепарабельности меры μ.

Семейство конечных мер Π называется *плотным* (см. [5, гл. 1, § 1]), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое компактное множество K, что $\nu(X \setminus K) < \varepsilon$ для всех мер $\nu \in \Pi$, и соответственно конечная мера называется *плотной*, если плотно семейство, состоящее только из этой меры. Конечная плотная мера однозначно определяется значениями интеграла на функциях $f \in \mathrm{lip}^\circ(X)$ (см. [5, гл. 1, § 1, теорема 1.3]). Отметим, что в полном метрическом пространстве X свойства плотности и сепарабельности меры эквивалентны (см. [5, добавление III]). Мы будем рассматривать только сепарабельные меры, не касаясь так называемой проблемы меры (см. [5, добавление III] или [6, 2.1.6]). Каждая конечная мера на X порождает линейный функционал $\mu(f) = \int\limits_X f\,d\mu$ на пространстве $E(X,\mu)$ всех вещественных μ-суммируемых функций. Для метрического пространства X мы, следуя [1, с. 159], рассматриваем пространство $M(X)$ всех сепарабельных мер μ таких, что $\mu(X) = 1$ и $\mu(f) < +\infty$ для любой функции $f \in \mathrm{lip}(X)$. Заметим, что в общем случае $M_{\mathrm{loc}}(X) \subset \mathscr{M}(X)$, где $\mathscr{M}(X)$ — пространство мер, введенное в [1, с. 160] без требования их сепарабельности. Кроме того, $M(X) \subset \mathscr{M}(X)$. Каждой точке $a \in X$ сопоставляется функция $\phi_a(x) = \rho(a,x)$, принадлежащая пространству $\mathrm{lip}(X)$.

Утверждение 2.1. *Сепарабельная мера μ на метрическом пространстве (X,ρ), удовлетворяющая условию $\mu(X) = 1$, принадлежит пространству $M(X)$ тогда и только тогда, когда существует точка $a \in X$ такая, что $\mu(\phi_a) < +\infty$.*

Доказательство. Если $\mu \in M(X)$, то $\phi_a \in \mathrm{lip}(X)$ для любой точки $a \in X$ и, следовательно, $\mu(\phi_a) < +\infty$. Если имеется точка $a \in X$ такая, что $\mu(\phi_a) < +\infty$, то для любой функции $f \in \mathrm{lip}(X)$ выполняется оценка $f(x) \le f(a) + (\mathrm{Lip}\, f)\cdot\rho(a,x) = f(a) + (\mathrm{Lip}\, f)\cdot\phi_a(x)$, из которой следует требуемая оценка для интеграла: $\mu(f) \le f(a) + (\mathrm{Lip}\, f)\cdot\mu(\phi_a) < +\infty$. $\square$

3. Метризация пространства мер. Расстояние $H(\mu,\nu)$ между мерами μ,ν определяется формулой (1), где супремум берется по всем функциям $f \in \mathrm{lip}_1(X)$, и является ограничением на $M(X)$ метрики $H(\mu,\nu)$, рассмотренной в [1] на формально более широком пространстве $\mathscr{M}(X)$. Заметим, что при проверке аксиом метрики для $H(\mu,\nu)$ в [1, теорема 1, с. 161] свойство полноты метрического пространства X не использовалось. Мы говорим, что последовательность конечных мер μ_k *слабо сходится к конечной мере* μ, если $\mu_k(f) \to \mu(f)$ при $k \to \infty$ для любой функции $f \in C_b(X)$, и в этом случае пишем $\mu_k \Rightarrow \mu$. Семейство множеств вида $\{\mu \in M(X) : |\mu(f_j) - \nu(f_j)| < \varepsilon;\ j = 1,\dots,k\}$ при произвольных $\varepsilon > 0$ и любых конечных наборах $f_1,\dots,f_k$ функций из $C_b(X)$ задает систему базисных окрестностей для каждой точки $\nu \in M(X)$, порождающую топологию *слабой сходимости*, которую будем обозначать через $\mathscr{W}$.

Последовательность мер $\{\nu_n\}_{n=1}^\infty$ называется *слабо фундаментальной*, если для любой функции $f \in C_b(X)$ фундаментальна последовательность $\nu_n(f)$. Множество мер Π называется *слабо полным*, если любая слабо фундаментальная последовательность мер $\{\nu_n\}$ из этого множества слабо сходится к некоторой мере из Π.

Теорема 3.1. *Для любого метрического пространства X топология $\mathscr{T}$ в пространстве мер $M(X)$, порожденная метрикой $H(\mu,\nu)$, совпадает с топологией слабой сходимости $\mathscr{W}$ тогда и только тогда, когда* $\mathrm{diam}\, X < \infty$. *При этом если* $\mathrm{diam}(X) = \infty$, *то топология $\mathscr{T}$ строго сильнее топологии $\mathscr{W}$.*

Доказательству этой теоремы предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.2. *Для любой функции $f \in C_b(X)$ существует последовательность $\{\varphi_n\}$ функций из $\mathrm{lip}^\circ(X)$ такая, что $\varphi_n \downarrow f$ на X.*

Доказательство. Пусть $f \in C_b(X)$ и $||f||_\infty = m < +\infty$.

