Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2006. Том 47, № 1

УДК 512.545

НАКРЫТИЯ В РЕШЕТКЕ МНОГООБРАЗИЙ m–ГРУПП

А. В. Зенков

Аннотация: Рассматриваются вопросы накрытий в решетке многообразий m-групп. Доказано существование неабелева накрытия у наименьшего нетривиального многообразия m-групп. Показано, что существует несчетное множество о-аппроксимируемых многообразий m-групп, каждое из которых имеет континуум о-аппроксимируемых накрытий. В решетке о-аппроксимируемых многообразий m-групп найдено многообразие, не имеющее в ней накрытий и независимого базиса тождеств.

Ключевые слова: m-группа, многообразие, накрытие, решетка.

1. Введение

Напомним, что *m-группой* называется пара $(G, {}_*)$, где G является ℓ-группой и ${}_*$ есть убывающий автоморфизм второго порядка G. На m-группу можно смотреть как на алгебраическую систему сигнатуры $m = \langle \cdot, e, ^{-1}, \vee, \wedge, \ {}_* \rangle$, и очевидно, что в этой сигнатуре m-группы образуют многообразие. Множество многообразий всех m-групп M является частично упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения. Более того, M есть решетка относительно естественно определенных операций пересечения и объединения многообразий m-групп. Тривиальное многообразие m-групп $\mathscr{E}_m$ является наименьшим элементом M. В [1], в частности, доказано, что многообразие m-групп $\mathscr{I}$, определяемое тождеством $x_* = x^{-1}$, является накрытием $\mathscr{E}_m$ и что многообразие абелевых m-групп $\mathscr{A}_m$ накрывает $\mathscr{I}$. Мы докажем существование неабелева накрытия у $\mathscr{I}$ (теорема 2.1).

В работе [2] на решетке многообразий ℓ-групп L был определен автоморфизм второго порядка ϕ. Напомним определение этого автоморфизма. Пусть $(G, \geq)$ — некоторая ℓ-группа. Через G^* обозначим ℓ-группу, полученную из G путем обращения порядка. Рассмотрим произвольное многообразие ℓ-групп $V = \{G_i \mid i \in I\}$. Тогда $\phi(V) = \{G_i^* \mid i \in I\}$. Если $V = \phi(V)$, то V называется *реверсивным*. В работе [1] отмечено, что система тождеств, определяющая реверсивное многообразие, задает некоторое многообразие m-групп. Известно (см., например, [2]), что многообразие всех о-аппроксимируемых ℓ-групп $\mathscr{R}$ реверсивно. Следовательно, тождество $(y^{-1}x^{-1}y \wedge x) \vee e = e$ задает многообразие всех о-аппроксимируемых m-групп $\mathscr{R}_m$. Назовем многообразие m-групп $\mathscr{X}$ *о-аппроксимируемым*, если $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{R}_m$. Доказано, что решетка всех о-аппроксимируемых многообразий m-групп $M_{\mathscr{R}_m}$ содержит несчетное множество многообразий, каждое из которых имеет континуум различных о-аппроксимируемых накрытий (теорема 3.8). Существует о-аппроксимируемое многообразие m-групп

Работа выполнена при поддержке NSERC (the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada).

$\mathscr{V}_m$, которое не имеет в $M_{\mathscr{R}_m}$ накрытий (теорема 3.11). Как следствие, $\mathscr{V}_m$ не имеет независимого базиса тождеств (следствие 3.12).

Все необходимые сведения по теории групп и решеточно упорядоченных групп можно найти в книгах [3] и [4] соответственно.

2. Неабелево накрытие $\mathscr{I}$

Рассмотрим группу

$$S_2 = \langle a_0, a_1, b \mid [a_0, a_1] = e, a_0^b = a_1, a_1^b = a_0 \rangle.$$

