Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2006. Том 47, № 1

УДК 517.53

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ЯДРОМ КОШИ В ДРОБНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Н. К. Блиев

Аннотация: Выделены пространства Бесова, вложенные в класс непрерывных функций, в которых справедлива нётерова теория для линейных сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши. Приводятся результаты, составляющие основу такой теории в классе непрерывных (не по Гёльдеру) в терминах пространств Бесова функций. Рассматриваются наряду с эллиптическими операторами и случаи нарушения условий эллиптичности, т. е. вырождения символа оператора в конечном числе точек.

Ключевые слова: оператор с ядром Коши, сингулярное интегральное уравнение, пространства Бесова, эллиптический оператор, проекторы, аналитическое продолжение.

В работе изучаются свойства интегралов типа Коши по ляпуновскому замкнутому контуру и связанных с ними сингулярных интегральных уравнений в пространствах Бесова, вложенных в пространство непрерывных функций. Эти пространства Бесова не вложены в класс непрерывных по Гёльдеру функций и являются (распадающимися) банаховыми алгебрами с единицей, что представляет собой определенные удобства. Установлены справедливость формул Сохоцкого — Племеля для граничных значений интеграла типа Коши и формулы перестановки сингулярных интегралов, существующих в смысле главного значения, рассмотрены вопросы композиции и регуляризации сингулярных интегральных операторов, доказана нётеровость эллиптических сингулярных операторов с ядром Коши. Такие результаты известны в классах гёльдеровских функций и позволяют в полной мере изучать краевые задачи теории функций. В п. 7° рассматриваются сингулярные интегральные операторы, у которых эллиптичность нарушается в конечном числе точек на контуре интегрирования. Полученные результаты позволяют построить пространства нётеровости таких операторов.

1°. Пусть G — область комплексной плоскости E, ограниченная замкнутым ляпуновским контуром $\Gamma \in C^1_\nu$, $\frac{2}{p} - 1 < \nu \leq 1$, при заданном p, $1 < p < \infty$. Тогда справедливо следующее утверждение [1].

Теорема. *Пусть $f(t)$ принадлежит пространству Бесова $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$, где p, θ, r удовлетворяют одному из условий:*
(а) $1 < p < 2$, $\theta = 1$, $r = \frac{1}{p}$,
(б) $1 < p < 2$, $\theta \geq 1$, $r > \frac{1}{p}$,
(в) $p \geq 2$, $\theta \geq 1$, $r > 1 - \frac{1}{p}$.

При этом выполнено неравенство $r + \frac{1}{p} - 1 < \nu \le 1$. Тогда интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau - z}, \quad z \in G, \tag{1}$$

как функция z принадлежит $B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G)$, где $\alpha = r + \frac{1}{p} - 1$, причем

$$\|\Phi(z)\|_{B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G)} \le M\|f\|_{B^r_{p,\theta}(\Gamma)}. \tag{2}$$

Здесь и в дальнейшем M (с индексом и без индекса) означает положительную постоянную (не обязательно одну и ту же в разных случаях), не зависящую от рядом стоящих сомножителей.

Заметим, что в случаях (б) и (в) пространство $B^r_{p,\theta}(\Gamma)$ вложено в класс непрерывных по Гёльдеру функций $C_\mu(\Gamma)$ при некотором $0 < \mu \le 1$. При этом из оценки (2) следуют известные результаты [2, 3].

В случае (а) $B^r_{p,\theta}(\Gamma) = B^{1/p}_{p,1}(\Gamma)$ вложено [4] в пространство непрерывных функций $C(\Gamma)$, но не вложено в $C_\mu(\Gamma)$ ни при каком $0 < \mu \le 1$, причем $B^{1+\alpha}_{p,\theta}(G) = B^{2/p}_{p,1}(G) \hookrightarrow C(\overline{G})$.

Этот результат представляется интересным, поскольку, как известно, интеграл типа Коши с произвольной непрерывной плотностью, вообще говоря, не является непрерывной функцией в замкнутой области.

В дальнейшем для краткости ограничимся случаем (а) и примем обозначение

$$B(\Gamma) = B^{1/p}_{p,1}(\Gamma)\big(B(G) = B^{2/p}_{p,1}(G)\big), \quad 1 < p < 2.$$

Заметим, что $B(\Gamma)$ $(B(G))$ есть коммутативное нормированное кольцо с единицей (банахова алгебра) с обычными операциями сложения и умножения функций [1, 5]. Этим свойством пространства $B(\Gamma)$ будем пользоваться в последующем без особой оговорки.