Для $n = 1, 2, \ldots$ каждая из непрерывных функций

$$\varphi_n(x) = \sup\{f(t) - n\rho(x,t) : t \in X\}$$

ограничена на X, так как $-m \leq f(x) \leq \varphi_n(x) \leq \sup\{f(t) : t \in X\} = m$. Из неравенства $(f(t) - n\cdot\rho(x_1,t)) - n\cdot\rho(x_1,x_2) \leq f(t) - n\cdot\rho(x_2,t) \leq \varphi_n(x_2)$ следует, что $\varphi_n(x_1) - \varphi_n(x_2) \leq n\cdot\rho(x_1,x_2)$ при любых $x_1, x_2 \in X$. Следовательно, $\mathrm{Lip}\,\varphi_n \leq n$ и $\varphi_n \in \mathrm{lip}^\circ(X)$. Неравенство $\varphi_{n+1}(x) \leq \varphi_n(x)$ вытекает непосредственно из определения функций $\varphi_n(x)$. При любом фиксированном $x \in X$ для произвольного $\varepsilon > 0$ имеется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - f(t)| < \varepsilon$, как только $\rho(x,t) < \delta$. Так как при любом $n > 2m/\delta$ и $\rho(x,t) \geq \delta$ выполняется неравенство $(f(t) - f(x)) - n\cdot\rho(x,t) \leq 0$, оценка

$$0 \leq \varphi_n(x) - f(x) = \sup\{(f(t) - f(x)) - n\cdot\rho(x,t) : \rho(x,t) < \delta\} \leq \varepsilon$$

выполняется при всех достаточно больших n. Следовательно,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x). \qquad \square$$

Замечание. Аналогичное утверждение для полунепрерывных функций на ограниченных множествах в $\mathbb{R}^n$ было доказано Хаусдорфом (1919 г.), см. [7, теорема II.5].

Пусть V — векторная решетка. Линейный функционал $F : V \to \mathbb{R}$ называется *секвенциально o-непрерывным* или *секвенциально порядково непрерывным*, если для любой монотонно убывающей последовательности u_n элементов V такой, что $\inf u_n = 0$, выполняется $F(u_n) \to 0$ при $n \to \infty$. Примером секвенциально o-непрерывного функционала является интеграл по произвольной конечной мере μ на X.

Лемма 3.3. *Пусть V — векторная решетка и V_0 такое подмножество V, что для любого элемента $v \in V$ найдется убывающая последовательность элементов $u_k \in V_0$, $k = 1, 2, \ldots$, такая, что $\inf u_k = v$. Если последовательность линейных секвенциально o-непрерывных положительных функционалов $F_n : V \to \mathbb{R}$, $n = 0, 1, \ldots$, поточечно сходится к F_0 на множестве V_0, то последовательность $\{F_n\}$ поточечно сходится к F_0 и на всем V.*

Доказательство. Выберем произвольный элемент $v \in V$ и произвольное $\varepsilon > 0$. По условию найдется убывающая последовательность элементов $u_k \in V_0$, для которой $\inf u_k = v$. Выберем $k = k(\varepsilon)$ такое, что $|F(u_k) - F(v)| < \varepsilon$, и $N = N(\varepsilon)$ такое, что для $n > N$ выполняется $|F_n(u_k) - F(u_k)| < \varepsilon$. Тогда

$$F_n(v) \leq F_n(u_k) < F(u_k) + \varepsilon < F(v) + 2\varepsilon.$$

Переходя к $\limsup$ при $n \to \infty$, получим $\limsup F_n(v) \leq F(v) + 2\varepsilon$. В силу произвольности выбора ε имеем $\limsup F_n(v) \leq F(v)$. Применив аналогичные рассуждения к элементу $(-v)$, получим $\liminf F_n(v) \geq F(v)$, откуда следует, что $\lim F_n(v) = F(v)$. $\square$

Следствие 3.4. *Пусть последовательность конечных мер $\{\mu_n\}$ и конечная мера μ таковы, что для любой функции $f \in \mathrm{lip}^\circ(X)$ выполняется $\mu_n(f) \to \mu(f)$. Тогда $\mu_n \Rightarrow \mu$.*

Доказательство. Положим $V = C_b(X)$ и $V_0 = \mathrm{lip}^\circ(X) \subset V$. Тогда результат следствия непосредственно вытекает из лемм 3.2 и 3.3. $\square$

Следствие 3.5. *Топология $\mathscr{T}$, порождаемая метрикой H в пространстве $M(X)$, не слабее топологии $\mathscr{W}$.*

Доказательство. Из следствия 3.4 вытекает, что любая сходящаяся в метрике H последовательность мер из $M(X)$ сходится в слабой топологии. $\square$

Лемма 3.6. *Если пространство X ограничено, то любая слабо сходящаяся последовательность мер из $M(X)$ сходится в метрике H.*

Доказательство. Пусть X ограничено. Рассмотрим произвольную слабо сходящуюся последовательность сепарабельных мер $\nu_n \Rightarrow \nu_0$ $(n = 1, 2, \dots)$.