Если $g \in S_2$, то g представим, причем единственным способом, в виде $g = b^k a_0^m a_1^n$, $k, m, n \in \mathbb{Z}$. Относительно лексикографического порядка, т. е. $g \geq e \Leftrightarrow k > 0$ или $k = 0, m \geq 0, n \geq 0$, S_2 является ℓ-группой. Определим отображение $\varphi : S_2 \to S_2$ по правилу

$$(g)\varphi = b^{-k} a_0^{-m} a_1^{-n}.$$

Тогда (S_2, φ) будет m-группой. Если $x, y \in S_2$, то $[x, y] = a_0^s a_1^{-s}$, $s \in \mathbb{Z}$, и поэтому

$$([x, y])\varphi = [y, x]. \tag{1}$$

Также имеем

$$(x^2)\varphi = x^{-2}. \tag{2}$$

Пусть $z = b^{2k+1} a_0^m a_1^n$. Непосредственные вычисления доказывают справедливость следующих соотношений:

$$(z(z)\varphi \vee e) \wedge ((z)\varphi z \vee e) = e, \tag{3}$$

$$|(z(z)\varphi \vee e)^z (((z)\varphi z \vee e))^{-1}| \vee |(z(z)\varphi \vee e)^{(z)\varphi} (((z)\varphi z \vee e))^{-1}| = e, \tag{4}$$

$$|((z(z)\varphi \vee e)\varphi)(z(z)\varphi \vee e))| \vee |(((z)\varphi z \vee e)\varphi)((z)\varphi z \vee e))| = e. \tag{5}$$

Пусть $\mathscr{S} = \mathrm{var}_m((S_2, \varphi))$. Из соотношений (1)–(5) получаем следующие тождества для $\mathscr{S}$:

$$[x, y]_* = [y, x], \tag{6}$$

$$x_*^2 = x^{-2}, \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &|[x, y]| \wedge |[[x, y], z]| \wedge (((zz_* \vee e) \wedge (z_* z \vee e)) \\ &\qquad \vee |(zz_* \vee e)^z ((z_* z \vee e))^{-1}| \vee |(zz_* \vee e)^{z_*} ((z_* z \vee e))^{-1}| \\ &\qquad\qquad \vee |((zz_* \vee e)_*)(zz_* \vee e))| \vee |((z_* z \vee e)_*)(z_* z \vee e))|) = e. \end{aligned} \tag{8}$$

Предположим, что неабелева m-группа $(G, {}_*)$ принадлежит $\mathscr{S}$. Мы покажем, что $(G, {}_*)$ содержит m-подгруппу, m-изоморфную (S_2, φ). Хорошо известно (см., например, [4, теорема 12.6.1]), что G как ℓ-группа содержит ℓ-подгруппу H, ℓ-изоморфную S_2. Отождествим H и S_2. Полагаем в (6) $x = a_0$, $y = b$. Тогда $[a_0, b]_* = \left(a_0^{-1} a_1\right)_* = [b, a_0] = a_0 a_1^{-1}$. Так как $[a_0, b] \vee e = a_0^{-1} a_1 \vee e = a_1$, то

$$(a_1)_* = [a_0, b]_* \wedge e = a_0 a_1^{-1} \wedge e = a_1^{-1}.$$

Аналогично можно показать, что $(a_0)_* = a_0^{-1}$. Если $bb_* = e$, то $(S_2, {}_*)$ будет искомой. Пусть $bb_* \neq e$. Тогда элемент bb_* не сравним с e. Действительно, если, например, $bb_* > e$, то $bb_*^b = b_* b > e$. Используя (7), имеем противоречие:

$bb_*b_*b = bb^{-2}b = e > e$. Поэтому элементы $d = bb_* \vee e$, $c = b_*b \vee e$ строго положительны. Полагая в (8) $x = z = b$, $y = a_0$, получаем

$$d^b = d^{b_*} = c, \quad c^b = c^{b_*} = d, \quad d_* = d^{-1}, \quad c_* = c^{-1}, \quad d \perp c.$$

Пусть $w(x, y)$ — произвольное групповое слово. С учетом (7)

$$w(b_*, b) = bb_* \cdot \ldots \cdot bb_* \cdot b^s \text{ или } w(b_*, b) = b_*b \cdot \ldots \cdot b_*b \cdot b^s, \ s \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что

$$(bb_*)^{-1} = b_*^{-1}b^{-1} = b_*b_*^{-2}b^{-1} = b_*b$$

и поэтому

$$bb_* = (bb_* \vee e)(bb_* \wedge e) = d((bb_*)^{-1} \vee e)^{-1} = dc^{-1}.$$

Следовательно, $w(b_*, b) = d^k c^{-k} b^s$, $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $w_1(x, y) = d^r c^{-r} b^n$ — значение группового слова $w_1(x, y)$. Так как $b \gg d$, $b \gg c$, то

$$w(b_*, b) \vee w_1(b_*, b) = \begin{cases} w(b_*, b), & \text{если } s > n, \\ w_1(b_*, b), & \text{если } n > s, \\ d^r c^{-k} b^s, & \text{если } n = s, \ r > k, \\ d^k c^{-r} b^s, & \text{если } n = s, \ k > r. \end{cases}$$