Интегралы типа Коши и связанные с ними сингулярные операторы имеют глубокие связи с многими разделами математики, механики и теоретической физики, в частности квантовой теорией поля. Они изучались многими авторами и библиографию по этому вопросу можно найти в работах [2, 3, 6, 7], мы используем принятые в них термины и определения.

Функция $\Phi(z) \in B(G)$, представленная интегралом типа Коши (1), имеет след [4] из $B(\Gamma)$, который является сужением $\Phi(z)$ на Γ по непрерывности, т. е. совпадает с ее угловым граничным значением изнутри G:

$$\Phi^+(t) = \lim_{z \to t \in \Gamma} \Phi(z).$$

При этом, учитывая (2), имеем

$$\|\Phi^+(t)\|_{B(\Gamma)} \le M_1\|\Phi(z)\|_{B(G)} \le M_2\|f\|_{B(\Gamma)}. \tag{3}$$

Тогда существует (в смысле главного значения) [8, с. 190] сингулярный интеграл

$$Sf = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau - t} \quad (t \in \Gamma), \tag{4}$$

а для граничных значений интеграла (1) $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ (соответственно изнутри G и извне) справедливы формулы

$$\Phi^+(t) = \frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2}Sf, \quad \Phi^-(t) = -\frac{1}{2}f(t) + \frac{1}{2}Sf. \tag{5}$$

При этом в силу (3) S — ограниченный оператор:

$$\|Sf\|_{B(\Gamma)} \le M\|f\|_{B(\Gamma)}, \tag{6}$$

2°. Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ принадлежат пространству $B(\Gamma)$. Тогда имеет место следующая формула перестановки интегралов:

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-t}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\psi(\tau_1)\,d\tau_1}{\tau_1-t}=\varphi(t)\psi(t)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\psi(\tau_1)\,d\tau_1\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-t)(\tau-\tau_1)},$$

которую удобнее переписать в виде

$$S(\varphi S\psi)+S(\psi S\varphi)=\varphi\psi+S\varphi S\psi. \tag{7}$$

Формула (7) для $\varphi\in L_p(\Gamma)$ $(1<p<\infty)$ и $\psi\in L_q(\Gamma)$ $(q>p'=\frac{p}{p-1})$ имеет место почти всюду на Γ [6, 7]. В нашем случае φ и ψ суммируемы в любой степени $(1\le p\le\infty)$ и в силу (6) $\varphi S\psi\in B(\Gamma)$ и $\psi S\varphi\in B(\Gamma)$, следовательно, формула (7) имеет место всюду на Γ.

Из (7) при $\psi=1$ следует важное соотношение

$$S^2=J, \tag{8}$$

где J — тождественный оператор в $B(\Gamma)$.

3°. Рассмотрим теперь следующий сингулярный оператор (коммутатор):

$$S^u f=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{u(\tau)-u(t)}{\tau-t}f(\tau)\,d\tau,$$

где $u(t)$ — произвольно заданная (непрерывная) функция из $B(\Gamma)$.

Лемма 1. *Оператор S^u вполне непрерывен в $B(\Gamma)$.*

Доказательство. Используя (6), имеем

$$\|S^u f\|_{B(\Gamma)} \le 2M\|u\|_{B(\Gamma)}\cdot\|f\|_{B(\Gamma)}, \tag{9}$$

т. е. S^u — ограниченный оператор $B(\Gamma)$.

Пусть теперь N — произвольное ограниченное множество в $B(\Gamma)$, т. е. существует такое постоянное $M_0>0$, что

$$\sup_{f\in N}\|f\|_{B(\Gamma)}\le M_0.$$

Тогда S^u как ограниченный оператор в $B(\Gamma)$ переводит N в ограниченное множество $S^u(N)$. В силу компактного вложения $B(\Gamma)\subset L^p(\Gamma)$ множество $S^u(N)$ будет компактным в $L^p(\Gamma)$ $(1<p<2)$, т. е. в силу (9)

1) $S^u(N)$ равномерно ограничено в $L_p(\Gamma)$:

$$\sup_{f\in N}\|S^u f\|_p\le M_1,$$

где M_1 — зависящая от u и M_0 постоянная, $\|\cdot\|_p$ — норма в $L^p(\Gamma)$;

