Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2006. Том 47, № 1

УДК 512.54

ОБ ЭНГЕЛЕВОЙ ДЛИНЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ЭНГЕЛЕВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Л. В. Долбак

Аннотация: Рассматривается связь между энгелевыми длинами элементов и энгелевой длиной их произведения. Приводится контрпример к вопросу 11.88 из «Коуровской тетради» [1].

Ключевые слова: энгелев элемент, энгелева группа, энгелева длина элемента.

Вопросы, связанные с энгелевыми группами и энгелевыми элементами, рассматривались во многих работах по теории групп. При этом отмечалось, что до сих пор не найдены ответы на следующие вопросы: будет ли в произвольной группе произведение нормальных энгелевых подгрупп снова энгелевой подгруппой, будет ли множество энгелевых элементов образовывать подгруппу [2, 3], см. также [4]?

В основном мы используем стандартные обозначения и определения теории групп [4, 5]. Напомним определение энгелева элемента.

Определение 1. Элемент g произвольной группы G называется *энгелевым* (или *ограниченно энгелевым*), если для любого $a \in G$ существует натуральное число $n = n(g)$, удовлетворяющее равенству $[a, g; n] = 1$. Здесь $[a, g; 1] = [a, g]$ и $[a, g; i + 1] = [[a, g; i], g]$.

Так определенный энгелевый элемент иногда называют *левым энгелевым*, чтобы отличить его от правого энгелева элемента. Поскольку правые энгелевы элементы в нашей работе не рассматриваются, то термин *левый энгелевый элемент* употреблять не будем.

Определение 2. *Энгелевой длиной* $l_a(g)$ произвольного элемента g из группы G относительно элемента a называется наименьшее число l, удовлетворяющее равенству $[a, g; l] = 1$. Обозначим через $l(g) = \max\limits_{a \in G} l_a(g)$ энгелеву длину элемента g.

Определение 3. Группа называется *энгелевой*, если каждый ее элемент энгелев.

Некоторые подходы к решению вопроса энгелевости произведения энгелевых элементов предложил В. А. Романьков, поставив в [1] вопрос 11.88. В нем спрашивается о существовании линейной (полиномиальной) функции $\varphi(x, y)$ такой, что $l(uv) \le \varphi(l(u), l(v))$.

Вопрос об ограниченности энгелевой длины произведения энгелевых элементов полиномиальной функцией решен в данной статье отрицательно. Однако это не указывает путей решения основного вопроса, связанного с энгелевостью произведения энгелевых элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00320).

Автор благодарен своему научному руководителю В. В. Блудову за ценные консультации и помощь в подготовке статьи.

Приведем пример группы, который будет необходим нам при доказательстве основного результата.

Пример 1. Рассмотрим семейство нильпотентных групп H_n, $n \in \mathbb{N}$, где

$$H_n = \left\langle b_n, c_n \mid b_n^{p^n} = c_n^p = \left[b_n^{c_n^i}, b_n^{c_n^j}\right] = 1 \ \forall i \in \mathbb{N}\right\rangle.$$

Положим $b_{i,n} = b_n^{c_n^i}$. Подгруппу группы H_n, порожденную всеми $b_{i,n}$, обозначим через B_n. Группа B_n — нормальная абелева p-подгруппа группы H_n. Вся группа H_n является полупрямым произведением группы B_n на циклическую p-группу $C_{p,n} = \left\langle c_n \mid c_n^p = 1\right\rangle$ при помощи автоморфизма $b_{i,n}^{c_n} = b_{i+1,n}$, где сложения в индексах производятся по модулю p: $H_n = B_n \leftthreetimes C_{p,n}$. Обозначим через N подгруппу группы $B_n \leftthreetimes C_{p,n}$, порожденную элементом $b_{0,n}b_{1,n}\dots b_{p-1,n}$, N — нормальная подгруппа группы $B_n \leftthreetimes C_{p,n}$. Фактор-группу $(B_n \leftthreetimes C_{p,n})/N$ обозначим через K_n. Заметим, что $(b_{0,n}c_n)^p = b_{0,n}b_{1,n}\dots b_{p-1,n}$. Таким образом, группа K_n имеет представление

$$K_n = \left\langle b_{0,n}, c_n \mid (b_{0,n}c_n)^p = c_n^p = b_{0,n}^{p^n} = [b_{i,n}, b_{j,n}] = 1,\ i,j = 0,1,\dots,p-2\right\rangle.$$

Для каждого натурального $n > 1$ пусть $G_n = A \wr K_n$ — сплетение циклической p-группы $A = \langle a \mid a^p = 1\rangle$ и определенной выше группы K_n.