Таким образом, если $\widetilde{w}(x_*, x)$ — некоторое m-групповое слово, то $\widetilde{w}(b_*, b) = d^k c^r b^s$, $k, r, s \in \mathbb{Z}$. Следовательно, m-группа, порожденная элементом b, m-изоморфна (S_2, φ).

Пусть $(G, \geq)$ — некоторая ℓ-группа. Через G^* обозначим ℓ-группу, полученную из G путем обращения порядка (этот порядок будем обозначать через $\overset{R}{\geq}$). Относительно координатного порядка прямое произведение $G \times G^*$ является ℓ-группой. Пусть $(x, y) \in G \times G^*$. Определим отображение $\mathrm{Exch} : G \times G^* \to G \times G^*$ по правилу $(x, y)\,\mathrm{Exch} = (y, x)$. Тогда пара $(G \times G^*, \mathrm{Exch})$ будет m-группой. В работе [1] доказано, что если многообразие ℓ-групп V реверсивно и $V = \mathrm{var}_\ell(\{G_i \mid i \in I\})$, то соответствующее многообразие m-групп V_m равно $\mathrm{var}_m(\{(G_i \times G_i^*, \mathrm{Exch})\})$. Известно, что многообразие абелевых ℓ-групп $\mathscr{A}$ реверсивно и порождается естественно упорядоченной аддитивной группой целых чисел $\mathbb{Z}$. Следовательно, $\mathscr{A}_m = \mathrm{var}_m((\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \mathrm{Exch}))$. Рассмотрим $x = (1, 1) \in (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \mathrm{Exch})$. Тогда $(x^2)\,\mathrm{Exch} = (2, 2) \neq (-2, -2) = x^{-2}$ и поэтому тождество (7) нарушается на $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \mathrm{Exch})$. Таким образом, $\mathscr{A}_m$ не содержится в $\mathscr{S}$. Ясно, что $\mathscr{I} \subset \mathscr{S}$. Тем самым доказана

Теорема 2.1. *Многообразие $\mathscr{S}$ является неабелевым накрытием многообразия m-групп $\mathscr{I}$.*

3. Накрытия в решетке $M_{\mathscr{R}_m}$

Всякое многообразие о-аппроксимируемых ℓ-групп определяется своими линейно упорядоченными группами. Как уже отмечалось, многообразие всех о-аппроксимируемых ℓ-групп $\mathscr{R}$ реверсивно. Из этого следует, что всякое многообразие о-аппроксимируемых m-групп определяется группами вида $(G \times G^*, \mathrm{Exch})$, содержащимися в этом многообразии (здесь G — линейно упорядоченная группа).

Лемма 3.1. *Если H — m-идеал m-группы $(G \times G^*, \mathrm{Exch})$, то $H = (A \times A^*, \mathrm{Exch})$, где A — ℓ-идеал ℓ-группы G.*

Доказательство. Так как H является и ℓ-идеалом, то $H = A \times B^*$, где A, B — выпуклые нормальные ℓ-подгруппы G. Из того, что H есть m-идеал, т. е. $(H)\,\mathrm{Exch} = H$, следует, что $A \times B^* = B \times A^*$, и поэтому $A = B$. □

Пусть $\mathscr{V}_1, \mathscr{V}_2$ — произвольные многообразия m-групп.