Пусть $\widetilde{X}$ — пополнение множества X. Семейство множеств $\mathscr{D} = \{A \subset \widetilde{X} : A \cap X \in \mathscr{B}(X)\}$ — σ-алгебра. Это непосредственно следует из того, что семейство борелевских множеств $\mathscr{B}(X)$ является σ-алгеброй. Если множество V открыто в $\widetilde{X}$, то $V \cap X$ открыто в X, следовательно, $V \cap X \in \mathscr{B}(X)$ и $V \in \mathscr{D}$. Так как $\mathscr{B}(\widetilde{X})$ — минимальная σ-алгебра, содержащая все открытые в $\widetilde{X}$ множества, то $\mathscr{B}(\widetilde{X}) \subset \mathscr{D}$, или, иными словами, $\{A \cap X : A \in \mathscr{B}(\widetilde{X})\} \subseteq \mathscr{B}(X)$. Таким образом, каждая сепарабельная мера $\nu_n : \mathscr{B}(X) \to [0, +\infty)$ порождает сепарабельную меру $\tilde{\nu}_n : \mathscr{B}(\widetilde{X}) \to [0, +\infty)$, определяемую формулой $\tilde{\nu}_n(A) = \nu_n(A \cap X)$ (все необходимые свойства $\tilde{\nu}_n$ непосредственно вытекают из аналогичных свойств меры ν).

Для любой функции $f \in C_b(\widetilde{X})$ имеем

$$\tilde{\nu}_n(f) = \nu_n(f|_X) \to \nu_0(f|_X) = \tilde{\nu}_0(f),$$

т. е. $\tilde{\nu}_n \Rightarrow \tilde{\nu}_0$. Следовательно, семейство $\Pi = \{\tilde{\nu}_n\}_{n=0}^{\infty}$ компактно в топологии слабой сходимости. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По обратной теореме Прохорова [5, гл. 1, § 6, теорема 6.2] семейство Π является плотным, т. е. найдется компактное множество $K \subset \widetilde{X}$ такое, что $\tilde{\nu}_n(\widetilde{X} \setminus K) < \varepsilon$ для $n = 0, 1, \dots$.

Так как множество X всюду плотно в $\widetilde{X}$, то множество шаров $B(x, \varepsilon)$ диаметром ε с центрами $x \in X$ покрывает $\widetilde{X}$ и, в частности, компакт K. Выберем конечное подпокрытие K: $\bigcup\limits_{i=1}^{m} B(x_i, \varepsilon) \supset K$, и обозначим $A = \{x_i\}_{i=1}^{m}$. Так как множество A конечно, то множество функций

$$\mathscr{F} = \{\varphi \in \mathrm{lip}_1(A) : \varphi(x_1) = 0\}$$

гомеоморфно замкнутому ограниченному подмножеству $\mathbb{R}^m$ и, следовательно, $\mathscr{F}$ компактно в равномерной норме $\|\varphi\|_\infty = \max|\varphi|$. Выберем в $\mathscr{F}$ конечную ε-сеть $\varphi_k \in \mathscr{F}$. Рассмотрим набор функций $\psi_k : X \to \mathbb{R}$:

$$\psi_k(x) = \min\{\varphi_k(x_i) + \rho(x, x_i) \mid i = 1, \dots, m\}.$$

Каждая такая функция является продолжением φ_k на все пространство X, $\psi_k|_A \equiv \varphi_k$, и $\psi_k \in \mathrm{lip}_1(X)$ по построению.

Выберем настолько большой номер n_0, что $|\nu_n(\psi_k) - \nu_0(\psi_k)| < \varepsilon$ для всех k и всех $n \geq n_0$. Пусть $f \in \mathrm{lip}_1(X)$ — произвольная липшицева функция. Тогда функция $g(x) = f(x) - f(x_1)$ такова, что $g|_A \in \mathscr{F}$ и, значит, найдется k со свойством $\max\{|g(x_i) - \varphi_k(x_i)| : i = 1, \dots, m\} < \varepsilon$. Для любой точки $x \in K \cap X$ найдется точка x_i такая, что $\rho(x_i, x) \leq \varepsilon$, и тогда

$$|g(x) - \psi_k(x)| \leq |g(x) - g(x_i)| + |g(x_i) - \psi_k(x_i)| + |\psi_k(x_i) - \psi_k(x)| < 3\varepsilon.$$

Таким образом, $\max\{|g(x)-\psi_k(x)| : x\in K\cap X\}\le 3\varepsilon$. Собирая полученные оценки, для $n\ge n_0$ имеем

$$|\nu_n(f)-\nu_0(f)| = |\nu_n(g)-\nu_0(g)| \le \left|\int\limits_{X\cap K} g\,d(\nu_n-\nu_0)\right| + \left|\int\limits_{X\setminus K} g\,d(\nu_n-\nu_0)\right|$$

$$\le |\nu_n(\psi_k)-\nu_0(\psi_k)| + 2\max_{x\in X\cap K}|g(x)-\psi_k(x)| + \max|g|\cdot|\nu_n(X\setminus K)+\nu_0(X\setminus K)|$$

$$\le \varepsilon + 6\varepsilon + 2\varepsilon\cdot\max|g| \le \varepsilon\cdot(7+2\operatorname{diam}X).$$