2) $S^u(N)$ равностепенно непрерывно по сдвигу: для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta(\varepsilon)>0$, что при всех $|\tau|<\delta$ выполняется неравенство

$$\sup_{f\in N}\|\Delta_\tau S^u f\|_p=\sup_{f\in N}\|(T_\tau-J)S^u f\|_p\le M_2|\tau|^{\frac{1}{p}}<\varepsilon, \tag{10}$$

где T_τ — оператор сдвига в $B(\Gamma)$: $T_\tau\varphi(t)=\varphi(t+\tau)$, $\Delta_\tau\varphi=(T_\tau-J)\varphi$ — первая разность по шагу τ — берется по точкам t и $t+\tau$, лежащим на Γ, в противном случае считается равной нулю. При этом учтено вложение

$$B(\Gamma)\hookrightarrow B^r_{p,\infty}(\Gamma)=H^r_p(\Gamma),\quad r=\frac{1}{p}.$$

Далее, учитывая, что

$$\|(T_\tau-J)(\Delta_\tau S^u f\|_p\le\|(T_\tau(\Delta_\tau S^u f)\|_p+\|\Delta_\tau S^u f)\|_p\le 2\|\Delta_\tau S^u f)\|_p,$$

и пользуясь выражением для нормы в $B(\Gamma)$, в силу (9) получаем

$$\sup_{f\in N}\|(T_\tau-J)S^u f\|_{B(\Gamma)}\le\sup_{f\in N}\|(T_\tau-J)S^u f\|_p+2\sup_{f\in N}\int\limits_\Gamma\|\Delta_\tau S^u f\|_p\frac{|d\tau|}{|\tau|^{1+r}}<\infty. \tag{11}$$

Рассмотрим отдельно второе слагаемое справа:

$$\int\limits_\Gamma\|\Delta_\tau S^u f\|_p\frac{|d\tau|}{|\tau|^{1+r}}=\int\limits_0^l\|\Delta_\tau S^u f\|_p\frac{ds}{|\tau(s)|^{1+r}}=\int\limits_0^\eta A ds+\int\limits_\eta^l A ds=J_1+J_2,$$

где l — длина контура Γ.

Первый интеграл справа будет меньше произвольно заданного $\varepsilon>0$ при достаточно малом η в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега. Зафиксировав такое $\eta>0$, для второго интеграла получим

$$J_2\le\frac{1}{\eta^{1+r}}\sup_{f\in N}\|\Delta_\tau S^u f\|_p.$$

Таким образом, из (10) и (11) следует, что по заданному $\varepsilon>0$ можно подобрать $\delta>0$ так, что

$$\sup_{f\in N}\|(T_\tau-J)S^u f\|_{B(\Gamma)}<\varepsilon\quad\text{при } |\tau|<\delta.$$

т. е. множество $S^u(N)$ равностепенно непрерывно по сдвигу в $B(\Gamma)$.

Следовательно, $S^u(N)$ как множество, компактное в $L^p(\Gamma)$ и равностепенно непрерывное по сдвигу в $B(\Gamma)$, компактно в $B(\Gamma)$ [4], т. е. S^u вполне непрерывен в $B(\Gamma)$.

4°. В дальнейшем важную роль будут играть операторы

$$P=\frac{1}{2}(J+S),\quad Q=\frac{1}{2}(J-S),$$

которые являются непрерывными в $B(\Gamma)$ (см. (6)). Ясно, что $P+Q=J$. Кроме того, из (5) и (8) вытекает, что

$$P^2=P,\quad Q^2=Q,\quad PQ=QP=0. \tag{12}$$

Таким образом, P и Q суть взаимно дополнительные проекторы в банаховом пространстве $B(\Gamma)$.