Следствие 3.2. *Предположим, что $(G \times G^*, \mathrm{Exch}) \in \mathscr{V}_1 \vee \mathscr{V}_2$. Тогда $(G \times G^*, \mathrm{Exch}) \in \mathscr{V}_1$ или $(G \times G^*, \mathrm{Exch}) \in \mathscr{V}_2$.*

Доказательство. По предложению 1.1 работы [1] в $(G \times G^*, \mathrm{Exch})$ существуют такие m-идеалы X, Y, что $(G \times G^*, \mathrm{Exch})/X \in \mathscr{V}_1$, $(G \times G^*, \mathrm{Exch})/Y \in \mathscr{V}_2$ и $X \cap Y = e$. По лемме 3.1 или $X = e$, или $Y = e$. □

Лемма 3.3. *Группы $(G \times G^*, \mathrm{Exch})$, $(G^* \times G, \mathrm{Exch})$ m-изоморфны.*

Доказательство. Пусть $x = (g, h) \in (G \times G^*, \mathrm{Exch})$. Прямая проверка показывает, что отображение τ, определяемое правилом $(x)\tau = (h, g)$, будет искомым. □

Далее изучаются только о-аппроксимируемые многообразия.

Пусть $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, $\beta \neq 1$, — (b)-бесконечная циклическая группа и A — подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}$ действительных чисел такая, что $\beta A = A$. Через B_β обозначим полупрямое произведение (b) и A, где $a^b = \beta a$ для любого $a \in A$. Любой элемент $g \in B_\beta$ единственным образом представим в виде пары $g = (b^k, a)$, $k \in \mathbb{Z}$, $a \in A$. Группа B_β является линейно упорядоченной группой относительно лексикографического порядка. Пусть $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $\frac{m}{n} > 1$ и $m > 0$, $n > 0$. Рассмотрим тождество

$$|((|[x,y]|^n)^{|x|\vee|y|} \wedge |[x,y]|^m)|[x,y]|^{-m}| \\ \wedge |((|[z,t]|^n)^{(|z|\vee|t|)^{-1}} \wedge |[z,t]|^m)|[z,t]|^{-m}| = e. \quad (9)$$

Лемма 3.4. *Тождество* (9) *верно на группе* $(B_\beta \times B_\beta^*, \mathrm{Exch})$ *тогда и только тогда когда* $\beta \geq \frac{m}{n}$ *или* $\beta \leq \frac{n}{m}$.

Доказательство. Пусть $x, y, z, t \in (B_\beta \times B_\beta^*, \mathrm{Exch})$. Тогда

$$|[x,y]| = ((e, |a|), (e, -|a'|)), \quad |[z,t]| = ((e, |\hat{a}|), (e, -|\tilde{a}|)),$$

$$|x| \vee |y| = ((b^k, a_1), (b^{-s}, a_2)), \quad |z| \vee |t| = ((b^r, a_3), (b^{-l}, a_4))$$

(здесь $|a|$ означает обычный модуль числа a). Можно считать, что коммутаторы неединичны и числа k, s, r, l больше нуля. Тогда

$$(|[x,y]|^n)^{|x|\vee|y|} = \left((e, \beta^k n|a|), \left(e, -\frac{n|a'|}{\beta^s}\right)\right),$$

$$(|[z,t]|^n)^{(|z|\vee|t|)^{-1}} = \left(\left(e, \frac{n|\hat{a}|}{\beta^r}\right), (e, -\beta^l n|\tilde{a}|)\right).$$

Предположим, что $\beta \geq \frac{m}{n} > 1$. Тогда $\beta^k n|a| \geq m|a|$ и поэтому (9) выполнено на первой компоненте. Также имеем $-\beta^l n|\tilde{a}| \leq -m|\tilde{a}|$, что влечет $-\beta^l n|\tilde{a}| \overset{R}{\geq} -m|\tilde{a}|$. Следовательно, (9) верно на второй компоненте, и тем самым случай $\beta \geq \frac{m}{n}$ рассмотрен. Случай $\beta \leq \frac{n}{m}$ рассматривается аналогично.