Теорема 1. *Существуют энгелевы группы, для которых энгелева длина произведения двух элементов не ограничена никакой полиномиальной функцией от энгелевых длин сомножителей.*

Для доказательства теоремы нам понадобятся три технические леммы.

Лемма 1. *Пусть H — нормальная подгруппа группы G и $x \in G$ — энгелев элемент. Если $l_h(x) \le k$ для всех $h \in H$ и $l(\bar{x}) \le n$, где $\bar{x}$ – образ элемента x в G/H, то $l(x) \le n + k$.*

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $g \in G$ и соответствующий ему смежный класс $\bar{g} = gH$. По условию леммы $[\bar{g}, \bar{x}; n] = \bar{1}$, т. е. $[g, x; n]H = H$. Таким образом, $[g, x; n] \in H$. По условию леммы $[[g, x; n], x; k] = 1$. В силу произвольности выбора элемента g получаем $l(x) \le n + k$.

Индукцией по n легко доказывается

Лемма 2. *Пусть в группе G элементы x и y удовлетворяют соотношению $[x, x^{y^i}] = 1$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется*

$$[x, y; n] = x^{(-1)^n} x^{(-1)^{n-1}\binom{n}{1}y} x^{(-1)^{n-2}\binom{n}{2}y^2} \dots x^{-\binom{n}{n-1}y^{n-1}} x^{y^n}.$$

Лемма 3. *Пусть H — подгруппа группы G, $x \in H$, $y \in G$ и элементы x, y удовлетворяют соотношению $[x, x^{y^i}] = 1$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Если порядки элементов x и y равны p^n и p соответственно, то $[x, y; n(p-1)+1] = 1$.*

Доказательство. Сначала покажем, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется $[x, y; n(p-1)+1] = \left[z_n^p, y\right]$, где $z_n \in H^y$. Доказательство проведем индукцией по n.

При $n = 1$ по лемме 2 получаем

$$\begin{aligned}[x, y; p] &= x^{-1} x^{\binom{p}{1} y} x^{-\binom{p}{2} y^2} \dots x^{-\binom{p}{p-1} y^{p-1}} x^{y^p} \\ &= x^{\binom{p}{1} y} x^{-\binom{p}{2} y^2} \dots x^{-\binom{p}{p-1} y^{p-1}} = \bigl(x^{\alpha_1 y + \alpha_2 y + \dots + \alpha_{p-1} y^{p-1}}\bigr)^p \\ &= \bigl(x^{(\beta_1 y - \beta_1 y^2) + (\beta_2 y^2 - \beta_2 y^3) + \dots + (\beta_{p-2} y^{p-2} - \beta_{p-2} y^{p-1}) + \beta_{p-1} y^{p-1}}\bigr)^p,\end{aligned}$$

где $\beta_i = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i$, $i \in \overline{1, p-1}$. Заметим, что $\beta_{p-1} = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{p-1} = 0$, так как эта сумма кратна сумме биномиальных коэффициентов. Тем самым

$$[x, y; p] = ([x^{\beta_1 y}, y][x^{\beta_2 y^2}, y] \dots [x^{\beta_{p-2} y^{p-2}}, y])^p = \bigl[z_1^p, y\bigr],$$

где $z_1 \in H^y$.

Проверим утверждение для $n + 1$:

$$[x, y; (n+1)(p-1)+1] = \bigl[\bigl[z_n^{p^n}, y\bigr], y; p-1\bigr] = \bigl[z_n^{p^n}, y; p\bigr].$$

Действуя аналогично случаю $[x, y; p]$, получим

$$[x, y; (n+1)(p-1)+1] = \bigl[z_{n+1}^{p^{n+1}}, y\bigr],$$

где $z_{n+1} \in H^y$.

Таким образом, если порядки элементов x и y равны p^n и p соответственно, то $[x, y; n(p-1)+1] = \bigl[z_n^{p^n}, y\bigr] = 1$.

Доказательство теоремы. Рассмотрим построенную в примере 1 группу G_n. Она является p-группой, поэтому нильпотентна и тем более энгелева. Оценим энгелевы длины элементов c_n, $c_n^{-1} b_0$ и их произведения b_0 .

Сначала оценим энгелеву длину элементов c_n, $c_n^{-1} b_0$ относительно элементов группы K_n.