Переходя к верхней грани по функциям $f\in \mathrm{lip}_1(X)$, приходим к оценке

$$H(\nu_n,\nu_0)\le\varepsilon\cdot(7+2\operatorname{diam}X).$$

В силу произвольности выбора ε это доказывает сходимость последовательности $\{\nu_n\}$ к ν_0 в метрике H. □

Лемма 3.7. *Если пространство X неограниченное, то топология метрики H на $M(X)$ не эквивалентна (строго сильнее) слабой топологии.*

Доказательство. Пусть X неограниченное. Выберем последовательность точек $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ такую, что $\rho(x_0,x_n)\ge n^2$. Пусть $\nu_n=\frac{1}{n}\cdot\delta_{x_n}+(1-\frac{1}{n})\cdot\delta_{x_0}$, тогда $\nu_n\Rightarrow\delta_{x_0}$. В самом деле, для любой непрерывной ограниченной функции f имеем

$$|\delta_{x_0}(f)-\nu_n(f)| = \frac{1}{n}\cdot|f(x_0)-f(x_n)| \le \frac{1}{n}\cdot 2\max|f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

С другой стороны,

$$H(\delta_{x_0},\nu_n)=\nu_n(\phi_{x_0})=\frac{1}{n}\cdot\rho(x_0,x_n)\ge n,$$

и, стало быть, в метрике H сходимости нет. □

Теорема 3.1 является непосредственным следствием утверждений 3.5–3.7.

4. Основные теоремы о полноте пространства мер. В данном пункте мы докажем следующие две теоремы.

Теорема 4.1. *Если пространство X полно, то пространство конечных сепарабельных мер на X слабо полно.*

Теорема 4.2. *Пространство $M(X)$ полно в метрике H тогда и только тогда, когда полно пространство X.*

Сначала приведем несколько технических лемм. Следующая лемма встречается в [5, гл. 1, § 6] как часть доказательства обратного утверждения теоремы Прохорова.

Лемма 4.3. *В полном пространстве семейство мер Π плотно тогда и только тогда, когда для любых $\varepsilon>0$ и $\delta>0$ найдется конечный набор шаров $\{B_i\}$ радиусом ε такой, что $\nu(X\setminus\cup B_i)<\delta$ для всех мер $\nu\in\Pi$.*

Доказательство в прямую сторону непосредственно следует из определения плотного семейства и вполне ограниченности любого компактного множества. Обратно, пусть $U_k=\bigcup\limits_i B_{ik}$ — объединение конечного набора шаров радиусом $\frac{1}{2^k}$ и $\nu(X\setminus U_k)<\frac{\delta}{2^k}$. Тогда пересечение множеств U_k вполне ограничено по построению. Значит, его замыкание $K=\operatorname{cl}\bigcap\limits_k U_k$ по теореме Хаусдорфа [4, 4.6.7.] компактно, и, кроме того, $\nu(X\setminus K)<\delta$. □

Следствие 4.4. *Если последовательность сепарабельных мер $\{\nu_k\}$ не является плотной, то существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что для любого конечного набора шаров $\{B_i\}$ радиусом ε и любого $n_0 \geq 0$ найдется натуральное число $n > n_0$ такое, что $\nu_n(X \setminus \cup B_i) \geq \delta$.*

Доказательство. Пусть последовательность $\Pi = \{\nu_k\}_{k=1}^{\infty}$ сепарабельных мер не плотна, и пусть $n_0 > 0$. Из определения плотного семейства мер вытекает, что объединение конечного числа плотных семейств плотно. Следовательно, семейство $\Pi' = \{\nu_k : k \leq n_0\}$ плотно, а семейство $\Pi'' = \{\nu_k : k > n_0\}$ не является плотным в силу $\Pi = \Pi' \cup \Pi''$. Из леммы 4.3 следует, что найдутся такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что для любого конечного набора шаров $\{B_i\}$ радиусом ε найдется мера $\nu_n \in \Pi''$ $(n > n_0)$ такая, что $\nu_n(X \setminus \cup B_i) \geq \delta$. $\square$

Лемма 4.5. *Пусть пространство X полно. Если последовательность конечных сепарабельных мер $\{\nu_n\}$ такова, что для любой функции $f \in \mathrm{lip}^{\circ}(X)$ последовательность $\nu_n(f)$ фундаментальна, то $\{\nu_n\}$ составляет плотное семейство. Как следствие, любая слабо фундаментальная последовательность сепарабельных мер составляет плотное семейство.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{\nu_n\}$ не плотна. Покажем, что найдется такая функция $f \in \mathrm{lip}^{\circ}(X)$, что последовательность $\nu_n(f)$ не фундаментальна. Обозначим через $B(x,r) = \{t \in X : \rho(t,x) \leq r\}$ замкнутый шар радиусом $r > 0$ с центром в точке $x \in X$. Для любого конечного множества A и $r > 0$ будем обозначать $A^r = \bigcup\limits_{x \in A} B(x,r)$. Из следствия 4.4 вытекает, что существуют $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для любого конечного множества $A \subset X$ и любого $n_0 \geq 0$ найдется натуральное число $n > n_0$ такое, что $\nu_n(X \setminus A^{\varepsilon}) \geq \delta$.