Пусть $\frac{n}{m} < \beta < \frac{m}{n}$. Непосредственные вычисления показывают, что в этом случае (9) нарушается при $x = z = ((b,0),(b,0))$, $y = t = ((e,a),(e,a))$, $a > 0$. $\square$

Пусть $V_\beta = \mathrm{var}_\ell(B_\beta)$, $V^*_\beta = \mathrm{var}_\ell(B^*_\beta)$. Тогда многообразие ℓ-групп $\Psi_\beta = V_\beta \vee V^*_\beta$ реверсивно и $\Psi_\beta = \mathrm{var}_\ell(B_\beta, B^*_\beta)$. Группа $T_\beta = \mathbb{R}\leftthreetimes(b)$ является дедекиндовым пополнением B_β и, как хорошо известно (см., например, [5, лемма 10, с. 29]), $V_\beta = \mathrm{var}_\ell(T_\beta)$. Таким образом, используя лемму 3.3 и следствие 3.2, имеем

$$\Psi_{\beta_m} = \mathrm{var}_m((T_\beta \times T^*_\beta, \mathrm{Exch}), (T^*_\beta \times T_\beta, \mathrm{Exch})) = \mathrm{var}_m((T_\beta \times T^*_\beta, \mathrm{Exch})).$$

Зададим многообразие ℓ-групп V тождеством

$$(|[x,y]|)^{|x|\vee|y|} \wedge |[x,y]|^4)|[x,y]|^{-4}| = e.$$

Тогда многообразие ℓ-групп $\phi(V)$ задается тождеством

$$|((|[z,t]|)^{(|z|\vee|t|)^{-1}} \wedge |[z,t]|^4)|[z,t]|^{-4}| = e.$$

Следовательно, реверсивное многообразие ℓ-групп $\Psi = V \vee \phi(V)$ определяется тождеством

$$\|((|[x,y]|)^{|x|\vee|y|} \wedge |[x,y]|^4)|[x,y]|^{-4}\| \wedge \|((|[z,t]|)^{(|z|\vee|t|)^{-1}} \wedge |[z,t]|^4)|[z,t]|^{-4}\| = e. \tag{10}$$

Через Ψ_m обозначим многообразие m-групп, определяемое (10).

Как обычно, $g \sim h$ означает, что элементы g, h ℓ-группы G архимедово эквивалентны, а $g \gg h$ — что g много больше h.

Пусть $x, y \in G$ и $[x,y] \neq e$. Предположим, что скачок выпуклых подгрупп $A \succ B$, определяемый $[x,y]$, инвариантен относительно сопряжения элементом $|x| \vee |y|$. Рассмотрим в $(G \times G^*, \mathrm{Exch})$ m-подгруппу H, порожденную $(|x| \vee |y|, |x| \vee |y|), (A \times A^*)$. Подгруппа $H_1 = (B \times B^*, \mathrm{Exch})$ является m-идеалом H, и $H/H_1 = H_{\beta(x,y)} \cong (B_{\beta(x,y)} \times B^*_{\beta(x,y)}, \mathrm{Exch})$ для подходящего $\beta(x,y) \neq 1$.

Лемма 3.5. *Пусть $(G \times G^*, \mathrm{Exch})$ удовлетворяет условиям:*

1) *тождество* (9) *верно на* $(G \times G^*, \mathrm{Exch})$ *при* $m = 3, n = 1$,

2) *для всех групп* $H_{\beta(x,y)}$ *выполняется или* $\beta(x,y) \geq 5$, *или* $\beta(x,y) \leq \frac{1}{5}$.

Тогда $(G \times G^*, \mathrm{Exch}) \in \Psi_m$.

Доказательство. Пусть $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$, $t = (t_1, t_2) \in (G \times G^*, \mathrm{Exch})$. Проверим выполнимость (10) на первой компоненте. Возможны следующие случаи.

1. Скачки выпуклых подгрупп, определяемые $[x_1, y_1]$, $[z_1, t_1]$, неинвариантны при сопряжении $|x_1|\vee|y_1|$, $|z_1|\vee|t_1|$. Тогда в силу условия 1 или $|[x_1,y_1]|^{|x_1|\vee|y_1|} \gg |[x_1,y_1]|$, или $|[z_1,t_1]|^{(|z_1|\vee|t_1|)^{-1}} \gg |[z_1,t_1]|$, что влечет выполнимость (10).

