*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2006. Том 47, № 1*

*УДК 514.763.254*

# ЗАДАЧА А. Д. АЛЕКСАНДРОВА ДЛЯ CAT(0)–ПРОСТРАНСТВ

**П. Д. Андреев**

**Аннотация:** Решается известная проблема А. Д. Александрова для пространств неположительной кривизны. Основная теорема утверждает, что всякое геодезически полное локально компактное связное на бесконечности пространство $X$ неположительной кривизны в смысле Александрова обладает следующей характеризацией изометрий: всякая биекция $f : X \to X$, сохраняющая вместе с обратным отображением $f^{-1}$ расстояние 1, есть изометрия $X$.

**Ключевые слова:** задача Александрова, пространство неположительной кривизны, изометрия.

## § 1. Введение

В. Н. Берестовский в [1] доказал следующую характеризацию для изометрий пространств Александрова отделенной от нуля отрицательной кривизны.

**Теорема 1.1** [1, теорема 1.1]. *Пусть $X$ — локально компактное геодезически полное односвязное пространство кривизны не больше $K < 0$, в котором все сферы линейно связны. Тогда всякая биекция $f : X \to X$ пространства $X$ на себя, которая вместе с обратным отображением всякий замкнутый шар фиксированного радиуса $r$ отображает на замкнутый шар радиуса $r$, есть изометрия $X$.*

Доказательство теоремы 1.1 опирается на следующее более сильное утверждение.

**Теорема 1.2** [1, теорема 3.1]**.** *Если пространство $X$ такое же, как в теореме 1.1, то его метрика однозначно восстанавливается по его диагональной трубке $V$, соответствующей произвольному числу $r > 0$.*

Здесь под *диагональной трубкой* $V$ метрического пространства $X$, соответствующей числу $r > 0$, понимается множество

$$V := \{(x, y) \in X \times X \mid |xy| \leq r\} \subset X \times X,$$

где $|xy|$ есть расстояние между точками $x, y \in X$. Условие линейной связности сфер в теореме 1.1 эквивалентно условию связности пространства на бесконечности. Последнее означает, что дополнение любого метрического шара в $X$ линейно связно.

В работе В. Н. Берестовского [1] сформулирован вопрос: будут ли справедливы аналогичные утверждения для пространств неположительной кривизны

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00315).

по Александрову (так называемых CAT(0)-пространств)? В настоящей статье на него дается положительный ответ.

Ранее в работе [2] автор рассматривал указанную задачу для пространств неположительной кривизны по Александрову, не допускающих налегания кратчайших. В [3] показано, что пространство Александрова ограниченной сверху кривизны, обладающее свойствами локальной продолжимости и неналегания кратчайших, есть топологическое многообразие с непрерывными относительно дистанционных координат компонентами метрического тензора, поэтому для таких пространств условие связности на бесконечности эквивалентно условию $n > 1$ для топологической размерности $n = \mathrm{TopDim}(X)$.

Рассматриваемые здесь вопросы возникают в связи с проблемой, поставленной в 1960-х гг. А. Д. Александровым. В полном объеме задача Александрова звучит так: описать метрические пространства, для которых всякое отображение на себя, сохраняющее фиксированное расстояние, например расстояние 1, является изометрией.

Одна из первых работ по указанной тематике написана Бэкманом и Куарлесом в 1953 г. [4]. Теорема Бэкмана — Куарлеса утверждает, что при $n \geq 2$ всякое отображение евклидова пространства $\mathbb{E}^n$ в себя, сохраняющее расстояние 1, есть изометрия.

В работах А. Д. Александрова (см., например, [5]) рассматривался ряд аналогичных задач, в частности, доказаны некоторые необходимые и достаточные условия для того, чтобы отображения пространственных форм, сохраняющие конгруэнтность фигур фиксированного класса, были изометриями. Исследования Александрова для пространства Лобачевского были продолжены в статье А. В. Кузьминых [6], где показано, что если отображение $f$ пространства Лобачевского $\Lambda^n$, $n \geq 2$, в себя таково, что для положительных чисел $a, a'$ из $|xy| = a$ следует $|f(x)f(y)| = a'$, то $f$ — изометрия и $a = a'$.

В последнее время интерес к проблеме Александрова и теореме Бэкмана — Куарлеса возобновился в связи с развитием метрической геометрии. Здесь следует обратить внимание на работы Тишки (см., например, [7, 8]), где теорема Бэкмана — Куарлеса обобщается на отображения комплексных пространств и для отображений в $\mathbb{R}^n$ пространства $F^n$, где $F$ есть поле характеристики 0, а также доказываются некоторые дискретные версии этой теоремы.

**1.1. Содержание и структура статьи.** В настоящей статье мы доказываем следующую теорему.

**Теорема 1.3.** *Пусть $X$ — геодезически полное локально компактное связное на бесконечности* CAT(0)*-пространство и $f : X \to X$ — биекция. Если для $f$ выполнено, что $|f(x)f(y)| = 1$ тогда и только тогда, когда $|xy| = 1$, то $f$ есть изометрия пространства $X$.*

Следуя логике статьи [1], мы будем доказывать более сильную теорему, утверждающую, что при условиях теоремы 1.3 метрика пространства однозначно определяется его диагональной трубкой, соответствующей произвольному числу $r > 0$. В дальнейшем мы всегда будем считать $r = 1$, но сохраним термин В. Н. Берестовского «$r$-последовательность» и индекс $r$ в обозначении отрезков $r$-последовательностей. При этом мы будем задействовать также границу

$$\partial V := \{(x, y) \in X \times X \mid |xy| = 1\} \subset X \times X$$

и внутренность

$$\mathrm{Int}\, V := \{(x, y) \in X \times X \mid |xy| < 1\} \subset X \times X$$

диагональной трубки $V$.

**Теорема 1.4.** *Пусть метрическое пространство $(X, d)$ такое же, как в теореме* 1.3, *и $V$ — его диагональная трубка, соответствующая числу* 1. *Пусть метрика $d'$ на множестве $X$ такова, что метрическое пространство $(X, d')$ с диагональной трубкой $V'$ также удовлетворяет условиям теоремы* 1.3. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $V = V'$,
(2) $\partial V = \partial V'$,
(3) $\operatorname{Int} V = \operatorname{Int} V'$,
(4) $d = d'$.

Для доказательства того, что теорема 1.3 является следствием теоремы 1.4, достаточно рассмотреть на $X$ метрику $d' = f^*d$:

$$f^*d(x, y) = d(f(x), f(y)).$$

Для нее в условиях теоремы 1.3 справедливо равенство $\partial V = \partial V'$.

Всякую метрику $d'$, удовлетворяющую условиям теоремы 1.3 и имеющую $V$ своей диагональной трубкой, мы будем называть *метрикой, реализующей* $V$, или, коротко, $V$*-метрикой*. В частности, метрикой, реализующей $V$, является сама метрика $d$. Теорема 1.4 утверждает, что $d$ — единственная метрика на $X$, которая реализует $V$. Однако изначально мы предполагаем существование некоторого множества таких метрик и будем приближаться к доказательству теоремы, последовательно показывая, что произвольная $V$-метрика совпадает с $d$ на все большем подмножестве в $X \times X$.

В § 2 настоящей статьи приводятся некоторые необходимые понятия и факты теории пространств неположительной кривизны и даются основные определения. Непосредственно доказательству теоремы 1.4 для пространств неположительной кривизны по Александрову посвящены § 3, 4. Общий подход к доказательству отличен от стратегии, примененной в статье [1], базовый шаг которой состоит в восстановлении по диагональной трубке $V$ трубки $\frac{1}{2}V$, соответствующей числу $\frac{1}{2}$. Этот шаг применяется одновременно ко всему пространству и затем бесконечно повторяется. В нашем случае метрика восстанавливается на каждой отдельно взятой геодезической. Геодезические в пространствах неположительной кривизны различаются по их рангу. Обычно под рангом геодезической понимается максимальная размерность изометрически вложенного в $X$ евклидова пространства, содержащего данную геодезическую. Здесь мы несколько отходим от этой трактовки и считаем геодезическими высшего ранга геодезические, лежащие на границе вложенной в $X$ плоской полосы. Если геодезическая не лежит на границе плоской полосы, мы называем ее *геодезической ранга один.* Мы задействуем еще одно изменение в трактовке понятия ранга геодезических. Геодезические будут дополнительно подразделяться на геодезические виртуально высшего ранга и геодезические строго ранга один. Точные определения этих понятий даются в п. 2.3.

В § 3 рассматривается случай геодезической виртуально высшего ранга, в § 4 — случай геодезической строго ранга один. В каждой из рассматриваемых ситуаций автор задействует новые конструкции: так называемые «тесемки» для геодезических высшего ранга и «ножницы» для геодезических ранга один.

Автор выражает благодарность В. Н. Берестовскому за полезные обсуждения при подготовке статьи и особую признательность рецензенту за внимание к статье и ряд ценных рекомендаций и замечаний.

## § 2. Основные понятия

**2.1. Необходимые сведения из теории пространств неположительной кривизны.** В этом параграфе мы напоминаем основные определения и факты геометрии пространств Александрова неположительной кривизны. Подробную информацию о геометрии пространств Александрова ограниченной сверху кривизны можно найти в работах [9–11] и др.

Пусть $(X, d)$ — метрическое пространство. В дальнейшем расстояние $d$ между точками $x, y \in X$ будем обозначать через $|xy| := d(x, y)$. Шар радиусом $\rho$ с центром в точке $x \in X$ обозначается через $B(x, \rho)$, соответствующая ему граничная сфера — через $S(x, \rho)$. Для множества $A \subset X$ и $\varepsilon > 0$ множество

$$N_\varepsilon(A) := \{x \in X \mid d(x, a) < \varepsilon \text{ для некоторого } a \in A\}$$

понимается как $\varepsilon$-окрестность $A$. Для замкнутых множеств $A, B \subset X$ *расстояние Хаусдорфа* между $A$ и $B$ равно по определению

$$d_H(A, B) := \inf\{\varepsilon \mid A \subset N_\varepsilon(B),\ B \subset N_\varepsilon(A)\};$$

в частности, если не существует такого $\varepsilon > 0$, что $A \subset N_\varepsilon(B)$ и $B \subset N_\varepsilon(A)$, то $d_H(A, B)$ принимается равным $\infty$.