Построим последовательность натуральных чисел $1 \leq n_1 < n_2 < \ldots$ и последовательности $\{A_k\}$ и $\{D_k\}$ конечных подмножеств пространства X такие, что выполняются следующие свойства:

(i) $A_{i-1} \subset A_i$ для всех $i > 1$,
(ii) $D_i \subset A_j$ при $i \leq j$,
(iii) $D_i^{\varepsilon/2} \cap A_j^{\varepsilon/2} = \varnothing$ при $i > j$,
(iv) $\nu_{n_k}\big(D_k^{\varepsilon/4}\big) > \delta/2$,
(v) $\nu_{n_k}\big(X \setminus A_k^{\varepsilon/2}\big) < \delta/32$.

Будем действовать по следующему алгоритму.

Шаг 1. Согласно выбору ε и δ найдется номер n_1 такой, что $\nu_{n_1}(X) \geq \delta$. В силу сепарабельности меры ν_{n_1} найдется конечное множество A_1 такое, что $\nu_{n_1}\big(X \setminus A_1^{\varepsilon/4}\big) < \delta/32$. Свойство (v) для $k = 1$ следует из включения $A_1^{\varepsilon/4} \subset A_1^{\varepsilon/2}$ и монотонности меры ν_{n_1}. Положим $D_1 = A_1$, тогда выполнено (ii) для $i = j = 1$ и $\nu_{n_1}\big(D_1^{\varepsilon/4}\big) = \nu_{n_1}(X) - \nu_{n_1}\big(X \setminus A_1^{\varepsilon/4}\big) > \delta - \delta/32 > \delta/2$, что в точности дает (iv) для $k = 1$.

Шаг k для $k > 1$. Пусть имеются числа $\{n_i\}$ и множества A_i, D_i, где $i = 1, \ldots, k-1$, удовлетворяющие свойствам (i)–(v). Из выбора ε и δ вытекает, что найдется число $n_k > n_{k-1}$ такое, что $\nu_{n_k}\big(X \setminus A_{k-1}^{\varepsilon}\big) \geq \delta$. Так как мера ν_{n_k} сепарабельна, найдется конечное множество $D_k \subset X \setminus A_{k-1}^{\varepsilon}$, удовлетворяющее свойству (iv). Так как $D_k \cap A_{k-1}^{\varepsilon} = \varnothing$, то $D_k^{\varepsilon/2} \cap A_{k-1}^{\varepsilon/2} = \varnothing$. По (i) имеем $A_j \subset A_{k-1}$ при $j < k-1$, откуда следует (iii) для случая $i = k$. В силу сепарабельности меры ν_{n_k} найдется конечное множество F_k такое, что $\nu_{n_k}\big(X \setminus F_k^{\varepsilon/2}\big) < \delta/32$.

Положим $A_k = F_k \cup A_{k-1} \cup D_k$, откуда получим свойства (i) для случая $i = k$, (ii) для случая $j = k$ и (v).

Зададим последовательности вещественных функций $\{\varphi_k\}$ и $\{f_k\}$:

$$\varphi_k(x) = \max(1 - 2/\varepsilon\rho(x, D_k), 0), \quad \text{где } k = 1, 2, \dots,$$

$$f_1 = 0, \quad f_{k+1} = \begin{cases} f_k, & \text{если } |\nu_{n_k}(f_k) - \nu_{n_{k+1}}(f_k)| > \frac{\delta}{8}, \\ f_k + \varphi_{k+1} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из свойств (i)–(iii) следует, что $D_i^{\varepsilon/2} \cap D_j^{\varepsilon/2} = \varnothing$ при $i \neq j$. Таким образом, носители функций $\operatorname{spt}\varphi_k = D_k^{\varepsilon/2}$, $k \in \mathbb{N}$, попарно не пересекаются. Для любого $k \in \mathbb{N}$ и $x \in D_k^{\varepsilon/4}$ имеем $\varphi_k(x) \geq 1/2$. Значит, $\nu_{n_k}(\varphi_k) \geq \frac{1}{2}\nu_{n_k}\big(D_k^{\varepsilon/4}\big)$. Применив (iv), получим $\nu_{n_k}(\varphi_k) > \frac{\delta}{4}$, откуда следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется оценка

$$|\nu_{n_k}(f_k) - \nu_{n_{k+1}}(f_{k+1})| > \delta/8.$$

Определим $f(x) = \sup\limits_k f_k(x)$. Так как $0 \leq \varphi_k(x) \leq 1$, $\operatorname{Lip}\varphi_k \leq 2/\varepsilon$ и носители функций φ_k не пересекаются, то $0 \leq f_k \leq 1$ и $\operatorname{Lip} f_k \leq 2/\varepsilon$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $0 \leq f \leq 1$ и $\operatorname{Lip} f \leq 2/\varepsilon$. Таким образом, $f \in \operatorname{lip}^\circ(X)$. Для любого натурального k

$$0 \leq (f - f_k) \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \varphi_i \leq 1.$$

