Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2006. Том 47, № 1

УДК 514.7

ОБ ЭЙНШТЕЙНОВЫХ ЭРМИТОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Дж. Ким

Аннотация: Показано, что каждая компактная эйнштейнова эрмитова поверхность с постоянной конформной скалярной кривизной является кэлеровой поверхностью и вместе с тем есть некомпактная эйнштейнова эрмитова поверхность, не являющаяся кэлеровой поверхностью с постоянной конформной скалярной кривизной.

Ключевые слова: компактная эйнштейнова эрмитова поверхность, кэлерова поверхность, постоянная конформная скалярная кривизна, некомпактная эйнштейнова эрмитова поверхность, некэлерова поверхность.

1. Введение. Риманова версия теоремы Гольдберга — Сакса [1] гласит, что автодуальная часть тензора Вейля эйнштейновой эрмитовой метрики вырожденна. Отсюда следует, что в компактном случае всякая такая метрика локально конформно кэлерова [1]. Лебрюн показал, что на самом деле лишь немногие компактные комплексные поверхности могут допускать эйнштейновы метрики, которые являются эрмитовыми, но не кэлеровыми [2]. Единственным известным примером служит поверхность Хирцебрука с метрикой Пейджа [3]. В данной работе мы покажем, что каждая эйнштейнова эрмитова поверхность с постоянной конформной скалярной кривизной является кэлеровой поверхностью и что, в отличие от компактного случая, существует некомпактная эйнштейнова эрмитова и некэлерова поверхность с постоянной конформной скалярной кривизной. Точнее, будут доказаны

Теорема 1. *Пусть (M, J, g) — эйнштейнова эрмитова поверхность с постоянной конформной скалярной кривизной. Тогда поверхность (M, J, g) кэлерова.*

Теорема 2. *Евклидово пространство R^4 допускает эйнштейнову эрмитову некэлерову структуру (J, g) с постоянной конформной скалярной кривизной.*

Напомним, что эрмитову поверхность (M, J, g) называют *эйнштейновой эрмитовой*, если риманова метрика g, согласованная с комплексной структурой J, является эйнштейновой относительно ее связности Леви-Чивита, а конформная скалярная кривизна эрмитовой поверхности (M, J, g) — скалярной кривизной относительно g канонической структуры Вейля, ассоциированной с эрмитовой структурой (J, g) [4]. Конформная скалярная кривизна в общем случае непостоянна и указывает меру отличия компактной эйнштейновой эрмитовой поверхности от кэлеровой.

2. Предварительные сведения. Пусть (M, J, g) — эрмитова поверхность (т. е. эрмитово вещественное четырехмерное многообразие) с комплексной структурой J и согласованной с ней римановой метрикой g. Обозначим

This study is supported by Kangwon National University.

через Ω кэлерову форму M, определенную равенством $\Omega(X,Y) = g(X,JY)$ для векторных полей X,Y. Мы всегда будем рассматривать M с ориентацией, определяемой комплексной структурой J так, что форма объема M равна $dV = \frac{1}{2}\Omega \wedge \Omega$. Известно [5], что $d\Omega = \theta \wedge \Omega$, где $\theta = \delta\Omega \circ J$ — форма Ли поверхности M. Заметим, что M кэлерова тогда и только тогда, когда $\theta = 0$; M локально конформно кэлерова тогда и только тогда, когда $d\theta = 0$; M конформно кэлерова тогда и только тогда, когда $\theta = df$ для гладкой функции f на M (в таком случае $e^{-f}g$ — кэлерова метрика). Пусть ∇, R, ρ и s суть риманова связность, тензор римановой кривизны, тензор Риччи и скалярная кривизна поверхности M соответственно. Напомним, что риманова кривизна R, тензор Риччи ρ и скалярная кривизна s поверхности M определяются равенствами

$$R(X,Y,Z,W) = g([\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X,Y]}Z, W),$$
$$\rho(X,Y) = \sum_{i=1,\dots,4} R(E_i, X, Y, E_i), \quad s = \sum_{i=1,\dots,4} \rho(E_i, E_i),$$

где $\{E_i\}_{i=1,\dots,4}$ — локальный ортонормальный репер в касательном расслоении TM.