2. $|[x_1,y_1]|^{|x_1|\vee|y_1|} \sim (|[x_1,y_1]|, |[z_1,t_1]|)^{(|z_1|\vee|t_1|)^{-1}} \ll |[z_1,t_1]|$. В этом случае скачок выпуклых подгрупп $A \succ B$, определяемый $[x_1,y_1]$, инвариантен относительно сопряжения элементом $|x_1|\vee|y_1|$ и тогда $|[x_1,y_1]|^{|x_1|\vee|y_1|} \geq |[x_1,y_1]|^3$. Следовательно, в группе $H_{\beta(x_1,y_1)}$ имеем $\overline{|[x_1,y_1]|}^{|x_1|\vee|y_1|} \geq \overline{|[x_1,y_1]|}^3$, и поэтому в силу условия 2 $\beta(x_1,y_1) \geq 5$. Таким образом, $|[x_1,y_1]|^{|x_1|\vee|y_1|} \geq |[x_1,y_1]|^4|[x_1,y_1]|v$, где $v \in B$. Поэтому $|[x_1,y_1]|^{|x_1|\vee|y_1|} \geq |[x_1,y_1]|^4$, и все доказано.

3. $|[x_1,y_1]|^{|x_1|\vee|y_1|} \ll (|[x_1,y_1]|, |[z_1,t_1]|)^{(|z_1|\vee|t_1|)^{-1}} \sim |[z_1,t_1]|$.

4. $|[x_1,y_1]|^{|x_1|\vee|y_1|} \sim (|[x_1,y_1]|, |[z_1,t_1]|)^{(|z_1|\vee|t_1|)^{-1}} \sim |[z_1,t_1]|$.

Случаи 3, 4 рассматриваются по аналогии со случаем 2. Доказательство для второй компоненты аналогично. $\square$

Пусть $3 \le \beta \le 5$ и $x, y \in (B_\beta \times B_\beta^*, \mathrm{Exch})$. Тогда

$$|[x,y]| = ((e,|a|),(e,-|a'|)), \quad |x| \vee |y| = ((b^{|k|}, a_1),(b^{-|s|}, a_2)).$$

Предположим, что $[x,y] \ne e$. Тогда $a^2 + a'^2 \ne 0$ и $k^2 + s^2 \ne 0$. Поэтому

$$z = |[x,y]|(|[x,y]|\,\mathrm{Exch})^{-1} = ((e,c),(e,-c)), \quad c = |a| + |a'| > 0,$$

$$t = (|x| \vee |y|)((|x| \vee |y|)\,\mathrm{Exch})^{-1} = ((b^r, \tilde{a}),(b^{-r}, \hat{a})), \quad r = |k| + |s|,$$

$$h = z^t(z^t)\,\mathrm{Exch} = ((e,d),(e,d)), \quad \text{где } d = \frac{\beta^{2r}-1}{\beta^r}c > 0.$$

Рассмотрим $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, $m > 0$, $n > 0$, такое, что $\frac{m}{n} \ge \beta$. Тогда

$$|h^t(h^t \vee h^5)^{-1}|^m = \begin{cases} ((e, m(5-\beta)d),(e,0)), & \text{если } r = 1, \\ ((e,0),(e,0)), & \text{если } r > 1, \end{cases}$$

$$(|h^t(h^t \vee h^5)^{-1}|^n)^t = \begin{cases} ((e, \beta n(5-\beta)d),(e,0)), & \text{если } r = 1, \\ ((e,0),(e,0)), & \text{если } r > 1. \end{cases}$$

Так как $n(5-\beta)\beta d \le m(5-\beta)d$, в этом случае на $(B_\beta \times B_\beta^*, \mathrm{Exch})$ выполнено тождество

$$(|h^t(h^t \vee h^5)^{-1}|^n)^t \vee |h^t(h^t \vee h^5)^{-1}|^m = |h^t(h^t \vee h^5)^{-1}|^m. \tag{11}$$

Лемма 3.6. *Если $3 < \frac{m}{n} < \beta < 5$, то тождество* (11) *нарушается на группе* $(B_\beta \times B_\beta^*, \mathrm{Exch})$.