Следовательно,

$$\operatorname{spt}(f - f_k) \subset \bigcup_{i=k+1}^{\infty} D_i^{\varepsilon/2}.$$

В силу свойства (iii) имеем $\bigcup\limits_{i=k+1}^{\infty} D_i^{\varepsilon/2} \subset X \setminus A_k^{\varepsilon/2}$ и

$$|\nu_{n_k}(f - f_k)| \leq \nu_{n_k}\big(X \setminus A_k^{\varepsilon/2}\big) < \varepsilon/32.$$

Применяя неравенство треугольника, получаем

$$\begin{aligned} |\nu_{n_k}(f) - \nu_{n_{k+1}}(f)| &\geq |\nu_{n_k}(f_k) - \nu_{n_{k+1}}(f_{k+1})| \\ &- |\nu_{n_k}(f) - \nu_{n_k}(f_k)| - |\nu_{n_{k+1}}(f) - \nu_{n_{k+1}}(f_{k+1})| > \frac{\delta}{8} - 2\frac{\delta}{32} = \frac{\delta}{16}. \end{aligned}$$

Значит, последовательность $\nu_n(f)$ не является фундаментальной. □

Лемма 4.6. *Пусть пространство X полно, и пусть последовательность конечных сепарабельных мер $\{\nu_n\}$ такова, что для любой функции $f \in \operatorname{lip}^\circ(X)$ числовая последовательность $\nu_n(f)$ фундаментальна. Тогда существует единственная сепарабельная мера μ, к которой последовательность мер $\{\nu_n\}$ слабо сходится.*

Доказательство. Определим неотрицательный линейный функционал μ по формуле $\mu(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu_n(f)$ для всех функций $f \in \operatorname{lip}^\circ(X)$. Рассмотрим последовательность функций $\varphi_k \in \operatorname{lip}^\circ(X)$, монотонно сходящуюся к нулю. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. По лемме 4.5 последовательность мер ν_n составляет плотное семейство, значит, найдется компактное множество K такое, что $\nu_n(X \setminus K) < \varepsilon$.

Сходящаяся на компакте последовательность функций φ_k сходится равномерно, следовательно, найдется настолько большой номер k_0, что при $k > k_0$ имеем $\max\{\varphi_k(x) \mid x \in K\} < \varepsilon$ и

$$\nu_n(\varphi_k) = \int\limits_K \varphi_k \, d\nu_n + \int\limits_{X \setminus K} \varphi_1 \, d\nu_n \leq \varepsilon(\nu_n(1) + \max \varphi_1),$$

$$\mu(\varphi_k) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(\varphi_k) \leq \varepsilon(\mu(1) + \max \varphi_1)$$

для всех $k > k_0$. Таким образом, $\mu(\varphi_k) \downarrow 0$ для произвольной последовательности $\varphi_k \downarrow 0$. По теореме Даниэля [8, II.7.1] функционал μ является мерой на X.

Чтобы показать сепарабельность меры μ, достаточно рассмотреть сепарабельное множество $S = \mathrm{cl}\big(\bigcup \mathrm{spt}\, \nu_n\big)$ и убедиться в том, что $\mu(S) = \mu(X)$. Используя последовательность липшицевых функций $f_k(x) = \max(1 - k \cdot \rho(S, x), 0)$, монотонно сходящуюся всюду на S к характеристической функции χ_S множества S, получаем

$$\mu(S) = \mu(\chi_S) = \lim_{k\to\infty} \mu(f_k) = \lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \nu_n(f_k) = \mu(1) = \mu(X).$$

Применяя следствие 3.4, выводим, что последовательность $\{\nu_n\}$ слабо сходится к сепарабельной мере μ. $\square$

Доказательство теоремы 4.1. Рассмотрим произвольную слабо фундаментальную последовательность сепарабельных мер $\{\nu_n\}$, т. е. такую, что для любой функции $f \in C_b(X)$ числовая последовательность $\{\nu_n(f)\}$ фундаментальна. Так как $\mathrm{lip}^\circ(X) \subset C_b(X)$, по лемме 4.6 последовательность $\{\nu_n\}$ слабо сходится к некоторой сепарабельной мере. Значит, пространство сепарабельных мер слабо полно. $\square$