*Геодезическая* в метрическом пространстве $(X, d)$ есть по определению образ локально изометричного отображения $c : I \to X$ некоторого промежутка $I \subset \mathbb{R}$ в $X$, т. е. такого отображения, что в окрестности $U$ каждой точки $t \in I$ для всех $s_1, s_2 \in U$ выполнено равенство $d(c(s_1), c(s_2)) = |s_1 - s_2|$. Говорят, что отображение $c$ есть *натуральная параметризация* указанной геодезической. В дальнейшем мы будем всегда рассматривать натурально параметризованные геодезические, не делая различий между самой геодезической и ее натуральной параметризацией. Если в качестве окрестности $U$ можно взять весь промежуток $I$, то геодезическая $c$ называется *кратчайшей.* Если при этом $I$ — отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, то мы говорим, что $c(I)$ — это *отрезок, соединяющий* $c(a)$ и $c(b)$. Если $I = \mathbb{R}$, геодезическая $c$ называется *полной геодезической.* Пространство $(X, d)$ называется *геодезическим метрическим пространством*, если любые две точки соединимы отрезком. Геодезическое пространство называется *геодезически полным*, если в нем любая геодезическая может быть продолжена до полной геодезической (не обязательно единственным способом). Из теоремы Хопфа — Ринова (см. [12, теорема 2.3]) следует, что геодезически полное локально компактное пространство *конечно компактно*, т. е. всякое ограниченное замкнутое множество в нем компактно.

*Треугольником* в геодезическом пространстве $X$ называется объединение трех кратчайших отрезков, $c_i : [a_i, b_i] \to X$, $i = \overline{1, 3}$, называемых *сторонами* треугольника, попарно соединяющих три точки $x_j$, $j = \overline{1, 3}$, называемых его *вершинами.*

Для тройки точек $\Delta = (x_1, x_2, x_3)$ в пространстве $X$ *треугольник сравнения* $\overline{\Delta} \subset \mathbb{E}^2$ на евклидовой плоскости $\mathbb{E}^2$ с вершинами $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$, соответствующими $x_1$, $x_2$, $x_3$, имеет длины сторон $d_\kappa(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = d(x_i, x_j)$, $i, j = \overline{1, 3}$. Треугольник сравнения определен с точностью до евклидовой изометрии. Если $c_i$ — стороны треугольника с вершинами $\Delta$, то стороны соответствующего треугольника сравнения $\overline{\Delta}$ обозначаются через $\bar{c}_i$.

Точка $\overline{m} \in \overline{\Delta}$ соответствует точке $m \in \Delta$, если для некоторого $i$ найдется число $t_i \in [a_i, b_i]$, для которого $\overline{m} = \bar{c}_i(t_i)$ и $m = c_i(t_i)$. Треугольник, вершины которого образуют тройку $\Delta$, называется *тонким*, если для любой пары его точек $m, n$ и для пары соответствующих им точек $\overline{m}$, $\bar{n}$ треугольника сравнения на модельной поверхности $M_\kappa$ выполнено неравенство

$$d(m,n) \le d_{\mathbb{E}}(\overline{m}, \bar{n}), \tag{2.1}$$

где $d_{\mathbb{E}}$ — евклидово расстояние.

Область $U$ в геодезическом метрическом пространстве $X$ называется 0-*областью* (или *областью* $R_0$), если всякий треугольник, целиком лежащий в $U$, является тонким. Полное геодезическое метрическое пространство $X$ называется *пространством Александрова неположительной кривизны*, если всякая его точка обладает окрестностью $U$, являющейся 0-областью. CAT(0)-*пространство* — это пространство Александрова неположительной кривизны, являющееся 0-областью. В силу теоремы Александер — Бишопа [13] всякое CAT(0)-пространство односвязно.

**2.2. Граница пространства неположительной кривизны.** Понятие границы пространства неположительной кривизны по Александрову хорошо известно. К нему есть два существенно различных подхода, дающих в итоге один и тот же результат. Здесь нам понадобятся оба определения. В тех случаях, когда различия несущественны, мы будем говорить о границе в общем смысле.

Определение 2.1. Геодезические лучи $c, d : [0, +\infty) \to X$ в метрическом пространстве $X$ называются *асимптотическими*, если хаусдорфово расстояние между ними конечно:

$$\mathrm{Hd}(c,d) < +\infty.$$

Отношение асимптотичности есть эквивалентность на множестве геодезических лучей в $X$. Множество классов эквивалентности называется *геодезической идеальной границей* пространства $X$ и обозначается через $\partial_g X$. Объединение $\overline{X}_g = X \cup \partial_g X$ называется *геодезическим идеальным замыканием* $X$. Приведенная здесь терминология соответствует понятиям геодезической границы и геодезического замыкания, введенным в [14].

Для пары точек $y, z \in \overline{X}$ запись $[yz]$ означает соединяющий их отрезок, если $y, z \in X$, или геодезический луч с началом в $y$, идущий в направлении $z$, если $y \in X$, а $z \in \partial_g X$ (если $X$ есть локально компактное CAT(0)-пространство, то такой луч существует и однозначно определен), или произвольную полную геодезическую с концами в $y$ и $z$, если $y, z \in \partial_g X$, и такая геодезическая существует.

На замыкании $\overline{X}_g$ естественно вводится *коническая топология* как топология равномерной сходимости на ограниченных множествах отрезков и лучей. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset \overline{X}_g$ сходится в конической топологии к точке $x \in \overline{X}_g$, если для отмеченной точки $o \in X$ последовательность натурально параметризованных отрезков или лучей $\{[ox_n]\}_{n=1}^{+\infty}$ равномерно на ограниченных множествах сходится к натуральной параметризации отрезка (луча) $[ox]$. Коническая топология на $\overline{X}_g$ не зависит от выбора отмеченной точки $o$. Индуцированная топология на геодезической идеальной границе $\partial_g X$ также называется *конической*.

Определение 2.2. Для произвольного локально компактного метрического пространства $X$ определено его вложение Куратовского в пространство $C(X)$ непрерывных функций на $X$. Именно, если $o \in X$ — отмеченная точка, то точка

$x$ отождествляется с *дистанционной функцией* $d_x$, которая определена равенством

$$d_x(y) = |xy| - |ox|.$$

Пусть $C^*(X) = C(X)/\{\text{consts}\}$ — фактор-пространство $C(X)$ по подпространству констант. Тогда проекция $C(X) \to C^*(X)$ порождает вложение $i : X \to C^*(X)$, не зависящее от выбора отмеченной точки $o$. Топология на $C^*(X)$ наследуется из компактно-открытой топологии на $C(X)$. Мы будем отождествлять само пространство $X$ с его образом $i(X)$.

*Метрическим замыканием* пространства $X$ называется замыкание его образа $i(X) \subset C^*(X)$. Метрическое замыкание обозначается через $\overline{X}_m$, *метрическая граница* есть по определению $\partial_m X = \overline{X}_m \setminus X$. О происхождении термина «метрическое замыкание» см. [15]. Функции, составляющие метрическую границу, называются *орифункциями.* Они являются пределами в смысле компактно-открытой топологии для дистанционных функций. Частным случаем орифункций служат *функции Буземана.* Для геодезического луча $c : [0, +\infty) \to X$ функция Буземана $\beta_c$, порождаемая им, определяется равенством

$$\beta_c(y) = \lim_{t\to+\infty}(|yc(0)| - t).$$

Для орифункции $\Phi \in \partial_m X$ по произвольной точке $x \in X$ определяются *орисфера*

$$\mathscr{HS}(\Phi, x) = \{y \in X \mid \Phi(y) = \Phi(x)\}$$

и *оришар*

$$\mathscr{HB}(\Phi, x) = \{y \in X \mid \Phi(y) \le \Phi(x)\},$$

т. е. соответствующие $x$ множества уровня и подуровня орифункции $\Phi$.

Если пространство $X$ есть локально компактное CAT(0)-пространство, то его геодезическое и метрическое замыкания совпадают в следующем смысле: тождественное отображение $\mathrm{Id}_X$ однозначно продолжается до гомеоморфизма $\overline{X}_m \to \overline{X}_g$. Для гладких римановых односвязных многообразий неположительной кривизны совпадение двух границ доказано в [16], при этом метод доказательства применим к пространствам Александрова фактически дословно (см. [16]). В частности, всякая орифункция определена как функция Буземана по некоторому геодезическому лучу, а функции Буземана, определенные по асимптотическим лучам, отличаются лишь на константу. Идеальное замыкание CAT(0)-пространства $X$ будет обозначаться через $\overline{X}$, а идеальная граница — через $\partial_\infty X$.

Определение 2.3. Пусть бесконечно удаленная точка $\xi \in \partial X$ задается лучом $c : \mathbb{R}_+ \to X$. *Орисферой* (соответственно *оришаром*) с центром $\xi$ называется множество уровня

$$\mathscr{HS}(\xi, x) = \mathscr{HS}(\beta_c, x)$$

(соответственно множество подуровня $\mathscr{HB}(\xi, x) = \mathscr{HB}(\beta_c, x)$) функции Буземана $\beta_c$.

### 2.3. Ранг геодезической.

Определение 2.4. Полные геодезические $c_1$ и $c_2$ называются *параллельными*, если хаусдорфово расстояние $\mathrm{Hd}(c_1, c_2)$ между ними конечно. Лучи, содержащиеся в параллельных геодезических, задают ровно две точки идеальной границы. В CAT(0)-пространстве параллельные геодезические ограничивают плоскую полосу, т. е. изометрически вложенную в $X$ полосу евклидовой плоскости. Геодезическая $c$ называется *геодезической ранга один*, если она не лежит на границе плоской полосы в $X$. В этом случае $c$ не допускает параллельных ей геодезических, отличных от нее самой. Если $c$ лежит на границе плоской полосы, мы будем говорить, что $c$ есть *геодезическая высшего ранга*.

Определение 2.5. Будем говорить, что полные геодезические $c$ и $d$ *соединены асимптотической цепью*, если определена такая конечная последовательность геодезических $c := c_0, c_1, \ldots, c_n := d$, что при всех $i = \overline{1, n}$ геодезические $c_{i-1}$ и $c_i$ асимптотичны друг другу в одном из направлений. Геодезическая *$c$ виртуально имеет высший ранг*, если существует геодезическая $d$ высшего ранга, которую можно соединить с $c$ асимптотической цепью. В частности, геодезическая высшего ранга сама является геодезической виртуально высшего ранга. Если геодезическая $c$ не является геодезической виртуально высшего ранга, то будем говорить, что *$c$ строго ранга один*.