Обозначим $G^+=G$ и $G^-=E-\overline{G^+}$ (дополнение $\overline{G}^+$ до полной плоскости). Считаем, что $0\in G^+$, $z=\infty\in G^-$. Тогда из равенств (5) и свойств интеграла типа Коши следует, что оператор $P(Q)$ проектирует пространство $B(\Gamma)$ на подпространство $B^+(\Gamma)$ $(B^-(\Gamma))$ всех функций из $B(\Gamma)$, допускающих аналитическое продолжение в область G^+ (G^-) и обращающихся в нуль на бесконечности, т. е. для функций $f \in B^+(\Gamma)$ $(f \in B^-(\Gamma))$ интеграл типа Коши (1) имеет граничные значения

$$\Phi^+(t) = f(t) \quad (\Phi^-(t) = -f(t)).$$

Это значит, что если $f \in B^+(\Gamma)$ $(f \in B^-(\Gamma))$, то выполняется равенство

$$Sf = f \quad (Sf = -f), \tag{13}$$

и, обратно, если имеет место (13), то силу (5) получаем

$$f \in B^+(\Gamma) \quad (f \in B^-(\Gamma).$$

5°. Справедлива следующая

Теорема 1 [9]. *Каждая функция $a(t) \in B(\Gamma)$, $a(t) \neq 0$ на Γ, допускает факторизацию*

$$a(t) = a^-(t)t^\kappa a^+(t), \quad t \in \Gamma, \tag{14}$$

где $a^\pm(t) \in B^\pm(\Gamma)$. При этом $a^+(z) \neq 0$ $(z \in G^+)$, $a^-(z) \neq 0$ $(z \in G^-)$, $\kappa = \frac{1}{2\pi i}[\ln a(t)]_\Gamma$ — индекс функции $a(t)$.

Соотношению (14) удовлетворяют, например, функции

$$a^\pm = \exp^{\pm\Gamma(z)},$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\ln[\tau^{-\kappa}a(\tau)]\,d\tau}{\tau - z}$$

есть интеграл типа Коши.

6°. Рассмотрим теперь сингулярный интегральный оператор вида

$$(Lf)(t) = a(t)f(t) + b(t)(Sf)(t) + (Tf)(t), \qquad (15),$$

где $a(t), b(t) \in B(\Gamma)$ — заданные функции, S — сингулярный оператор (4), T — вполне непрерывный оператор в $B(\Gamma)$. Ясно, что L определен на $B(\Gamma)$ и является ограниченным (следовательно, и замкнутым) линейным оператором, действующим из $B(\Gamma)$ в $B(\Gamma)$. При помощи проекторов P и Q оператор L записывается в виде

$$L = cP + dQ + T, \tag{16}$$

где под c и d мы понимаем операторы умножения соответственно на функции $c(t) = a(t) + b(t)$ и $d(t) = a(t) - b(t)$.

Введем обозначения

$$\alpha(L) = \dim\ker L \quad \text{и} \quad \beta(L) = \dim\operatorname{coker} L.$$

Говорят, что оператор L *имеет конечную d-характеристику* или *конечный индекс* $\operatorname{ind} L = \alpha(L) - \beta(L)$, если оба числа $\alpha(L)$ и $\beta(L)$ конечны.

Замкнутый нормально разрешимый по Хаусдорфу оператор L называется нётеровым, если его d-характеристика конечна.

Обозначим через W совокупность всех операторов вида (16). Покажем, что W есть алгебра. Ясно, что сложение элементов и умножение на число элементов из W не выводят за пределы W. Рассмотрим теперь произведение (композицию) операторов из W. Для удобства записи обозначим коммутатор через

$[S,u] = S^u$ и заметим, что $[S,u] = 2[P,u]$. Следовательно, при любой заданной $u(t) \in B(\Gamma)$ коммутатор $[P,u]$ вполне непрерывен в $B(\Gamma)$ (лемма 1). Тогда из легко проверяемых соотношений (см. (12)) $[Q,u] = [u,P]$, $PuQ = P[u,Q] = [P,u]Q$ следует полная непрерывность операторов $[Q,u]$, PuQ, QuP.

Пусть теперь $L_1 = c_1P + d_1Q + T_1$, $L_2 = c_2P + d_2Q + T_2$ — два произвольных оператора из W. Тогда в силу изложенного выше имеем

$$L_1L_2 = c_1c_2P + d_1d_2Q + T', \tag{17}$$

где

$$T' = c_1[P,c_2]P + d_1[Q,d_2]Q + c_1(Pd_2Q) + d_1(Qc_2P) + L_1T_2 + T_1L_2 - T_1T_2$$

есть вполне непрерывный оператор в $B(\Gamma)$. Таким образом, $L_1L_2 \in W$, т. е. W — алгебра.