Доказательство теоремы 4.2. Пусть последовательность $\{\nu_n\}$ мер из пространства $M(X)$ фундаментальна в метрике H. Из определения метрики H вытекает, что для любой функции $f \in \mathrm{lip}(X)$ последовательность $\nu_n(f)$ фундаментальна. По лемме 4.6 существует сепарабельная мера μ такая, что $\nu_n \Rightarrow \mu$. Покажем, что $H(\nu_n, \mu) \to 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. В силу фундаментальности $\{\nu_n\}$ найдется такой номер n, что $H(\nu_n, \nu_m) < \varepsilon$ для всех $m > n$. Если $f \in \mathrm{lip}_1(X)$ — некоторая неотрицательная липшицева функция, то последовательность ограниченных функций $f_k(x) = \min\{f(x), k\}$ монотонно сходится: $f_k \uparrow f$ на X. По теореме Лебега [9, гл. 1, § 12, (12.6), с. 48] $\nu_n(f_k) \uparrow \nu_n(f)$ и $\mu(f_k) \uparrow \mu(f)$, следовательно, найдется настолько большой номер k, что $|\nu_n(f) - \nu_n(f_k)| < \varepsilon$ и $|\mu(f) - \mu(f_k)| < \varepsilon$. Из слабой сходимости вытекает, что $\lim\limits_{m\to\infty} \nu_m(f_k) = \mu(f_k)$. Согласно выбору n имеем

$$|\nu_n(f_k) - \mu(f_k)| = \lim_{m\to\infty} |\nu_n(f_k) - \nu_m(f_k)| \leq \varepsilon.$$

В итоге получаем

$$|\nu_n(f) - \mu(f)| \leq |\nu_n(f) - \nu_n(f_k)| + |\nu_n(f_k) - \mu(f_k)| + |\mu(f_k) - \mu(f)| < 3\varepsilon.$$

Любая липшицева функция представима в виде разности неотрицательных: $f = f^+ - f^-$, следовательно, $\mu(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu_n(f)$ для всех $f \in \mathrm{lip}_1(X)$. Отсюда следует, во-первых, что $\mu \in M(X)$, так как $\mu(\phi_{x_0}) = \lim\limits_{n\to\infty} \nu_n(\phi_{x_0}) < \infty$, и, во-вторых, что

$\lim\limits_{n\to\infty} H(\nu_n,\mu)=0$. Это доказывает полноту пространства $M(X)$. Первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь пространство $M(X)$ полно, покажем полноту X. Рассмотрим некоторую фундаментальную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ в X. Так как $H(\delta_x,\delta_y)=\rho(x,y)$ для всех $x,y\in X$, то последовательность мер Дирака $\{\delta_{x_n}\}$ фундаментальна и в силу полноты $M(X)$ сходится в метрике H к некоторой мере ν. Из сепарабельности меры ν получаем, что ее носитель непуст. Пусть $x_0\in \operatorname{spt}\nu$. Выберем произвольное $\varepsilon>0$. Для липшицевой функции $f_\varepsilon(x)=\max(0,1-\frac{1}{\varepsilon}\rho(x_0,x))$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_{x_n}(f)=\nu(f)>0$. Поэтому существует N такое, что для $n>N$ выполнено $\delta_{x_n}(f)=f(x_n)>0$, значит, $\rho(x_0,x_n)<\varepsilon$. Следовательно, $x_n\to x_0$, при $n\to\infty$. Полнота пространства X доказана. □

5. Приложения теоремы о полноте. Теорема 4.2, как упомянуто во введении, имеет приложения в теории самоподобных множеств. Например, без ее использования некорректно доказательство теоремы Хатчинсона [2, 4.4(1)] о существовании единственной инвариантной меры на инвариантном множестве. Так как в [2] используются борелевские регулярные внешние меры, теорему 4.2 необходимо переформулировать в терминах внешних мер.

Внешней мерой на X называется функция $\mu : 2^X\to[0,\infty]$ такая, что $\mu(\varnothing)=0$ и $\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\right)\le\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)$ для $E_i\subset X$. Множество A называется *μ-измеримым*, если $\mu(T)=\mu(T\cap A)+\mu(T\setminus A)$ для всех $T\subset X$. Говорят, что внешняя мера μ *борелевски регулярна*, если все борелевские множества μ-измеримы и для любого $A\subset X$ существует борелевское множество $B\supset A$ такое, что $\mu(A)=\mu(B)$. Будем обозначать через $M^*(X)$ пространство всех сепарабельных внешних мер на X, удовлетворяющих $\mu(X)=1$ и $\int\limits_X\phi_{x_0}\,d\mu<\infty$ для некоторого $x_0\in X$. Метрика H на $M^*(X)$ также определяется формулой (1).

Теорема 5.1. *Пространство $M^*(X)$ полно в метрике H тогда и только тогда, когда полно пространство X.*

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 4.2 и следующего предложения.