**2.4. Диагональная трубка пространства неположительной кривизны.** Начиная с этого момента, мы считаем метрическое пространство $(X, d)$ локально компактным геодезически полным односвязным и связным на бесконечности пространством неположительной кривизны по Александрову (или CAT(0)-пространством); $\overline{X} = X \cup \partial_\infty X$ — его идеальное замыкание.

Предположим, что на множестве $X$ заданы две метрики $d$ и $d'$, имеющие общую диагональную трубку $V$, и пусть оба метрических пространства $(X, d)$ и $(X, d')$ удовлетворяют условиям теоремы 1.3. При $n \in \mathbb{N}$ будем рассматривать диагональные трубки

$$nV := \{(x, y) \in X \times X \mid |xy| \le n\},$$

их границы

$$\partial(nV) := \{(x, y) \in X \times X \mid |xy| = n\}$$

и внутренности

$$\mathrm{Int}(nV) := nV \setminus \partial(nV).$$

**Лемма 2.1.** *Если две метрики $d$ и $d'$ на $X$ таковы, что для каждой из них выполнены условия теоремы* 1.3*, и имеют общую диагональную трубку $V$, то для них также совпадают множества $nV$, $\partial(nV)$ и $\mathrm{Int}(nV)$ при всех $n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Имеем $(x, y) \in 2V$ тогда и только тогда, когда существует точка $z \in X$, для которой $(x, z), (z, y) \in V$. Последнее выполняется или не выполняется для обоих метрик $d$ и $d'$ одновременно. По индукции $(x, y) \in nV$ тогда и только тогда, когда существует точка $z \in X$, для которой $(x, z) \in (n-1)V$ и $(z, y) \in V$. Пара $(x, y)$ принадлежит $\partial(2V)$, если и только если существует единственная точка $z$, для которой $(x, z), (z, y) \in V$. В этом случае $(x, z), (z, y) \in \partial V$, а $z$ является серединой отрезка $[xy]$. Поэтому метрики $d$ и $d'$ имеют общую границу $\partial(2V)$. Более того, $(x, z) \in \partial V$, если и только если существует такая пара $(x, y) \in \partial(2V)$, что $z$ есть середина отрезка $[xy]$. Значит, граница $\partial V$ по отношению к рассматриваемым метрикам также совпадает. По индукции доказывается совпадение границ $\partial(nV)$. Для $\mathrm{Int}(nV)$ равенство

$$\mathrm{Int}(nV) = nV \setminus \partial(nV)$$

выполняется по определению. $\square$

Таким образом, любые две $V$-метрики $d$ и $d'$ имеют общие открытые, замкнутые шары и сферы целочисленных радиусов.

**Лемма 2.2.** *В условиях леммы* 2.1 *если для метрик* $d$ *и* $d'$ *совпадает хотя бы одно из трех множеств* $V$, $\partial V$ *или* $\operatorname{Int} V$, *то совпадают и оставшиеся два.*

Доказательство. В лемме 2.1 рассмотрен случай совпадения трубок $V$. Докажем лемму в двух оставшихся случаях.

Предположим, что $d$ и $d'$ имеют общую границу диагональной трубки $\partial V$. Аналогично лемме 2.1 отсюда следует совпадение диагональных трубок $2V$. В частности, метрики имеют общую систему шаров $B(x, 2n)$ четных радиусов, а следовательно, в силу условия и леммы 2.1 у них совпадают все сферы вида $S(x, 1)$ и $S(x, 2n)$ с $x \in X$. Теперь из связности на бесконечности $X$ имеем $(x, y) \in \operatorname{Int} V$ тогда и только тогда, когда $S(x, 1) \cap S(y, 1) \neq \varnothing$ и $S(x, 2) \cap S(y, 1) = \varnothing$. Поэтому метрики имеют общую внутренность $\operatorname{Int} V$. Теперь $V = \operatorname{Int} V \cup \partial V$.

Наконец, пусть $d$ и $d'$ обладают общей внутренностью $\operatorname{Int} V$ трубки $V$. Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$ общими для них будут внутренности $\operatorname{Int}(nV)$ трубок $nV$. В силу геодезической полноты $X$ соотношение $(x, y) \in \partial V$ выполняется тогда и только тогда, когда $(x, y) \notin \operatorname{Int} V$ и $B(y, 1) \subset B(x, 2)$. Действительно, если $1 < d(x, y) < 2$, то отрезок $[xy]$ включается в отрезок $[xz]$ длины $d(x, z) = \frac{1}{2}(3 + d(x, y))$. Для точки $z$ верно включение $z \in B(y, 1) \setminus B(x, 2)$. Тем самым $\operatorname{Int} V$ однозначно определяет $\partial V$, а значит, и $V$. $\square$

Мы теперь можем считать, что заданы все три отношения: $V$, $\partial V$ и $\operatorname{Int} V$.

**2.5. $r$-Последовательности.** Понятие $r$-последовательности введено в [1]. Мы применим следующую его трактовку.

Определение 2.6. Под *$r$-последовательностью* мы будем понимать изометрическое вложение $\mathbb{Z} \to X$ в пространство $X$ множества $\mathbb{Z}$ целых чисел. Отрезок $r$-последовательности $\{x_z\}_{z \in \mathbb{Z}}$, заключенный между $x_{z_1}$ и $x_{z_2}$, будем обозначать через $[x_{z_1}, x_{z_1+1}, \dots, x_{z_2}]_r$.

Это определение вполне согласуется с определением В. Н. Берестовского, но не является конструктивным. Из рассмотрения $r$-последовательностей в [16] и лемм 2.1 и 2.2 следует, что, зная диагональную трубку $V$, можно определить для произвольной последовательности точек $\{x_z\}_{z \in \mathbb{Z}}$, параметризованной множеством $\mathbb{Z}$, является ли она $r$-последовательностью. Иначе говоря, все реализующие диагональную трубку $V$ метрики имеют одно и то же семейство $r$-последовательностей.

Всякая $r$-последовательность лежит на однозначно определенной геодезической, и, обратно, для задания геодезической достаточно указать какую-нибудь $r$-последовательность, содержащуюся в ней. Таким образом, если даны две $V$-метрики $d$ и $d'$, то $r$-последовательности задают соответствие $\tau$ между их геодезическими: геодезическая $a'$ в метрике $d'$ соответствует геодезической $a$ в метрике $d$, если они задаются общей $r$-последовательностью. Если в пространстве $(X, d)$ все геодезические имеют ранг один, то отсюда следует, что соответствие $\tau$ взаимно однозначно. Из дальнейшего рассмотрения следует, что утверждение о взаимной однозначности соответствия $\tau$ справедливо и в общем случае пространства неположительной кривизны, удовлетворяющего условиям теоремы 1.3.

Определение 2.7. Две $r$-последовательности $\{x_z\}_{z \in \mathbb{Z}}$ и $\{y_z\}_{z \in \mathbb{Z}}$ называются *параллельно эквивалентными*, если хаусдорфово расстояние между ними конечно:

$$\operatorname{Hd}(\{x_z\}, \{y_z\}) < +\infty.$$

Последнее условие равносильно следующему: существует такое натуральное число $n$, что при всех $z \in \mathbb{Z}$ верно $(x_z, y_z) \in V_n$.

**Лемма 2.3.** *Геодезическая, задаваемая $r$-последовательностью $\{x_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$, имеет высший ранг тогда и только тогда, когда существует параллельно эквивалентная ей $r$-последовательность $\{y_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$, отличная от $\{x_{z\pm1}\}_{z\in\mathbb{Z}}$, для которой $(x_0, y_0) \in \partial V$.*

Доказательство. Если геодезическая $a$ имеет высший ранг, то достаточно в качестве $y_0$ взять внутреннюю точку плоской полосы, содержащей $a$, для которой $|x_0y_0| = 1$. Геодезическая, проходящая через $y_0$ параллельно $a$, определяется требуемой $r$-последовательностью. Обратно, если $\{y_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$ есть указанная $r$-последовательность, то она определяет геодезическую $a'$, параллельную $a$. По лемме о плоской полосе (см. [16] или [11]) две параллельные геодезические в пространстве неположительной кривизны ограничивают плоскую полосу в $X$. $\square$

**Следствие 2.1.** *Пусть $a$ — геодезическая ранга один в метрике $d$. Тогда $a$ является геодезической и имеет ранг один и в произвольной реализующей $V$ метрике $d'$.*

Доказательство. Линия $a$ задает семейство $r$-последовательностей, в котором никакие две несовпадающие поточечно $r$-последовательности $\{x_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$ и $\{y_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$ не удовлетворяют условию $(x_0, y_0) \in \partial V$. Все рассматриваемые $r$-последовательности параллельно эквивалентны и образуют целый класс параллельно эквивалентных $r$-последовательностей. В силу леммы задаваемые ими геодезические не могут быть различными параллельными линиями ни в какой $V$-метрике. Следовательно, такие геодезические совпадают попарно друг с другом и с линией $a$. $\square$

**2.6. Орисферический перенос метрики.** Как следует из [1, предложение 3.5], множества оришаров и орисфер совпадают для любых двух метрик $d$ и $d'$ пространства $X$, реализующих $V$. На этом основана следующая возможность переноса метрики.