Оператор L назовем *эллиптическим* (или *оператором нормального типа*), если выполняется условие

$$a^2(t) - b^2(t) \neq 0 \quad \text{на } \Gamma.$$

Символом оператора L называется функция $A(t,\theta) = a(t) + \theta b(t)$ ($\theta = \pm 1$, $t \in \Gamma$). Из (17) следует, что произведение (композиция) двух эллиптических операторов есть снова эллиптический оператор.

Теорема 2. *Для эллиптического оператора L вида (16) оператор $\widetilde{L} = c^{-1}P + d^{-1}Q$ является двусторонним регуляризатором.*

Доказательство. Положим

$$c_1(t) = c(t), \quad d_1(t) = d(t), \quad c_2(t) = c^{-1}(t), \quad d_2(t) = d^{-1}(t).$$

Тогда из (17) вытекает, что

$$L\widetilde{L} = P + Q + T' = J + T',$$

где T' — вполне непрерывный оператор в $B(\Gamma)$. Меняя ролями $c(t)$ и $c^{-1}(t)$, $d(t)$ и d^{-1}, получаем

$$\widetilde{L}L = J + T'',$$

где T'' вполне непрерывен в $B(\Gamma)$.

Из теоремы 2 следует, что эллиптический оператор L из (16) является нётеровым оператором в $B(\Gamma)$.

7°. Рассмотрим теперь характеристическую часть оператора (15) в случае нарушения условия эллиптичности в конечном числе точек. При этом воспользуемся общей схемой рассуждений, использованной в [7].

Пусть

$$L^0 = cP + dQ, \tag{18}$$

где операторам умножения c и d соответствуют функции $c(t)$ и $d(t)$, допускающие представления

$$c(t) = \prod_{l=1}^{r}(t-\alpha_l)^{m_l}c_0(t), \quad d(t) = \prod_{k=1}^{s}\left(t^{-1} - \beta_k^{-1}\right)^{n_k}d_0(t). \tag{19}$$

Здесь $c_0(t)$ и $d_0(t)$ не обращаются в нуль на Γ, α_l и β_k ($l = 1,2,\ldots,r$; $k = 1,2,\ldots,s$) считаем для простоты рассуждений попарно различными точками на Γ, m_l и n_k — целые положительные числа.

Таким образом, допускаем, что эллиптичность оператора L_0 нарушается на конечном числе нулей (целых порядков) функций $c(t)$ и $d(t)$. Обозначим

$$\rho_+(t) = \prod_{l=1}^{r}(t-\alpha_l)^{m_l}, \ \sum_{l=1}^{r} m_l = m, \quad \rho_-(t) = \prod_{k=1}^{s}\left(t^{-1} - \beta_k^{-1}\right)^{n_k}, \ \sum_{k=1}^{s} n_k = n. \tag{20}$$

Лемма 2. *Пусть* $f \in B^+(\Gamma)$, $g \in B^-(\Gamma)$ *и* $\rho_+(t)$, $\rho_-(t)$ *определены равенствами* (20). *Тогда* $\rho_+ f \in B^+(\Gamma)$, $\rho_- g \in B^-(\Gamma)$.

Доказательство. В силу (13) для $f \in B^+(\Gamma)$ имеем $Sf = f$. Ясно, что $\rho_+ \in B^+(\Gamma)$, следовательно, $S\rho_+ = \rho_+$. Тогда из формулы (7) следует, что $S(\rho_+ f) = \rho_+ f$. Отсюда, как отмечено выше, в силу (5) вытекает, что $\rho_+ f \in B^+(\Gamma)$.

Аналогично для $g \in B^-(\Gamma)$ будет $Sg = -g$. Функция $\rho_-(t)$ имеет аналитическое продолжение $\rho_-(z)$ в G^-, непрерывное на $\overline{G^-}$. Следовательно, $S\rho_- = -\rho_- + \gamma$, γ — постоянная, определяемая значением ρ_- на бесконечности. Тогда из (7) получим, что $S(\rho_- g) = -\rho_- g$, значит, $\rho_- g \in B^-(\Gamma)$.

Заметим, что из леммы 2, в частности, следует, что если f и g принадлежат $B^\pm(\Gamma)$, то и $fg \in B^\pm(\Gamma)$.