Риманова метрика g индуцирует метрику на расслоении $\bigwedge^2$ 2-векторов M по правилу

$$g(X_1 \wedge X_2, X_3 \wedge X_4) = \det(g(X_i, X_j)).$$

Оператор кривизны $\mathbf{R}$ является симметричным эндоморфизмом $\bigwedge^2 M$, определенным равенством

$$g(\mathbf{R}(X \wedge Y), Z \wedge W) = -R(X,Y,Z,W).$$

Оператор Ходжа $*$ определяет эндоморфизм на $\bigwedge^2 M$ такой, что $*^2 = \mathbf{Id}$. Отсюда $\bigwedge^2 M = \bigwedge^+ \bigoplus \bigwedge^-$, где $\bigwedge^+$ (соответственно $\bigwedge^-$) — подрасслоение $\bigwedge^2 M$, соответствующее собственному значению $+1$ (соответственно -1) оператора $*$. Пусть

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2}(\mathbf{R} - *\mathbf{R}*); \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{R} + *\mathbf{R}*) - \frac{s}{12}\mathbf{Id};$$
$$\mathbf{W}^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{W} + *\mathbf{W}); \quad \mathbf{W}^- = \frac{1}{2}(\mathbf{W} - *\mathbf{W}).$$

Тогда

$$\mathbf{R} = \frac{s}{12}\mathbf{Id} + \mathbf{B} + \mathbf{W}^+ + \mathbf{W}^-,$$

где $\mathbf{B}$ — продолжение Кулкарни — Номидзу бесследовой части тензора Риччи и $\mathbf{W}^+$ (соответственно $\mathbf{W}^-$) — автодуальная (соответственно антиавтодуальная) составляющая тензора Вейля $\mathbf{W}$. Отметим, что $\mathbf{B} = 0$ тогда и только тогда, когда риманова метрика g является эйнштейновой, т. е. ее тензор Риччи пропорционален метрике g. Будем говорить, что $\mathbf{W}^+$ *вырожденный*, если в каждой точке по крайней мере два из его трех собственных значений совпадают. Известно [1], что $\mathbf{W}^+$ вырожденный тогда и только тогда, когда автодуальная часть $d\theta$ обращается в нуль, т. е. g является локально конформно кэлеровой метрикой в компактном случае. Конформная скалярная кривизна k задается равенством $k = 3g(\mathbf{W}^+(\Omega), \Omega)$ [4]. Заметим, что k имеет конформный вес -2, т. е. если заменить g на $f^2 g$ для некоторой ненулевой функции f, то k заменяется на $f^{-2}k$. Связь между скалярной кривизной s и конформной скалярной кривизной k на эрмитовой поверхности такова [6]:

$$s - k = \frac{3}{2}(2\delta\theta + \|\theta\|^2). \tag{1}$$

Следовательно, на кэлеровом многообразии скалярная кривизна s и конформная скалярная кривизна k совпадают.

3. Доказательство теоремы 1. Пусть (M, J, g) — компактное эйнштейнова евклидова поверхность с постоянной конформной скалярной кривизной k, так что $s-k$ постоянна. Если $s-k \leq 0$, то, интегрируя равенство (1), получим

$$\int\limits_M \|\theta\|^2 dV \leq 0,$$

откуда $\theta = 0$. Значит, (M, J, g) — кэлерова поверхность. Допустим, что $s-k > 0$. Тогда

$$\Psi = \frac{s-k}{3}\Omega + \|\theta\|^2\Omega - \theta \wedge \theta \circ J$$

является замкнутой положительной $(1,1)$-формой [6], т. е. Ψ определяет кэлерову метрику на (M, J). В частности, первое число Бетти M четно. Согласно [1] метрика g конформно кэлерова. Пусть $g = f^{-2}g'$, где g' — кэлерова метрика на (M, J) и f — положительная функция. Обозначим через s' и k' скалярную и конформно скалярную кривизны (M, J, g') соответственно. Тогда $k' = f^{-2}k$ и $s' = f^{-2}(s + \frac{6\Delta f}{f})$, где Δ — лапласиан g. Так как g' — кэлерова метрика, имеем $s' = k'$ и тем самым $6\Delta f + (s-k)f = 0$. Из принципа максимума вытекает, что $s - k = 0$; противоречие с предположением $s - k > 0$. Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2. В отличие от компактного случая, приведем пример некомпактной эйнштейновой эрмитовой и некэлеровой поверхности с постоянной конформной скалярной кривизной k.

Пусть $M = R^4$ с системой координат (x_1, x_2, x_3, x_4). Зададим естественную комплексную структуру J_o, полагая

$$J_o\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}}\right) = \frac{\partial}{\partial x_{2i}}, \quad J_o\left(\frac{\partial}{\partial x_{2i}}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_{2i-1}},$$