**Лемма 2.4.** *Пусть линии $\gamma$ и $\gamma_1$ являются геодезическими в двух реализующих $V$ метриках $d$ и $d'$ и асимптотичны в направлении идеальной точки $\xi = c(+\infty) \in \partial X$. Предположим, что вдоль $\gamma$ выполняется равенство $d = d'$. Тогда $d = d'$ и вдоль $\gamma_1$.*

Доказательство. Рассмотрим точки $x_1, y_1 \in \gamma_1$ и орисферы

$$\mathscr{H}\mathscr{S}(\xi, x_1) = \beta_c^{-1}(x_1) = {\beta'}_c^{-1}(x_1)$$

и

$$\mathscr{H}\mathscr{S}(\xi, y_1) = \beta_c^{-1}(y_1) = {\beta'}_c^{-1}(y_1),$$

где $\beta_c$ и $\beta'_c$ соответственно функции Буземана, отвечающие лучу $c$ в метриках $d$ и $d'$. Обозначим $x = \gamma \cap \mathscr{H}\mathscr{S}(\xi, x_1)$ и $y = \gamma \cap \mathscr{H}\mathscr{S}(\xi, y_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} d'(x_1, y_1) &= |\beta'_c(x_1) - \beta'_c(y_1)| = |\beta'_c(x) - \beta'_c(y)| \\ &= d'(x, y) = d(x, y) = |\beta_c(x) - \beta_c(y)| = |\beta_c(x_1) - \beta_c(y_1)| = d(x_1, y_1). \quad \square \end{aligned}$$

## § 3. Восстановление метрики на геодезической виртуально высшего ранга

В силу леммы 2.3 если $r$-последовательность задает геодезическую $a$ высшего ранга в метрике $d$, то геодезическая $a'$, задаваемая этой $r$-последовательностью, имеет высший ранг и в произвольной $V$-метрике $d'$. В этом параграфе мы доказываем, что геодезические $a$ и $a'$ совпадают поточечно и вдоль $a$ имеется равенство метрик $d = d'$.

### 3.1. Тесемки.

Определение 3.1. Будем говорить, что набор из $4p$ ($p \in \mathbb{N}$) параллельно эквивалентных $r$-последовательностей

$$\{x_{i,j;z}\}_{z\in\mathbb{Z}}, \quad i = \overline{0,3},\ j = \overline{1,p}, \tag{3.1}$$

образует *$p$-тесемку*, если следующие $4p + 4$ точки:

$$x_{i,1,0}, \dots, x_{i,p,0},\ i = \overline{0,3}, \quad x_{0,1,2p-1}, x_{2,p,1-2p}, x_{3,p-1,1-2p}, x_{3,p,1-2p},$$

дополнительно образуют систему отрезков $r$-последовательностей:

$$\begin{cases} [x_{0,1,0}, x_{1,1,0}, x_{2,1,0}, x_{3,1,0}]_r, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [x_{0,p,0}, x_{1,p,0}, x_{2,p,0}, x_{3,p,0}]_r, \\ [x_{0,2,0}, x_{1,1,0}, x_{2,p,1-2p}, x_{3,p-1,1-2p}]_r, \\ [x_{0,3,0}, x_{1,2,0}, x_{2,1,0}, x_{3,p,1-2p}]_r, \\ [x_{0,4,0}, x_{1,3,0}, x_{2,2,0}, x_{3,1,0}]_r, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ [x_{0,p,0}, x_{1,p-1,0}, x_{2,p-2,0}, x_{3,p-3,0}]_r, \\ [x_{0,1,2p-1}, x_{1,p,0}, x_{2,p-1,0}, x_{3,p-2,0}]_r. \end{cases} \tag{3.2}$$

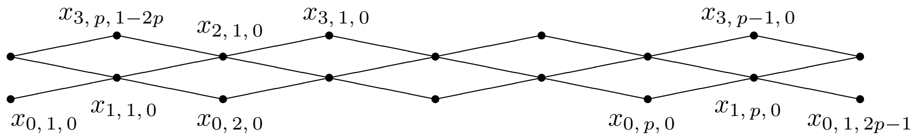


Рис. 1. $p$-Тесемка.

Определение $p$-тесемки дается в терминах $r$-последовательностей и не зависит от выбора $V$-метрики. На рис. 1 показан фрагмент $p$-тесемки. Здесь выделена лишь часть точек $r$-последовательностей, формирующих $p$-тесемку. На промежутке между точками $x_{1,1,0}$ и $x_{1,1,2p-1}$, принадлежащими одной и той же $r$-последовательности $\{x_{1,1,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$, расположены $2(p-1)$ точек этой $r$-последовательности, которые делят отрезок соответствующей геодезической на $2p-1$ равных отрезков. На этом же отрезке указанной геодезической расположены $p-1$ точек вида $x_{1,j,0}$, $j = \overline{2,p}$, которые делят его на $p$ равных отрезков. Таким образом, все точки $r$-последовательностей $\{x_{1,j,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$, попадающие на отрезок $[x_{1,1,0}x_{1,1,2p-1}]$, делят его на $p(2p-1)$ равных отрезка, а отрезок $[x_{1,1,0}x_{1,1,1}]$ делится точками $x_{1,p,3-2p}, x_{1,p-1,5-2p}, \dots, x_{1,2,-1}$ на $p$ отрезков длины $1/p$.

План исследования геодезической $a$ высшего ранга сводится к следующему. Линия $a : \mathbb{R} \to X$, задаваемая $r$-последовательностью $\{x_z = a(z)\}_{z\in\mathbb{Z}}$, включается в некоторую плоскую полосу. Она может лежать внутри полосы или быть граничной геодезической, не попадая внутрь никакой плоской полосы. Если $a$ — внутренняя линия плоской полосы $F$, то для достаточно большого $P \in \mathbb{N}$ при каждом $p > P$ в полосе найдется $p$-тесемка, определенная семейством $r$-последовательностей вида (3.1), для которой $x_z = x_{1,1,z}$ при всех $z \in \mathbb{Z}$. Точки $r$-последовательностей $x_{1,j,z}$ для всевозможных таких $p$-тесемок при всех $p > P$ заполняют множество точек рассматриваемой геодезической с рациональными значениями параметра.

После этого остается лишь показать, что отношение принадлежности точек геодезической $a$ восстанавливается по $V$. Для точек с рациональным значением параметра это следует немедленно из построения тесемок, для иррациональных точек в силу топологической эквивалентности $V$-метрик возможен предельный переход. Затем предельный переход применяется по отношению к геодезическим, лежащим на границе плоских полос, но не попадающим внутрь.

**3.2. Восстановление метрики геодезической высшего ранга.** Здесь мы реализуем приведенный выше план.

**Лемма 3.1.** *Пусть $r$-последовательности* (3.1) *образуют $p$-тесемку. Тогда $r$-последовательности $\{x_{1,j,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$ и $\{x_{2,j,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$ содержатся в некоторой плоской полосе.*

Доказательство. Пусть $p$-тесемка определена $r$-последовательностями (3.1). Рассмотрим плоскую полосу $F$, заключенную между параллельными геодезическими $a$ и $a'$, содержащими $r$-последовательности $\{x_{0,1,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$ и $\{x_{3,1,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$ соответственно. Тогда в этой же плоской полосе содержатся $r$-последовательности $\{x_{1,1,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$ и $\{x_{2,1,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$.

Покажем, что плоская полоса $F$ в действительности содержит все перечисленные в формулировке леммы точки. Рассмотрим точки

$$x_{0,2,0}, x_{1,1,0}, x_{2,1,0}, x_{3,1,0}, x_{2,2,0}, x_{1,2,0}. \tag{3.3}$$

Для них из (3.2) имеем отрезки $r$-последовательностей

$$[x_{0,2,0}, x_{1,2,0}, x_{2,2,0}]_r, \quad [x_{1,p,1-2p}, x_{2,p,1-2p}, x_{3,p,1-2p}]_r.$$

В силу выпуклости метрической функции в пространстве неположительной кривизны функция

$$d_{2,1}(t) := |x_{t,2,0}x_{t+1,1,0}|,$$

где $x_{t,j,0} = c_j(t)$, а $c_j : [0,2] \to X$, $j = \overline{1,2}$, — натуральные параметризации отрезков $[x_{0,j,0}x_{1,j,0}]$, выпукла. Но

$$d_{2,1}(0) = d_{2,1}(1) = d_{2,1}(2) = 1,$$

а значит, $d_{2,1}(t) = 1$ при всех $t \in [0,2]$ и точки (3.3) принадлежат изометрически вложенному в $X$ плоскому параллелограмму $x_{0,2,0}x_{1,1,0}x_{3,1,0}x_{2,2,0}$.

Аналогично шестерка точек

$$x_{2,1,0}, x_{3,1,0}, x_{2,2,0}, x_{1,3,0}, x_{0,3,0}, x_{1,2,0}$$

принадлежит изометрически вложенному в $X$ плоскому параллелограмму

$$x_{2,1,0}x_{3,1,0}x_{1,3,0}x_{0,3,0}$$

и $|x_{2,1,0}x_{2,2,0}| = |x_{1,2,0}x_{1,3,0}|$. Выпуклый четырехугольник

$$x_{1,1,0}x_{2,1,0}x_{2,2,0}x_{1,3,0}$$

получен объединением ромбов

$$x_{1,1,0}x_{2,1,0}x_{2,2,0}x_{1,2,0}, \quad x_{1,2,0}x_{2,1,0}x_{2,2,0}x_{1,3,0},$$

имеющих общий треугольник

$$x_{2,1,0}x_{2,2,0}x_{1,2,0}.$$

Поэтому он изометричен плоской трапеции. Точка $x_{1,2,0}$ лежит на отрезке $[x_{1,1,0}x_{1,3,0}]$ и является его серединой.

Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что отрезок $[x_{1,1,0}x_{1,1,2p-1}]$ разбивается точками $x_{1,j,0}$, $j = \overline{2,p}$, на $p$ частей, равных отрезку $[x_{1,1,0}x_{1,2,0}]$. Таким образом, начальные точки всех $r$-последовательностей вида $\{x_{1,j,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$ лежат на границе $a$ плоской полосы $F$. Значит, $a$ содержит все указанные $r$-последовательности. Линия $a'$, в свою очередь, содержит $r$-последовательности вида $\{x_{2,j,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$. □

Замечание 3.1. В [2] рассматривался случай, когда пространство не допускает налегания кратчайших. В такой ситуации не допускается также и налегания плоских полос, откуда следует, что вся тесемка содержится в одной плоской полосе. В общей ситуации «лепестки» тесемки, содержащие ее крайние $r$-последовательности, могут загибаться и переходить из одной плоской полосы на другую. Доказанная лемма показывает, что центральная часть тесемки ведет себя контролируемым образом.