Из леммы 2 также вытекают соотношения

$$\rho_+ P = P\rho_+ P, \quad Q\rho_- Q = \rho_- Q. \tag{21}$$

Лемма 3. *Пусть* $f_+(t) \in B^+(\Gamma)$ *и* $f_-(t) \in B^-(\Gamma)$ — *произвольно заданные функции. Тогда из равенства*

$$\rho_+(t) f_-(t) = \rho_-(t) f_+(t) \quad (\textit{на } \Gamma) \tag{22}$$

следует, что $f_+(t) = f_-(t) = 0$.

Доказательство. Согласно (20)

$$\rho_+(t) = \prod_{l=1}^{r} (t - \alpha_l)^{m_l} = t^m \prod_{l=1}^{r} \Big(1 - \frac{\alpha_l}{t}\Big)^{m_l} = t^m g_-(t),$$

где $g_-(t)$ имеет аналитическое продолжение $g_-(z)$ в G^-, непрерывное на $\overline{G^-}$. Аналогично

$$\rho_-(t) = \prod_{k=1}^{s} \big(t^{-1} - \beta_k^{-1}\big)^{n_k} = t^{-n} \prod_{k=1}^{s} \bigg(1 - \frac{t}{\beta_k}\bigg)^{n_k} = t^{-n} g_+(t),$$

где $g_+(t)$ аналитически продолжается в G^+, оставаясь непрерывной на $\overline{G^+}$.

Перепишем равенство (22) в виде

$$t^{m+n} g_-(t) f_-(t) = g_+(t) f_+(t).$$

На основании леммы 2 $g_-(t)f_-(t) \in B^-(\Gamma)$, $g_+(t)f_+(t) \in B^+(\Gamma)$. Учитывая, что $g_-(t)$ имеет нули на Γ, а $f_-(t)$ — ограниченная функция, получаем, что $p_+(t) = t^{m+n} g_-(t) f_-(t)$ — многочлен степени не более чем $m + n - 1$. Так как $p_+(t) = g_+(t) f_+(t)$ и $f_+(t)$ — ограниченная функция, отсюда следует, что $f_+(t)$ есть многочлен. Аналогичное рассуждение дает, что $f_-(t)$ тоже многочлен.

Тогда из (22) получаем, что

$$f_+(t) = \frac{\rho_+(t)}{\rho_-(t)} f_-(t) \qquad \bigg(f_-(t) = \frac{\rho_-(t)}{\rho_+(t)} f_+(t)\bigg)$$

— многочлен. При этом по допущению $\rho_-(t)$ и $\rho_+(t)$ не имеют общих нулей, $f_+(t)$ и $f_-(t)$ — произвольные представители своих классов, следовательно, (22) возможно только при $f_+(t) = f_-(t) = 0$.

Оператор L^0 из (18) в силу соотношений (21) можно представить в виде

$$L^0 = CD, \tag{23}$$

где C и D — операторы, определяемые равенствами

$$C = c_0 P + d_0 Q, \quad D = \rho_+ P + \rho_- Q. \tag{24}$$

По условию $c_0 \neq 0$ и $d_0(t) \neq 0$ на Γ, следовательно, C является нётеровым (теорема 2) оператором в $B(\Gamma)$. Рассмотрим оператор D. Обозначим через $D^{(-1)}$ оператор (формально обратный к D), определяемый для любой $f \in B(\Gamma)$ формулой

$$D^{(-1)} f = \rho_+^{-1} P f + \rho_-^{-1} Q f. \tag{25}$$

Пусть $\widetilde{B}(\Gamma)$ будет совокупностью всех функций вида (25), где f пробегает пространство $B(\Gamma)$.

Используя соотношения (21), легко непосредственно проверить, что для любой функции $f \in B(\Gamma)$ имеем

$$D^{(-1)} D f = f. \tag{26}$$

Отсюда следует, что $B(\Gamma) \subset \widetilde{B}(\Gamma)$. Обозначим через $\widetilde{D}$ продолжение оператора D на $\widetilde{B}(\Gamma)$, выражаемое формулой

$$\widetilde{D}\varphi = \rho_+ \widetilde{P}\varphi + \rho_- \widetilde{Q}\varphi,$$

где операторы $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ определены для $\varphi = \rho_+^{-1} P f + \rho_- Q f \in \widetilde{B}(\Gamma)$ равенствами

$$\widetilde{P}\varphi = \rho_+^{-1} P f, \quad \widetilde{Q}\varphi = \rho_-^{-1} Q f \quad (f \in B(\Gamma)).$$

Функция $\varphi = \rho_+^{-1} P f + \rho_-^{-1} Q f \in \widetilde{B}(\Gamma)$ согласно лемме 3 однозначно определяет функцию $f \in B(\Gamma)$.