Предложение 5.2. *Пространство $M^*(X)$, метризованное метрикой H, взаимно однозначно отображается на $M(X)$ с сохранением метрики.*

Доказательство. Пусть отображение $F : M^*(X)\to M(X)$ задано формулой $F(\mu)=\mu|_{\mathscr{B}(X)}$. Мера $F(\mu)$ совпадает с μ на борелевских множествах. Из определения интеграла Лебега следует, что интегралы $\int\limits_X f\,d\mu$ и $\int\limits_X f\,dF(\mu)$ совпадают на непрерывных функциях. Следовательно, отображение F сохраняет метрику H. Так как борелевски регулярная внешняя мера однозначно определяется своими значениями на борелевских множествах, то F является отображением «в». Для произвольной меры $\nu\in M(X)$ формула $\mu(A)=\inf\{\nu(B) : B\supset A,\ B\in\mathscr{B}(X)\}$ задает внешнюю меру на X. Мера μ является борелевски регулярной, так как по построению для любого $A\subset X$ найдется последовательность $B_n\in\mathscr{B}(X)$, $n=1,2,\dots$, такая, что $B_n\supset A$ и $|\mu(A)-\mu(B_n)|<1/2^n$, откуда $B=\bigcap B_n\in\mathscr{B}(X)$, $B\supset A$ и $\mu(A)=\mu(B)$. Мера μ совпадает с ν на борелевских множествах, следовательно, $\mu\in M^*(X)$ и $F(\mu)=\nu$. Таким образом, F является также отображением «на», а значит, и взаимно однозначным отображением. □

В работе [1] приводится пример построения мер в $\mathbb{R}^n$, инвариантных относительно счетных систем сжимающих отображений, известных [10] как IIFS (Infinite Iterated Function System). Следующая теорема обобщает данный пример на случай полного метрического пространства.

Теорема 5.3. *В полном метрическом пространстве* (X, ρ) *для любой счетной системы* $\mathbf{S} = \{S_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *сжимающих отображений* ($S_i : X \to X$, $\operatorname{Lip} S_i < 1$ *для* $i \in \mathbb{N}$) *с неподвижными точками* x_i *и для любого вероятностного вектора* $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots)$ $\left(\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} p_i = 1,\ p_i \geq 0\ \text{для}\ i \in \mathbb{N}\right)$, *удовлетворяющего условию* $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} p_i\rho(x_1, x_i) < \infty$, *существует единственная мера* $\nu \in M(X)$ *такая, что*

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \nu S_i^{-1}(A) \quad \text{для всех } \nu\text{-измеримых } A \subseteq X.$$

Доказательство. Оператор $T : M(X) \to M(X)$, $T(\nu) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i \nu S_i^{-1}$ является сжимающим в H метрике из [2; 3, теорема 5]. По теореме 4.2 пространство $M(X)$ полно. Применяя теорему Банаха о неподвижной точке, получаем, что существует единственная мера $\nu \in M(X)$ такая, что $T(\nu) = \nu$. $\square$

Мера ν, порождаемая системой $\mathbf{S}$, называется *инвариантной мерой*. Множество, инвариантное относительно системы $\mathbf{S}$, можно определить как $\operatorname{spt} \nu$. Заметим, что построенные таким образом множества могут быть неограниченными и тем самым в отличие от аттракторов IFS некомпактными. Следующий пример показывает также существование инвариантных мер с ограниченным, но не компактным носителем.

Пример 5.1. На гильбертовом пространстве l_2 с гильбертовым базисом $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ рассмотрим систему $\mathbf{S} = \{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ сжимающих отображений $S_i(x) = \frac{1}{2}(x - e_i) + e_i$ и вероятностный вектор $\mathbf{p} = \left(\frac{1}{2^i}\right)_{i=1}^{\infty}$. Носитель соответствующей инвариантной меры ограничен (лежит в единичном шаре), но не компактен, так как содержит $\{e_i\}$ — неподвижные точки отображений $\{S_i\}$.

Результаты настоящей работы анонсированы в [11, 12].

Выражаю огромную благодарность своему научному руководителю д. ф.-м. н. В. В. Асееву за постоянное внимание к данному исследованию и ценные советы по оформлению. Благодарю рецензента за сделанные им замечания, способствовавшие улучшению текста статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Åkerlund-Biström C.* A generalization of Hutchinson distance and applications // Random Comput. Dynam. 1997. V. 5, N 2–3. P. 159–176.
2. *Hutchinson J.* Fractals and self similarity // Indiana Univ. Math. J. 1981. V. 30, N 5. P. 713–747.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.
4. *Кутателадзе С. С.* Основы функционального анализа. Новосибирск: Наука, 1983.
5. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
6. *Federer H.* Geometric measure theory. New York: Springer-Verl., 1996.
7. *Tsuji M.* Potential theory in modern function theory. Tokyo: Maruzen Co., 1959.
8. *Невё Ж.* Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
9. *Сакс С.* Теория интеграла. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.

10. *Fernau H.* Infinite iterated function systems // Math. Nachr. 1994. V. 170. P. 79–91.
11. *Кравченко А. С.* Полнота пространства мер в метрике Канторовича // Четвертый сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ-2000), посв. памяти М. А. Лаврентьева: Тез. докл. Новисибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2000. Т. 1. С. 153.
12. *Кравченко А. С.* Полнота пространства вероятностных мер // Материалы XXXVII МНСК НГУ. Математика. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1999. С. 82.

Статья поступила 18 июня 2004 г.

Кравченко Алексей Станиславович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
kravchenko@math.nsc.ru