**Лемма 3.2.** *Расстояние между параллельными геодезическими в $X$, содержащими $r$-последовательности $\{x_{0,j,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$ и $\{x_{3,k,z}\}_{z\in\mathbb{Z}}$ данной тесемки, не зависит от индексов $j, k$ и равно*

$$s(p) = \frac{3\sqrt{4p-1}}{2p}.$$

Доказательство. Указанное расстояние равно трем расстояниям между линиями $a$ и $a'$ из леммы 3.1. Поскольку любая плоская полоса в CAT(0)-пространстве изометрична полосе на евклидовой плоскости, для вычисления этого расстояния достаточно найти ширину $p$-тесемки на евклидовой плоскости. Эта задача решается элементарным вычислением. □

**Следствие 3.1.** *Для любой плоской полосы, содержащей внутри себя геодезическую $a$ в $X$, существует такое $P > 0$, что при всех $p > P$ данная плоская полоса содержит $p$-тесемку, порожденную семейством $r$-последовательностей вида (3.1), при этом $\{x_{1,j,z}\} \subset a$.*

**Лемма 3.3.** *Пусть геодезическая $a : \mathbb{R} \to X$ высшего ранга в CAT(0)-пространстве $X$ лежит внутри плоской полосы $F$ и содержит $r$-последовательность $\{x_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$, $x_0 = a(0)$. Тогда для любого рационального числа $q := \frac{m}{n}$ и для $p$, кратного $n$, всякая $p$-тесемка, для которой $x_z = x_{0,1,z}$, содержит точку $a(q) = x_{0,j,z'}$ при $j := n+1-m'$ и $z' := q'+1-2k(n-m')$, где $q' := [q]$ — целая часть и $\frac{m'}{n} := \{q\}$ — дробная часть числа $q$.*

Доказательство получается прямым вычислением для $p$-тесемки на плоскости. □

Таким образом, при всех $p$, кратных $n$, всякая $p$-тесемка, построенная на точках $x_z = x_{1,1,z}$ заданной $r$-последовательности $\{x_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$, содержит точки $a(\frac{m}{n})$ как точки с определенным по числу $p$ мультииндексом. Теперь мы приступаем к доказательству основной теоремы для геодезических высшего ранга.

**Теорема 3.1.** *Пусть $a : \mathbb{R} \to X$ — геодезическая высшего ранга в пространстве $(X, d)$, содержащая $r$-последовательность $\{x_z\}$, $z \in \mathbb{Z}$. Тогда для любой $V$-метрики $d'$ на $X$ линия $a$ также есть геодезическая и вдоль нее выполняется равенство $d = d'$.*

Доказательство. Как уже отмечено, диагональная трубка $V$ определяет свойство $r$-последовательности $\{x_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$ задавать геодезическую высшего ранга. В силу леммы 3.3 если $a$ лежит внутри плоской полосы, то все $V$-метрики имеют одно и то же множество рациональных точек, т. е. точек вида $a(q)$, где $q \in \mathbb{Q}$.

Пусть число $t$ иррационально и $t_n, t'_n$, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность его рациональных приближений с недостатком и с избытком соответственно. Тогда

$$a(t) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B(a((t'_n - 1), 1)\right) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B(a(t_n + 1), 1)\right)$$

и точка $a(t)$ однозначно определяется с помощью $V$.

Пусть теперь $a$ лежит на границе плоской полосы $F$, не попадая внутрь никакой плоской полосы. Тогда сколь угодно близко к $a$ имеется параллельная ей геодезическая $a'$, вдоль которой $d = d'$. Из топологической эквивалентности $V$-метрик следует равенство $d = d'$ и вдоль $a$. □

**Следствие 3.2.** *Пусть $a$ — геодезическая в $X$ виртуально высшего ранга. Тогда для произвольной реализующей $V$ метрики $d'$ на $X$ вдоль линии $a$ справедливо равенство $d = d'$.*

Доказательство проводится кратным применением леммы 2.4 для орисферического переноса метрики с геодезической на асимптотическую с ней геодезическую. □

## 4. Восстановление метрики на геодезической ранга один

### 4.1. Ножницы.

Определение 4.1. Мы говорим, что геодезические $a, b, c, d : (-\infty, +\infty) \to X$ в пространстве неположительной кривизны $X$ образуют *ножницы* с *центром* в точке $x \in X$, если

- $a(-\infty) = b(-\infty)$;
- $a(+\infty) = c(+\infty)$;
- $c(-\infty) = d(-\infty)$;
- $b(+\infty) = d(+\infty)$;
- $b \cap c = x$.

Такая конфигурация будет обозначаться через $\langle a, b, c, d; x\rangle$ (рис. 2). Геодезические $a$ и $d$ называются *основаниями* ножниц. Первое из оснований считается *нижним*, второе — *верхним*. Основания могут проходить или не проходить через центр ножниц. В [2] рассматривался случай, когда пространство $X$ не допускает налегания геодезических. В этой ситуации основания ножниц не содержат их центр. Четыре бесконечно удаленные точки на концах геодезических $a, b, c, d$ порождают четыре класса функций Буземана, представленных функциями $\beta_{a(\pm\infty)}$ и $\beta_{d(\pm\infty)}$, для которых значения в точке $x$ равны нулю: $\beta_{a(\pm\infty)}(x) = \beta_{d(\pm\infty)}(x) = 0$.

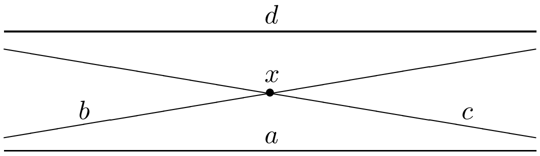


Рис. 2. Ножницы $\langle a, b, c, d; x\rangle$.

С ножницами связано преобразование сдвига их нижнего основания $a$, которое и приводит к решению основной проблемы. Оно определяется как следующая композиция осевых изометрий. Пусть $R_{ac}$ есть орисферический перенос с геодезической $a$ на геодезическую $c$, порожденный функцией Буземана $\beta_{a(+\infty)}$: произвольная точка $m \in a$ переходит в единственную точку $m' = R_{ac}(m) \in c$, для которой $\beta_{a(+\infty)}(m') = \beta_{a(+\infty)}(m)$. Аналогично определяются переносы $R_{cd}$, $R_{db}$ и $R_{ba}$, являющиеся изометрическими отображениями соответствующих геодезических при помощи функций Буземана с центрами в общих бесконечно удаленных точках.

Определение 4.2. *Сдвиг $T$* есть композиция

$$T := R_{ba} \circ R_{db} \circ R_{cd} \circ R_{ac} : a \to a.$$

Очевидно, $T$ — изометрия геодезической $a$, сохраняющая ее направление. *Величина сдвига $T$*, т. е. разность $\beta_{a(-\infty)}(T(m)) - \beta_{a(-\infty)}(m)$, не зависящая от выбора точки $m \in a$, обозначается через $\delta T$.

Величина $\delta T$ допускает следующее описание. Пусть $\beta_{a-}$, $\beta_{a+}$, $\beta_{d-}$ и $\beta_{d+}$ — функции Буземана с центрами соответственно в точках $a(\pm\infty)$ и $d(\pm\infty)$ такие, что существуют точки $p \in a$ и $q \in d$, для которых $\beta_{a-}(p) = \beta_{a+}(p) = 0$ и $\beta_{d-}(q) = \beta_{d+}(q) = 0$.

**Теорема 4.1.** *Справедливо соотношение*

$$\delta T = \beta_{a-}(x) + \beta_{a+}(x) + \beta_{d-}(x) + \beta_{d+}(x) \geq 0. \tag{4.1}$$

*Более того, если $a$ есть геодезическая строго ранга один и $a \cap d = \varnothing$, то $\delta T > 0$.*

Доказательство. Заметим, что суммы $\beta_{a-}(x) + \beta_{a+}(x)$ и $\beta_{d-}(x) + \beta_{d+}(x)$ не зависят от выбора точек $p \in a$ и $q \in d$, так как, скажем, при переходе от точки $p$ к точке $p' \in a$ функции $\beta_{a-}$ и $\beta_{a+}$ меняются на константы, равные соответственно $\beta_{a-}(p')$ и $\beta_{a+}(p')$, причем $\beta_{a-}(p') = -\beta_{a+}(p')$. Для $\delta T$ имеем

$$\delta T = t' - t,$$

где $a(t') = T(a(t))$.

Если $d(s) = R_{cd} \circ R_{ac}(a(0))$, то и при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем $d(s+t) = R_{cd} \circ R_{ac}(a(t))$. Аналогично если $a(t) = R_{ba} \circ R_{db}(d(0))$, то и для всех $s \in \mathbb{R}$ будет $a(t+s) = R_{ba} \circ R_{db}(d(s))$.

Пусть $p = a(0) = R_{ac}^{-1}(x)$ и $q = d(0) = R_{db}^{-1}(x)$. Тогда $\beta_{a+}(x) = \beta_{a+}(p) = 0$, $\beta_{d+}(x) = \beta_{d+}(q) = 0$ и

$$T(p) = R_{ba} \circ R_{db} \circ R_{cd}(x) = R_{ba} \circ R_{db}(d(s)),$$

где $s = \beta_{d-}(x)$. Далее, имеем

$$T(p) = a(\beta_{d-}(x) + t),$$

где $t = \beta_{a-}(x)$ Таким образом, сдвиг точки $p \in a$, а следовательно, и всякой точки геодезической $a$ равен

$$\delta T = \beta_{a-}(x) + \beta_{d-}(x) - 0 = \beta_{a-}(x) + \beta_{a+}(x) + \beta_{d-}(x) + \beta_{d+}(x).$$

Поскольку $x$ лежит в пересечениях оришаров $\mathscr{HB}(a(+\infty), x) \cap \mathscr{HB}(a(-\infty), x)$ и $\mathscr{HB}(d(+\infty), x) \cap \mathscr{HB}(d(-\infty), x)$, выполняется $\delta T \geq 0$. При $a \cap d = \varnothing$ мы можем считать, что $x \notin a$. В этом случае $b_{d-}(x) + b_{d+}(x) \geq 0$ и $b_{a-}(x) + b_{a+}(x) > 0$. $\square$

**4.2. Тени.**

Определение 4.3. *Полной тенью* точки $x_0$ относительно точки $y \in \overline{X} \setminus \{x_0\}$ называется множество

$$\mathrm{Shadow}_y(x_0) := \{z \in \overline{X} \mid \exists [yz] x_0 \in [yz]\}.$$

Здесь предположение существования необходимо лишь в том случае, если обе точки $y, z$ бесконечно удалены: $y, z \in \partial_\infty X$. *Сферической тенью* точки $x_0$ *радиусом* $\rho > 0$ относительно точки $y \in \overline{X}$ называется пересечение $\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho)$ ее полной тени $\mathrm{Shadow}_y(x_0)$ со сферой $S(x_0, \rho)$. В частности, если $\rho = +\infty$, то

$$\mathrm{Shadow}_y(x_0, +\infty) := \partial_\infty(\mathrm{Shadow}_y(x_0)) := \mathrm{Shadow}_y(x_0) \cap \partial_\infty X.$$

Очевидны следующие свойства теней.