Следовательно, операторы $\widetilde{P}$ и $\widetilde{Q}$ определены однозначно.

С другой стороны, очевидно, что для $f \in B(\Gamma)$ справедливо также равенство

$$\widetilde{D} D^{(-1)} f = f. \tag{27}$$

Таким образом, $D^{(-1)}$ — обратный оператор для $\widetilde{D}$. Из соотношений (26) и (27) следует, что для всех функций $f \in B(\Gamma)$ верны равенства

$$\widetilde{D} f = D f, \quad \widetilde{P} f = P f, \quad \widetilde{Q} f = Q f.$$

Определим норму в $\widetilde{B}(\Gamma)$ по формуле

$$\|\varphi\|_{\widetilde{B}(\Gamma)} = \|\widetilde{D}\varphi\|_{B(\Gamma)} = \|f\|_{B(\Gamma)}.$$

Используя (27), легко видеть, что $\widetilde{B}(\Gamma)$ является банаховым пространством, которое оператор $\widetilde{D}$ изометрически отображает на $B(\Gamma)$. Из (26) следует, что имеем непрерывное вложение $B(\Gamma) \subset \widetilde{B}(\Gamma)$.

Вернемся к представлению (23). Принимая во внимание приведенное выше продолжение $\widetilde{D}$ оператора D на $\widetilde{B}(\Gamma)$, можно расширить область определения оператора L^0 до $\widetilde{B}(\Gamma)$. Данное продолжение оператора L^0 будем рассматривать как оператор из $\widetilde{B}(\Gamma)$ на $B(\Gamma)$ и обозначим его через $\widetilde{L}^0$:

$$\widetilde{L}^0 = C\widetilde{D}. \tag{28}$$

Построенный таким образом оператор $\widetilde{L}^0$ непрерывен из $\widetilde{B}(\Gamma)$ на $B(\Gamma)$. Из представления (28) также следует, что

$$\dim\ker\widetilde{L}^0 = \dim\ker C, \quad \dim\operatorname{coker}\widetilde{L}^0 = \dim\operatorname{coker} C,$$

т. е. оператор $\widetilde{L}^0$ имеет конечную d-характеристику.

Пусть теперь $B^*(\Gamma)$ — сопряженное пространство, состоящее из всех непрерывных функционалов, определенных на $B(\Gamma)$, C^* — сопряженный для C оператор. Тогда в силу изложенного выше справедлива

Теорема 3. *Для того чтобы уравнение*

$$\widetilde{L}^0 f = F \tag{29}$$

имело решение $f \in \widetilde{B}(\Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы $(F, g) = 0$ для любого решения $g \in B^*(\Gamma)$ уравнения $C^* g = 0$. В этом случае общее решение уравнения (29) *имеет вид $f = \widetilde{D}^{(-1)}\psi$, где ψ — любое решение уравнения $C\psi = F$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Блиев Н. К.* Обобщенные аналитические функции в дробных пространствах. Алма-Ата: Наука, 1985.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
3. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.
4. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Физматлит, 1996.
5. *Мазья В. Г., Шапошникова Т. О.* О мультипликаторах в пространствах функций с дробными производными // Докл. АН СССР. 1979. Т. 18, № 4. С. 1065–1067.
6. *Хведелидзе Б. В.* Метод интегралов типа Коши в разрывных граничных задачах теории голоморфных функций одной комплексной переменной // Современные проблемы математики. М.: ВИНИТИ, 1975. Т. 7. С. 5–162. (Итоги науки и техники).
7. *Прёсдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений. М.: Мир, 1979.
8. *Привалов И. И.* Граничные свойства однозначных аналитических функции. М.: Наука, 1950.
9. *Абитбеков И. А., Блиев Н. К.* О разрешимости обобщенной задачи Римана — Гильберта для многосвязной области в дробных пространствах // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1983. Т. 3. С. 1–4.

Статья поступила 13 декабря 2004 г., окончательный вариант — 3 июня 2005 г.

Блиев Назарбай Кадырович
Институт математики МОН РК
ул. Пушкина, 125, Алматы, Казахстан
Bliev@math.kz