Доказательство. Прямые вычисления показывают, что в этом случае (11) нарушается при $x = ((b,0),(e,0))$, $y = ((e,a),(e,0))$, $a > 0$. □

Предложение 3.7. *Многообразие m-групп Ψ_m имеет континуум накрытий в решетке $M_{\mathscr{R}_m}$.*

Доказательство. Пусть $3 \le \beta < 4$. Полагаем $\mathscr{Z}_\beta = \Psi_m \vee \Psi_{\beta_m}$. Так как $\beta < 4$, то $(T_\beta \times T_\beta^*, \mathrm{Exch}) \notin \Psi_m$ и поэтому $\Psi_m \subset \mathscr{Z}_\beta$. Предположим, что существует многообразие m-групп $\mathscr{X}$ такое, что $\Psi_m \subset \mathscr{X} \subset \mathscr{Z}_\beta$. Поскольку $\mathscr{X}$ — o-аппроксимируемое многообразие, существует m-группа $(G \times G^*, \mathrm{Exch}) \in \mathscr{X} \setminus \Psi_m$. По следствию 3.2 $(G \times G^*, \mathrm{Exch}) \in \Psi_{\beta_m}$. По лемме 3.4 тождество (9) при $m = 3$, $n = 1$ выполнено в Ψ_{β_m} и поэтому на группе $(G \times G^*, \mathrm{Exch})$. Рассмотрим группу $H_{\beta(x,y)}$ для подходящих $x, y \in G$. В силу леммы 3.3 можно считать, что $\beta(x,y) \ge 3$. По лемме 3.4 $\beta(x,y) \ge \beta$. Если $\beta(x,y) = \beta$, то $\mathscr{X} = \mathscr{Z}_\beta$, что противоречит нашему предположению о многообразии $\mathscr{X}$. Пусть $\beta(x,y) > \beta$. Тогда существует $q \in \mathbb{Q}$ такое, что $\beta(x,y) > q > \beta$. Лемма 3.6 гарантирует, что $\beta(x,y) \ge 5$. Таким образом, группа $(G \times G^*, \mathrm{Exch})$ удовлетворяет условиям леммы 3.5, и поэтому $(G \times G^*, \mathrm{Exch}) \in \Psi_m$, что невозможно. Итак, $\mathscr{Z}_\beta$ является накрытием Ψ_m. Из леммы 3.4 следует, что для различных $\beta, \beta' \in [3,4)$ многообразия m-групп $\mathscr{Z}_\beta$ и $\mathscr{Z}_{\beta'}$ также будут различны. □

Рассмотрим $4 < \alpha < 5$. Если α является рациональным числом, то определим многообразие m-групп Ψ_{α_m} с помощью тождества (9). Если же α иррационально, то $\alpha = \sup\{\frac{m_i}{n_i} \mid i \in I\}$, $\frac{m_i}{n_i} \in \mathbb{Q}$, $\frac{m_i}{n_i} > 4$. В этом случае Ψ_{α_m} зададим системой тождеств $\{\Phi_i^\alpha\}$, где каждое Φ_i^α получено из (9) заменой m на m_i и n на n_i соответственно.

Теорема 3.8. *Каждое из многообразий Ψ_{α_m} имеет континуум накрытий в $M_{\mathscr{R}_m}$, и все они различны.*

Доказательство с соответствующими изменениями повторяет доказательство предложения 3.7. $\square$

Пусть многообразие ℓ-групп $\mathscr{V}$ задается системой тождеств:

$$|(|[x,y]|^2 \vee |[x,y]|^y)|[x,y]|^{-2}| \wedge |(|[x,y]|^2 \vee |[x,y]|^x)|[x,y]|^{-2}| \\ \wedge |(|[x,y]|^{|x|\vee|y|} \vee |[x,y]|^n)|[x,y]|^{-n}| \wedge |(|[x,y]|^{(|x|\vee|y|)^{-1}} \vee |[x,y]|^m)|[x,y]|^{-m}| = e \tag{12}$$

(m, n — натуральные числа; $m, n \geq 2$).

Это многообразие введено Н. Я. Медведевым в [6]. В работе [7] доказано, что многообразие $\mathscr{V}$ реверсивно. Поэтому система (12) определяет многообразие m-групп $\mathscr{V}_m$. В группе B_β для каждого $k \in \mathbb{Z}$ рассмотрим подгруппу $B_{\beta^k} = (b^k)\lambda A$. Относительно индуцированного порядка B_{β^k} является линейно упорядоченной группой. Пусть $\Psi_{\beta^k_m} = \mathrm{var}_m((B_{\beta^k} \times B^*_{\beta^k}, \mathrm{Exch}))$. Из леммы 3.4 следует