(1) Множества $\mathrm{Shadow}_y(x_0) \cup \{x_0\}$ и $\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho)$ замкнуты в $\overline{X}$ при всех $\rho > 0$.

(2) $\mathrm{Shadow}_y(x_0) = \overline{\bigcup_{\rho > 0} \mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho)} \setminus \{x_0\}$.

(3) Если $y \in X$, то $\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho) = S(y, |x_0 y| + \rho) \cap S(x_0, \rho)$.

(4) Если $y \in \partial_\infty X$, то $\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho) = (\mathscr{HS}_{y,\rho}) \cap S(x_0, \rho)$; здесь $\mathscr{HS}_{y,\rho}$ обозначает орисферу $\mathscr{HS}_{y,z}$, где $z \in X$ — точка такая, что для функции Буземана $b_y$ с центром в $y$ выполнено $b_y(z) - b_y(x_0) = \rho$.

(5) Если $\angle_{x_0}(y, z) = 0$, то $\mathrm{Shadow}_y(x_0) = \mathrm{Shadow}_z(x_0)$.

Из свойства (5) вытекает

**Следствие 4.1.** *Если направление в точке $c(0) = x_0$ луча $c : [0, \infty) \to X$, содержащего точку $y$, обладает единственным обратным, то для любых двух точек $z', z'' \in \mathrm{Shadow}_y(x_0)$*

$$\mathrm{Shadow}_{z'}(x_0) = \mathrm{Shadow}_{z''}(x_0).$$

Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ под *$\varepsilon$-окрестностью* $\mathscr{N}_\varepsilon(\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho))$ сферической тени $\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho)$ при $\rho < +\infty$ мы будем понимать ее $\varepsilon$-окрестность на сфере $S(y, |x_0 y| + \rho)$, если $y \in X$, или на орисфере $\mathscr{HS}_{y,\rho}$, если $y \in \partial_\infty X$.

**Теорема 4.2.** *Для любых $x_0 \in X$, $y \in \overline{X} \setminus \{x_0\}$ и чисел $0 < \rho < +\infty$ и $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой точки $x_1 \in B(x_0, \delta)$, для которой справедливо равенство $|yx_1| = |yx_0|$ (или $b_y(x_1) = b_y(x_0)$, если $y \in \partial_\infty X$), выполнено включение*

$$\mathrm{Shadow}_y(x_1, \rho) \subset \mathscr{N}_\varepsilon(\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho)).$$

Доказательство. Мы докажем утверждение теоремы для случая $y \in X$ методом от противного. Ситуация $y \in \partial_\infty X$ рассматривается аналогично. Предположим, что, каково бы ни было $\delta > 0$, существуют точка $x_\delta \in B(x_0, \delta) \cap S(y, |yx_0|)$ и точка $z_\delta \in S(y, |yx_0| + \rho) \setminus \mathscr{N}_\varepsilon(\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho))$, для которых $x_\delta \in [yz_\delta]$. Выберем последовательность $\delta_n \to 0$ и соответствующие ей последовательности точек $x_{\delta_n}$ и $z_{\delta_n}$. Имеем $x_{\delta_n} \to x_0$. В силу конечной компактности пространства $X$ из $z_{\delta_n}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Будем считать, что сама $z_{\delta_n}$ сходится к точке $z \in S(y, |yx_0| + \rho)$. В натуральной параметризации отрезка $\gamma = [yz]$ выполняется

$$|x_0\gamma(|yx_0|)| \le |x_0 x_{\delta_n}| + |x_{\delta_n}\gamma(|yx_0|) \le \delta_n + |z_{\delta_n} z|. \tag{4.2}$$

Правая часть (4.2) стремится к нулю при $n \to \infty$, следовательно, константа в левой части есть 0. Значит, $z \in \mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho)$, и точки $z_n$ при достаточно больших $n$ принадлежат $\mathscr{N}_\varepsilon(\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho))$, что противоречит их выбору. □

Для заданных множества $\mathscr{V} \subset \partial_\infty X$ и чисел $K, \varepsilon > 0$ рассмотрим $(y, K, \varepsilon)$-*окрестность* $\mathscr{V}$, т. е. множество

$$\mathscr{N}_{y,K,\varepsilon}(\mathscr{V}) := \{\zeta \in \partial_\infty X \mid \exists \xi \in \mathscr{V}\ \zeta \in \mathscr{U}(\xi, y, K, \varepsilon)\},$$

где

$$\mathscr{U}(\xi, x_0, K, \delta) := \{\eta \in \partial_\infty X \mid |c(K)d(K)| < \varepsilon,\ c = [y, \xi];\ d = [y, \eta]\}.$$

Следующее утверждение есть лишь переформулировка теоремы 4.2 для случая $y \in X$.

**Следствие 4.2.** *Для любой окрестности $\mathscr{N}_{y,K,\varepsilon}(\partial_\infty(\mathrm{Shadow}_y(x_0)))$ тени на бесконечности $\partial_\infty(\mathrm{Shadow}_y(x_0))$ для произвольной точки $y \in X$ существует такое $\delta > 0$, что для любой $x_1 \in B(x_0, \delta)$, удаленной от $y$ на расстояние $|yx_1| = |yx_0|$, выполняется включение*

$$\partial_\infty(\mathrm{Shadow}_y(x_1)) \subset \mathscr{N}_{y,K,\varepsilon}(\partial_\infty(\mathrm{Shadow}_y(x_0))).$$

**4.3. Геометрия идеальной границы CAT(0)-пространства.** В этом пункте мы напоминаем некоторые известные факты из асимптотической геометрии пространства неположительной кривизны (подробности см. в [11]).

Прежде всего заметим, что коническая топология идеальной границы допускает следующее описание. При фиксированном $\delta > 0$ и отмеченной точке $o \in X$ базу окрестностей произвольной точки $\xi \in \partial_\infty X$ составляет семейство множеств

$$\mathscr{B}_{o,\xi} := \{\mathscr{U}_{\delta,t}(o, \xi) \mid t > 0\}. \tag{4.3}$$

Здесь $\mathscr{U}_{\delta,t}(o, \xi) := \{\eta \in \partial_\infty X \mid |c(t)d(t)| < \delta\}$, где $c, d : [0, +\infty) \to X$ — лучи, выходящие из $o$ в направлениях $\xi, \eta \in \partial_\infty X$ соответственно.

Помимо конической топологии граница пространства $X$ допускает каноническую угловую метрику и так называемую метрику Титса. Для $\xi, \eta \in \partial_\infty X$ угловое расстояние между ними есть

$$\angle(\xi, \eta) := \sup\{\angle_x(\xi, \eta) \mid x \in X\}.$$

Метрика Титса — это внутренняя метрика, порождаемая угловой метрикой. Указанные две метрики эквивалентны, т. е. порождают одну и ту же топологию на $\partial_\infty X$.

**Предложение 4.1** [11, предложение 9.5]. *Угловая метрика* $\angle$ *как функция* $(\xi, \eta) \to \angle(\xi, \eta)$ *полунепрерывна снизу по отношению к конической топологии: для любого* $\varepsilon > 0$ *существуют окрестность* $\mathscr{U}$ *точки* $\xi$ *и окрестность* $\mathscr{V}$ *точки* $\eta$, *для которых если* $\xi' \in \mathscr{U}$ *и* $\eta' \in \mathscr{V}$, *то*

$$\angle(\xi', \eta') > \angle(\xi, \eta) - \varepsilon.$$

Как следствие, метрика Титса также полунепрерывна снизу по отношению к конической топологии.

**Предложение 4.2** [11, предложение 9.21]. *Пусть* $\xi_0, \xi_1$ — *две различные точки идеальной границы* $\partial_\infty X$.

1. *Если* $\mathrm{Td}(\xi_0, \xi_1) > \pi$, *то существует геодезическая* $c : \mathbb{R} \to X$ *с* $c(+\infty) = \xi_0$ *и* $c(-\infty) = \xi_1$.

2. *Если не существует геодезической* $c : \mathbb{R} \to X$ *с* $c(+\infty) = \xi_0$ *и* $c(-\infty) = \xi_1$, *то* $\mathrm{Td}(\xi_0, \xi_1) = \angle(\xi_0, \xi_1)$ *и найдется геодезический отрезок в метрике Титса, соединяющий* $\xi_0$ *с* $\xi_1$.

3. *Для геодезической* $c : \mathbb{R} \to X$ *выполняется* $\mathrm{Td}(c(-\infty), c(+\infty)) \geq \pi$, *и равенство выполняется в том и только в том случае, когда* $c$ *лежит на границе изометрически вложенной в* $X$ *евклидовой полуплоскости.*

4. *Если диаметр границы в метрике Титса равен* $\pi$, *то всякая геодезическая в* $X$ *ограничивает изометрически вложенную евклидову полуплоскость.*

**4.4. Точки геодезической с единственным обратным направлением.** Пусть $\Sigma_x X$ — пространство направлений в точке $x \in X$. Направления $\xi, \eta \in \Sigma_x X$ называются *взаимно обратными*, если $\angle_x(\xi, \eta) = \pi$. В случае геодезически полного пространства два направления $\xi, \eta \in \Sigma_x X$ взаимно обратны тогда и только тогда, когда существует геодезическая, проходящая через $x$ так, что ее положительным направлением в $x$ является $\xi$, а отрицательным — $\eta$.

Для данной геодезической $a$ в CAT(0)-пространстве $X$ мы обозначим через $\omega^+(a)$ множество точек $x \in a$, в которых положительное направление $a$ имеет более чем одно обратное направление. Аналогично $\omega^-(a)$ — это множество точек на $a$, в которых отрицательное направление $a$ имеет более чем одно обратное.