Так как порядки элементов c_n и $c_n^{-1} b_0$ равны p, а порядок элемента b_0 равен p^n, согласно лемме 3 получаем $[b_0, c_n; n(p-1)+1] = 1$ и $\bigl[b_0, c_n^{-1} b_0; n(p-1)+1\bigr] = 1$. Теперь найдем $l_{c_n}\bigl(c_n^{-1} b_0\bigr)$. Порядок элемента c_n равен p, значит, по лемме 3 $\bigl[c_n, c_n^{-1} b_0; p\bigr] = 1$. Таким образом, $l(c_n) \le n(p-1)+1$, $l\bigl(c_n^{-1} b_0\bigr) \le n(p-1)+1$.

Нижняя подгруппа $\overline{A}$ сплетения G_n — элементарная абелева p-группа с порождающими a_g, $g \in K_n$. Найдем энгелевы длины элементов c_n и $c_n^{-1} b_0$ относительно элементов этой группы. Группа $\overline{A}$ является нормальной подгруппой группы G_n, порядок элементов a_g равен p. По лемме 3 получаем $[a_g, c_n; p] = 1$ и $\bigl[a_g, c_n^{-1} b_0; p\bigr] = 1$.

Поскольку $\overline{A}$ — нормальная абелева подгруппа, то $l_{a_g}(c_n) = p$ и $l_{a_g}\bigl(c_n^{-1} b_0\bigr) = p$ для всех $a_g \in \overline{A}$. Отметим, что $[a_g, c_n; k] \ne 1$ при $k < p$.

Так как $\overline{A}$ — нормальная подгруппа группы G_n и $G_n/\overline{A} \cong K_n$, по лемме 1 с учетом того, что $l_{a_g}(c_n) = p$ и $l_{a_g}\bigl(c_n^{-1} b_0\bigr) = p$, получаем $p \le l(c_n)$, $l\bigl(c_n^{-1} b_0\bigr) \le (n+1)p - n + 1$.

Оценим энгелеву длину произведения элементов c_n и $c_n^{-1} b_0$. Имеем $[a_1, b_0] = a_1^{-1} a_{b_0} \ne 1$, $[a_1, b_0, b_0] = a_1 a_{b_0}^{-1} a_{b_0}^{-1} a_{b_0^2} = a_1 a_{b_0}^{-2} a_{b_0^2} \ne 1$, и т. д.

По лемме 2

$$\begin{aligned}[a_1, b_0; p] &= a_1^{(-1)^p} a_1^{(-1)^{p-1} \binom{p}{1} b_0} a_1^{(-1)^{p-2} \binom{p}{2} b_0^2} \dots a_1^{-\binom{p}{p-1} b_0^{p-1}} a_1^{b_0^n} \\ &= a_1^{-1} a_{b_0}^{\binom{p}{1}} a_{b_0^2}^{(-1)^{p+2} \binom{p}{2}} \dots a_{b_0^{p-1}}^{-\binom{p}{p-1}} a_{b_0^p} = a_1^{-1} a_{b_0^p} \ne 1, \dots,\end{aligned}$$

$$[a_1, b_0; p^n] = a_1^{(-1)^{p^n}} a_1^{(-1)^{p^n-1}\binom{p^n}{1} b_0} a_1^{(-1)^{p^n-2}\binom{p^n}{2} b_0^2} \dots a_1^{-\binom{p^n}{(p^n-1)} b_0^{p^n-1}} a_1^{b_0^{p^n}}$$
$$= a_1^{-1} a_{b_0^{p^n}} = 1,$$

значит, $l(b_0) \geq p^n$.

Рассмотрим прямое произведение $\overline{G} = \prod\limits_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Положим

$$u_1 = (c_1, 1, 1, \dots),\ u_2 = (1, c_2, 1, \dots), \dots, u_n = (1, 1, \dots, 1, c_n, 1, \dots).$$

Соответственно $v_n = \big(1, 1, \dots, 1, c_n^{-1} b_0, 1, \dots\big)$. Тогда $l(u_n v_n) \geq p^n$, т. е. $l(u_n v_n)$ не ограничена никакой полиномиальной функцией от $l(u_n)$, $l(v_n)$. Следовательно, не существует полиномиальной функции φ от $l(u_n)$, $l(v_n)$ такой, что $l(u_n v_n) \leq \varphi(l(u_n), l(v_n))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Коуровская тетрадь.* Нерешенные вопросы теории групп. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999.
2. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем. М.: Наука, 1966.
3. *Плоткин Б. И.* Замечания об энгелевых группах и энгелевых элементах в группах и некоторые обобщения // Изв. Урал. гос. ун-та. 2005. № 36. С. 153–166.
4. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1977.
5. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.

Статья поступила 7 марта 2004 г.

Долбак Лариса Владимировна
Иркутский институт повышения квалификации работников образования,
кафедра информатизации образования,
ул. Российская, 21, Иркутск 664025
d_lora@nm.ru