Лемма 3.9. *Если $k \neq 1$, то $\Psi_{\beta^k_m} \subset \Psi_{\beta_m}$.*

Лемма 3.10. *Для любого β m-группа $(B_\beta \times B^*_\beta, \mathrm{Exch})$ не принадлежит $\mathscr{V}_m$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 12 в [5, с. 35]. $\square$

Теорема 3.11. *Многообразие $\mathscr{V}_m$ не имеет накрытий в решетке $M_{\mathscr{R}_m}$.*

Доказательство. Предположим противное, и пусть $\overline{\mathscr{V}}_m$ — накрытие $\mathscr{V}_m$ в решетке $M_{\mathscr{R}_m}$. Тогда существует m-группа $(G \times G^*, \mathrm{Exch}) \in \overline{\mathscr{V}_m} \setminus \mathscr{V}_m$. Поэтому найдутся $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in (G \times G^*, \mathrm{Exch})$ и натуральные числа $m, n \geq 2$ такие, что

1) $|(|[x,y]|^2 \vee |[x,y]|^y)|[x,y]|^{-2}| > e$, $|(|[x,y]|^2 \vee |[x,y]|^x)|[x,y]|^{-2}| > e$;

2) $|(|[x,y]|^{|x|\vee|y|} \vee |[x,y]|^n)|[x,y]|^{-n}| > e$, $|(|[x,y]|^{(|x|\vee|y|)^{-1}} \vee |[x,y]|^m)|[x,y]|^{-m}| > e$.

Из 1, 2 следует, что $|[x_1,y_1]|^{|x_1|\vee|y_1|} \sim |[x_1,y_1]|$ или $|[x_2,y_2]|^{|x_2|\vee|y_2|} \sim |[x_2,y_2]|$. Поэтому $H_{\beta(x_1,y_1)} \in \overline{\mathscr{V}}_m$ или $H_{\beta(x_2,y_2)} \in \overline{\mathscr{V}}_m$. Пусть $H_{\beta(x_1,y_1)} \in \overline{\mathscr{V}}_m$. По лемме 3.10 $H_{\beta(x_1,y_1)} \notin \mathscr{V}_m$ и тем самым

$$\mathrm{var}_m(H_{\beta(x_1,y_1)}) \vee \mathscr{V}_m = \overline{\mathscr{V}}_m = \mathrm{var}_m(H_{\beta^2(x_1,y_1)}) \vee \mathscr{V}_m,$$

что противоречит лемме 3.9. $\square$

Следствие 3.12. *Многообразие $\mathscr{V}_m$ не имеет независимого базиса тождеств.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathscr{V}_m \subset \mathscr{R}_m$ и поэтому по теореме 3.11 $\mathscr{V}_m$ не имеет конечного базиса тождеств. Из [8] следует, что $\mathscr{V}_m$ не имеет независимого бесконечного базиса тождеств. $\square$

Автор выражает благодарность членам «Algebra and Logic Group» Университета Саскетчеван за поддержку и гостеприимство во время его визита.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Giraudet M., Rachunek J.* Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Čzechoslovak Math. J. 1999. V. 49, N 124. P. 743–766.

2. *Huss M. E., Reilly N. R.* On reversing the order of a lattice ordered group // J. Algebra. 1984. V. 91, N 1. P. 176–191.
3. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.
4. *Kopytov V. M., Medvedev N. Ya.* The theory of lattice-ordered groups. Dordrecht a.o.: Kluwer Acad. Publ., 1994.
5. *Медведев Н. Я.* Многообразия решеточно упорядоченных групп. Барнаул: Изд-во Алтайского ун-та, 1987.
6. *Медведев Н. Я.* О решетке o-аппроксимируемых ℓ-многообразий // Čzechoslovak Math. J. 1984. T. 34, № 1. C. 6–17.
7. *Medvedev N. Ya., Morozova S. V.* On covers in the lattice of representable ℓ-varieties // Čzechoslovak Math. J. 1998. V. 48, N 123. P. 821–831.
8. *Горбунов В. А.* Покрытия в решетках квазимногообразий и независимая аксиоматизируемость // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 5. С. 507–548.

Статья поступила 25 октября 2004 г.

Зенков Алексей Владимирович
Алтайский гос. аграрный университет, кафедра математики,
пр. Красноармейский, 98, Барнаул 656049
alexey_zenkov@yahoo.com