**Теорема 4.3.** *Множества* $\omega^+(a)$ *и* $\omega^-(a)$ *не более чем счетны.*

Доказательство. Для $\phi > 0$ рассмотрим множество $\Omega^+_\phi(a) \subset \omega^+(a)$, определенное следующим образом: $x \in \Omega^+_\phi(a)$ равносильно тому, что существует направление $\zeta \in \Sigma_x X$, обратное к направлению луча $[xa(+\infty)]$, для которого $\angle_x(\zeta, a(-\infty)) > \phi$. Покажем, что пересечение $\Omega^+_\phi(a)$ с любым отрезком $[xy] \subset a$ конечно.

Действительно, предположив, что на отрезке $[xy] \subset a$ содержится бесконечная последовательность точек $\{a(t_n)\}_{n=1}^\infty \subset \Omega^+_\phi(a)$, мы приходим к следующему противоречию с локальной компактностью $X$. Будем считать, что $x = a(0)$ и $y = a(-L)$, где $L = |xy|$. Для точки $a(t_n)$ мы найдем такую точку $z_n \in S(x, 2L)$, что $a(t_n) \in [xz_n]$ и $\angle_{a(t_n)}(a(-\infty), z_n) > \phi$. Теперь для произвольного $n \neq k$ имеем $|z_n z_k| > 2L \sin \frac{\phi}{2}$. Следовательно, последовательность $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ не содержит фундаментальной подпоследовательности, и сфера $S(x, 2L)$ некомпактна.

Поскольку $\omega^+(a) = \bigcup\limits_{\phi > 0} \Omega^+_\phi(a)$ и $\Omega^+_\phi(a) \subset \Omega^+_\psi(a)$ при $\psi < \phi$, утверждение теоремы справедливо для $\omega^+(a)$. Множество $\omega^-(a)$ рассматривается аналогично. $\square$

**4.5. Существование ножниц.** В этом пункте будет доказана следующая теорема существования ножниц.

**Теорема 4.4.** *Пусть* $a : (-\infty, +\infty) \to X$ *— геодезическая строго ранга один и* $x_0 \in a$ *— точка, в которой оба направления* $a$ *обладают единственными обратными. Тогда существует геодезическая* $a'$*, проходящая через* $a'(0) = x_0$ *так, что* $\angle_{x_0}(a(+\infty), a'(+\infty)) = 0$*, со следующим свойством. Для любой окрестности* $\mathscr{U}$ *тройки*

$$(a'(+\infty), a'(-\infty), x_0) \in \partial_\infty X \times \partial_\infty X \times X$$

*существуют тройка* $(\xi, \eta, x) \in \mathscr{U}$*, где* $x \neq x_0$*, и ножницы* $\langle a', b', c', d'; x\rangle$*, для которых* $b' = [a'(-\infty)\xi]$*,* $c' = [\eta a'(+\infty)]$ *и* $d' = [\eta\xi]$*.*

Доказательство. Заметим, что из условия на ранг геодезической $a$ следует, что всякая геодезическая $a'$, для которой

$$a'(+\infty) \in \partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{a(-\infty)}(x_0))$$

или

$$a'(-\infty) \in \partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{a(+\infty)}(x_0)),$$

имеет ранг 1. Сначала мы покажем, что существуют ножницы с нижним основанием $a$ и центром $x$, сколь угодно близким к $x_0$. В свете предыдущего замечания такое рассмотрение применимо в том числе и к геодезической $a'$, идущей через $x_0$ в том же направлении, что и $a$.

Для числа $\rho > 0$ рассмотрим точки $y' = a(-\rho)$ и $y'' = a(\rho)$. Имеем

$$\partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{a(-\infty)}(x_0)) = \partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{y'}(x_0)),$$

$$\partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{a(+\infty)}(x_0)) = \partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{y''}(x_0)).$$

Полунепрерывная снизу функция

$$\mathrm{Td} : \partial_\infty X \times \partial_\infty X \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

достигает своего минимума на компактном множестве

$$Q = \partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{y'}(x_0)) \times \partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{y''}(x_0)).$$

Отсюда и из условия на ранг $a$ вытекает неравенство

$$\min(\mathrm{Td})|_Q > \pi. \tag{4.4}$$

Более того, при некоторых $K > \rho$ и $\varepsilon > 0$ существуют окрестности

$$\mathscr{N}' := \mathscr{N}_{y',K,\varepsilon}(\partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{y'}(x_0))), \quad \mathscr{N}'' := \mathscr{N}_{y'',K,\varepsilon}(\partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{y''}(x_0)))$$

теней на бесконечности точки $x_0$, для которых

$$\inf\{\mathrm{Td}(\xi, \eta) \mid (\xi, \eta) \in \mathscr{N}' \times \mathscr{N}''\} > \pi. \tag{4.5}$$

Выберем $\delta_1$-окрестность $B(x_0, \delta_1)$ точки $x_0$, определенную следствием 4.2 по окрестностям $\mathscr{N}_{y',K,\varepsilon/2}(\partial(\mathrm{Shadow}_{y'}(x_0, \rho)))$ и $\mathscr{N}_{y'',K,\varepsilon/2}(\partial(\mathrm{Shadow}_{y''}(x_0, \rho)))$.

Пусть также $\mathscr{N}_{\varepsilon/2}(\partial(\mathrm{Shadow}_{a(-\infty)}(x_0, \rho)))$ и $\mathscr{N}_{\varepsilon/2}(\partial(\mathrm{Shadow}_{a(+\infty)}(x_0, \rho)))$ — это $\frac{\varepsilon}{2}$-окрестности границ теней точки $x_0$ относительно точек $a(-\infty)$ и $a(+\infty)$.

По теореме 4.2 существует $\delta_2$-окрестность $B(x_0, \delta_2)$ точки $x_0$, в которой для каждой точки $x' \in B(x_0, \delta_2)$ верны включения

$$\mathrm{Shadow}_{a(-\infty)}(x', \rho) \subset \mathscr{N}_{\varepsilon/2}(\partial(\mathrm{Shadow}_{a(-\infty)}(x_0, \rho))),$$

$$\mathrm{Shadow}_{a(+\infty)}(x',\rho) \subset \mathscr{N}_{\varepsilon/2}(\partial(\mathrm{Shadow}_{a(+\infty)}(x_0,\rho))).$$

Обозначим $\delta_0 := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда для любой точки $x \in \mathscr{U}_{\delta_0}(x_0)$ и геодезических $b$ и $c$, удовлетворяющих условиям

- $b(0) = c(0) = x$,
- $b(-\infty) = a(-\infty)$,
- $c(+\infty) = a(+\infty)$,

имеют место включения

$$\begin{aligned} b(\rho) &\in \mathscr{N}_{\varepsilon/2}(\partial(\mathrm{Shadow}_{a(-\infty)}(x_0,\rho))), \\ c(-\rho) &\in \mathscr{N}_{\varepsilon/2}(\partial(\mathrm{Shadow}_{a(+\infty)}(x_0,\rho))). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Покажем, что

$$b(+\infty) \in \mathscr{N}' \tag{4.7}$$

и

$$c(-\infty) \in \mathscr{N}''. \tag{4.8}$$

Для луча $\gamma = [y'b(+\infty)]$ с натуральной параметризацией $\gamma : [0, +\infty) \to X$ и геодезической $a'$, проходящей через $x_0$ так, что $a'(+\infty) \in \partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{y'}(x_0))$, выполняется

$$|\gamma(2\rho)a'(\rho)| \le |\gamma(2\rho)b(\rho)| + |b(\rho)a'(\rho)|.$$

Первое слагаемое здесь имеет оценку

$$|\gamma(2\rho)b(\rho)| \le |\gamma(0)b(-\rho)| = |a(-\rho)b(-\rho)| \le |a(0)b(0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

В силу (4.6) геодезическая $a'$ может быть выбрана так, что для второго слагаемого также справедлива оценка

$$|b(\rho)a'(\rho)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Окончательно

$$|\gamma(2\rho)a'(\rho)| < \varepsilon,$$

что доказывает включение (4.7). Включение (4.8) рассматривается аналогично.

Итак, в силу (4.5) существует геодезическая $d$ в $X$, соединяющая точки $c(-\infty)$ и $b(+\infty)$, формируя в итоге ножницы $\langle a, b, c, d; x\rangle$.

Теперь, взяв последовательность $\delta_n \to 0$, построим для каждого $\delta_n$ ножницы $\langle a_n, b_n, c_n, d_n; x_n\rangle$, для которых $|x_0x_n| < \delta_n$. Выберем предельные точки $\xi, \eta \in \partial_\infty X$ для последовательностей $b_n(+\infty)$ и $c_n(-\infty)$ соответственно. Для них

$$\xi \in \partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{a(-\infty)}(x_0)), \quad \eta \in \partial_\infty(\mathrm{Shadow}_{a(+\infty)}(x_0)).$$

Значит, точки $\xi$ и $\eta$ можно соединить геодезической $a' = [\eta\xi]$ в $X$ так, что $a'(0) = x_0$ и для любого $\delta > 0$ существуют ножницы $\langle a', b', c', d'; x\rangle$ с нижним основанием $a'$, центр которых $x$ удален от $x_0$ на расстояние $|xx_0| < \delta$. Заметим, что точку $x$ всегда можно выбрать отличной от $x_0$ и не принадлежащей $a'$.

Осталось показать, что такие ножницы можно выбрать так, что $b'(+\infty)$ сколь угодно близка к $\xi$, а $c'(-\infty)$ — к $\eta$ в конической топологии на $\partial_\infty X$. Этого можно добиться, повторив предыдущие рассуждения применительно к окрестностям точек $a'(\pm\infty)$ вместо окрестностей теней на бесконечности точки $x_0$. Метод, по которому построена геодезическая $a'$, гарантирует, что множества

$$C_{-\infty}(B(a'(K),\varepsilon)) = \bigcup_{y \in B(a'(K),\varepsilon)} [ya'(-\infty)],$$

$$C_{+\infty}(B(a'(-K),\varepsilon)) = \bigcup_{z\in B(a'(-K),\varepsilon)} [za'(+\infty)]$$

пересекаются при любых $\varepsilon, K > 0$ и, более того,

$$C_{-\infty}(\mathscr{N}_\varepsilon(a'(K))) \cap C_{+\infty}(\mathscr{N}_\varepsilon(a'(-K))) \\ \cap (X \setminus (\mathrm{Shadow}_{y'}(x_0) \cup \mathrm{Shadow}_{y''}(x_0) \cup \{x_0\}) \cap B(x_0,\varepsilon)) \neq \varnothing.$$

Этого вполне достаточно, чтобы выполнить требуемое построение. □

**4.6. Непрерывность сдвига.** В настоящем пункте доказывается непрерывность функции сдвига $\delta$ как функции, определенной на подходящем подмножестве в $\partial_\infty X \times \partial_\infty X \times X$. Доказательство здесь значительно упрощено по сравнению с аналогичной теоремой в [2].