и риманову метрику $g = (g_{ij})$ равенством

$$g_{ij} = \frac{4}{ca^2}(a\delta_{ij} - x_i x_j - x_{i'} x_{j'}),$$

где c — положительное число и $a = 1 + \sum\limits_i^4 {x_i}^2$, и положим $x_{2i-1'} = x_{2i}$, $x_{2i'} = -x_{2i-1}$. Эта метрика есть не что иное, как вещественное представление метрики Фубини — Штуди на координатной окрестности в CP^2. Получаем единичный репер

$$\{e_1, e_2 = J_o e_1, e_3, e_4 = J_o e_3\}$$

на (R^4, J_o, g) следующим образом:

$$e_1 = \frac{a\sqrt{c}}{2\sqrt{b}}\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad e_2 = \frac{a\sqrt{c}}{2\sqrt{b}}\frac{\partial}{\partial x_2},$$

$$e_3 = \frac{\sqrt{ac}}{2\sqrt{b}}\left\{(x_1x_3 + x_{1'}x_{3'})\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2x_3 + x_{2'}x_{3'})\frac{\partial}{\partial x_2} + b\frac{\partial}{\partial x_3}\right\},$$

$$e_4 = \frac{\sqrt{ac}}{2\sqrt{b}}\left\{(x_1x_4 + x_{1'}x_{4'})\frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2x_4 + x_{2'}x_{4'})\frac{\partial}{\partial x_2} + b\frac{\partial}{\partial x_4}\right\},$$

где $b = 1 + \sum\limits_{i=3,4} {x_i}^2$. Непосредственным вычислением получаем

$$[e_1, e_2] = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}(-x_2 e_1 + x_1 e_2), \quad [e_1, e_3] = \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{b}}(-x_4\sqrt{a}e_2 + x_1 e_3),$$

$$[e_1, e_4] = \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{b}}(x_3\sqrt{a}e_2 + x_1 e_4), \quad [e_2, e_3] = \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{b}}(x_4\sqrt{a}e_1 + x_2 e_3),$$

$$[e_2, e_4] = \frac{\sqrt{c}}{2\sqrt{b}}(-x_3\sqrt{a}e_1 + x_2 e_4),$$

$$[e_3, e_4] = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{b}}(-x_2 e_1 + x_1 e_2 - x_4\sqrt{a}e_3 + x_3\sqrt{a}e_4).$$

Определим теперь новую почти комплексную структуру J на M, полагая

$$Je_1 = -e_2, \quad Je_2 = e_1, \quad Je_3 = e_4, \quad Je_4 = -e_3.$$

Тогда очевидно, что (J, g) почти эрмитова. Значит, тензор Нийенхейса N_J поверхности J обращается в нуль, что вытекает из следующих равенств:

$$\begin{aligned} N_J(e_1, e_3) &= [Je_1, Je_3] - [e_1, e_3] - J[Je_1, e_3] - J[e_1, Je_3] \\ &= -[e_2, e_4] - [e_1, e_3] + J[e_2, e_3] - J[e_1, e_4] = 0 \end{aligned}$$

и $N_J(Je_i, e_j) = N_J(e_i, Je_j) = -JN_J(e_i, e_j)$ для всех i, j.

Известно, что метрика Фубини — Штуди g эйнштейнова, и легко видеть, что ее скалярная кривизна s равна $6c$. Известно также, что $\mathbf{W}^- \equiv 0$ для метрики Фубини — Штуди и стандартной ориентации. Отсюда $k = 3g(\mathbf{W}^-(\Omega), \Omega) = 0$, где $\Omega = e_1 \wedge Je_1 + e_3 \wedge Je_3 = -e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$. Поэтому скалярная кривизна s и конформная скалярная кривизна k не совпадают, откуда заключаем, что поверхность (R^4, J, g) не кэлерова. Подытоживая изложенное, приходим к следующему: евклидово R^4 допускает эйнштейнову эрмитову и некэлерову структуру (J, g) с постоянной конформной скалярной кривизной.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Apostolov V., Gauduchon P.* The Riemannian Goldberg–Sachs theorem // Internat. J. Math. 1997. V. 8. P. 421–439.
2. *LeBrun C.,* "Einstein metrics on complex surfaces," in: Geometry and Physics (Aarhus, 1995), Eds. J. Andersen, J. Dupont, H. Pedersen, and A. Swann, Marcel Dekker, New York, NY, 1997, **184**, pp. 167–176. (Lecture Notes Pure Appl. Math.).
3. *Page D.* A compact rotating gravitational instanton // Phys. Lett. B. 1979. V. 79. P. 235–238.
4. *Gauduchon P.* La 1-forme de torsion d'une variete hermitienne compacte // Math. Ann. 1984. V. 267. P. 495–518.
5. *Vaisman I.* Some curvature properties of complex surfaces // Ann. Mat. Pura Appl. 1982. V. 32. P. 1–18.
6. *Muskarov O.* On Hermitian surfaces with J-invariant Ricci tensor // J. Geom. 2001. V. 72. P. 151–156.

Статья поступила 15 сентября 2004 г.

Jaeman Kim
Kangwon National University
Department of mathematics education
Chunghon 200-701, Kangwon DO, Korea
jaeman64@yahoo.co.kr