Пусть задана геодезическая $a : \mathbb{R} \to X$ строго ранга один. Обозначим через $Z(a) \subset \partial_\infty X \times \partial_\infty X \times X$ подмножество, состоящее из таких троек $(\xi,\eta,x) \in \partial_\infty X \times \partial_\infty X \times X$, что существуют ножницы $\langle a,b,c,d;x\rangle$ с $b(+\infty) = \xi$ и $c(-\infty) = \eta$.

**Теорема 4.5.** *Функция сдвига $\delta$ на множестве $Z(a)$ непрерывна.*

Доказательство. Используем (4.1). Пусть дана тройка $(\xi_0,\eta_0,x_0) \in Z(a)$. Точка $x_0$ является центром ножниц $\langle a,b_0,c_0,d_0;x_0\rangle$, где $b_0(+\infty) = \xi_0$ и $c_0(-\infty) = \eta_0$.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда, во-первых, по непрерывности функций Буземана $b_{a-}$ и $b_{a+}$ существует такое число $\sigma_1$, что если для точки $x' \in X$ справедливо неравенство $|x_0x'| < \sigma_1$, то

$$|b_{a+}(x') + b_{a-}(x') - b_{a+}(x_0) - b_{a-}(x_0)| < \varepsilon/3. \tag{4.9}$$

Во-вторых, воспользуемся совпадением геодезической и метрической границ пространства $X$. Иначе говоря, всякая окрестность $U$ геодезической идеальной точки $\xi \in \partial_g X$ есть окрестность метрической идеальной точки, задаваемой функцией Буземана $\beta_\xi$, и наоборот.

Выберем окрестность $V$ точки $x_0$, имеющую компактное замыкание, в которой значения функций Буземана $b_{d\pm}$ отличаются от $b_{d\pm}(x_0)$ не более чем на $\varepsilon/6$. Обозначим через

$$U_\pm(V) := C\biggl(V, \Bigl(b_\pm(x_0) - \frac{1}{6}\varepsilon, b_\pm(x_0) + \frac{1}{6}\varepsilon\Bigr)\biggr)$$

окрестности функций Буземана $b_\pm$ в $C(X)$, включающие функции, принимающие на $V$ значения, отличающиеся от $b_\pm$ не более чем на $\varepsilon/6$, и пусть $\mathscr{U}_\pm := U_\pm/\operatorname{consts} \cap \partial_m X$ — порождаемые ими окрестности в $\partial_m X = \partial_g X$. Совпадение границ означает, что если луч $d'$ таков, что $d'(+\infty) \in \mathscr{U}_+$, то для порождаемой им функции Буземана $\beta_{d'}$ в окрестности $V$ для любой точки $x'$ выполняется

$$|b_{d+}(x_0) - \beta_{d'}(x') - \mathrm{const}\,| < \varepsilon/3$$

с некоторой константой, и если луч $d''$ таков, что $d''(+\infty) \in \mathscr{U}_-$, то в окрестности $V$ имеем

$$|b_{d-}(x_0) - \beta_{d''}(x') - \mathrm{const}'\,| < \varepsilon/3.$$

Поскольку все функции Буземана с общим центром отличаются на константы, то в предыдущих неравенствах константы можно считать равными нулю.

Обозначим $\mathscr{U} = (\mathscr{U}_+ \times \mathscr{U}_- \times V) \cap Z$. Тогда для любой тройки $(\xi',\eta',x') \in \mathscr{U}$, порождающей ножницы $\langle a,b',c',d';x'\rangle$ со сдвигом $\delta'$, имеем

$$|\delta' - \delta| = |(b_{a-}(x_0) + b_{a+}(x_0) + b_{d-}(x_0) + b_{d+}(x_0)) \\ - (b_{a-}(x') + b_{a+}(x') + b_{d'-}(x') + b_{d'+}(x'))| < \varepsilon. \quad \square$$

**Теорема 4.6.** *Пусть $x_0 \in a$ — точка геодезической $a$ строго ранга один. Тогда если $(\xi, \eta, x) = (b(+\infty), c(-\infty), x) \subset Z$ стремится к $(a(+\infty), a(-\infty), x_0)$ в смысле топологии произведения на $\partial_\infty X \times \partial_\infty X \times X$, то $\delta(\xi, \eta, x) \to 0$.*

Доказательство. Определим «*закрытые*» ножницы $\langle a, a, a, a; x_0\rangle$ как совокупность четырех экземпляров линии $a$ и центра $x_0$. Для них естественно считать сдвигом тождественное преобразование $T = \mathrm{id}_a$, для которого $\delta T = 0$. При этом функция $\delta$, будучи доопределенной на $Z(a) \cup \{(a(+\infty), a(-\infty), x) \mid x \in a\}$ равенством $\delta(a(+\infty), a(-\infty), x) = 0$ при $x \in a$, остается непрерывной. $\square$

Ключевую роль в оставшейся части доказательства теоремы 1.4 играет следующее утверждение.

**Следствие 4.3.** *Пусть $a$ — геодезическая строго ранга один. Тогда существуют точка $x_0 \in a$, геодезическая $a'$, соединенная с $a$ асимптотической цепью, и число $\Delta > 0$, для которых при любом $\delta \in (0, \Delta)$ существуют ножницы $\langle a', b, c, d; x\rangle$, для которых величина сдвига $T$ равна $\delta T = \delta$.*

**4.7. Восстановление метрики на геодезической ранга один.** Процесс восстановления метрики на геодезической строго ранга один полностью соответствует процедуре, описанной в статье [2]. Здесь мы приводим доказательства в терминах $V$-метрик.

**Лемма 4.1.** *Пусть $x \notin a$ и $\xi, \eta \in \partial_\infty X$. Тогда если тройка $(\xi, \eta, x)$ принадлежит множеству $Z(a)$ в метрике $d$, то $(\xi, \eta, x) \in Z(a)$ и в любой $V$-метрике $d'$ на $X$.*

Доказательство. Если две полные геодезические $\gamma$ и $\gamma'$, задаваемые соответственно $r$-последовательностями $\{x_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$, асимптотичны в метрике $d$, то они асимптотичны в том же направлении и по отношению к произвольной реализующей $V$ метрике $d'$. Утверждение леммы следует из того факта, что понятие ножниц базируется только на асимптотичности геодезических. $\square$

**Лемма 4.2.** *Пусть геодезическая $a$ строго ранга один. Тогда для данных ножниц $\langle a, b, c, d; x\rangle$ образ $T(m) \in a$ произвольной точки $m \in a$ под действием сдвига $T$ не зависит от выбора $V$-метрики на $X$.*

Доказательство. По условию на ранг $a$ все четыре геодезические в ножницах имеют ранг один. Значит, они являются геодезическими и в произвольной $V$-метрике $d'$. Преобразования $R_{ab}$ и т. д., определяющие сдвиг $T$, определены для точки $m$ с помощью пересечений указанных геодезических с орисферами. Так как множество орисфер не зависит от выбора $V$-метрики, то и образ $T(m)$ определен независимо от $d'$. $\square$

**Теорема 4.7.** *Пусть $a$ — геодезическая в пространстве $(X, d)$ строго ранга один. Тогда она является геодезической в произвольной $V$-метрике $d'$ и вдоль $a$ выполняется равенство $d = d'$.*

Доказательство. Первое утверждение теоремы является следствием условия на ранг геодезической $a : \mathbb{R} \to X$. В силу следствия 4.3 найдется такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n > N$ существуют ножницы со сдвигом $T_n$ и величиной сдвига $\delta T_n = 1/n$. Пусть $x_0 = a(0)$, $x' = T_n(x)$ и $x_1 = (T_n)^n(x) = a(1)$. В силу равенства (4.1) величина $\delta T$ в $V$-метрике не зависит от выбора начальной точки. Поэтому $d(x_0, x') = d'(x_0, x') = 1/n$. Вообще если для точек $x, y \in a$ расстояние $d(x, y)$ рационально, то $d(x, y) = d'(x, y)$. Предельный переход, аналогичный примененному в доказательстве теоремы 3.1, приводит к равенству $d = d'$ для произвольных точек линии $a$. $\square$

Теперь мы готовы окончательно доказать основное утверждение статьи.

Доказательство теоремы 1.4. Эквивалентность утверждений (1)–(3) доказана в леммах 2.1 и 2.2. Все они легко следуют из (4). Остается доказать, что утверждение (4) есть следствие утверждений (1)–(3), т. е. что $d$ — единственная метрика на $X$, реализующая $V$.

Пусть $d'$ — $V$-метрика на пространстве $X$. Рассмотрим произвольные точки $x, y \in X$. Отрезок $[xy]$ включается в некоторую полную геодезическую $a$. Такая геодезическая может быть неединственной, но нам достаточно рассмотреть любую из них. Если $a$ имеет высший или виртуально высший ранг, то $d(x, y) = d'(x, y)$ в силу теоремы 3.1 или следствия 3.2. Если же $a$ имеет строго высший ранг, то равенство расстояний выполняется ввиду теоремы 4.7. $\square$

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Berestovskiĭ V. N.* Isometries in Aleksandrov spaces of curvature bounded above // Ill. J. Math. 2002. V. 46, N 2. P. 645–656.
2. *Андреев П. Д.* Восстановление метрики CAT(0)-пространства по диагональной трубке // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2003. Т. 299. С. 5–29.
3. *Берестовский В. Н.* Пространства Буземана ограниченной сверху кривизны по Александрову // Алгебра и анализ. 2002. Т. 46, № 2. С. 645–656.
4. *Beckman F. S., Quarles D. A., Jr.* On isometries of Euclidean spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1953. V. 4. P. 810–815.
5. *Александров А. Д.* Об отображениях, сохраняющих конгруэнтность // Докл. АН СССР. 1973. Т. 211, № 6. С. 1257–1260.
6. *Кузьминых А. В.* Отображения, сохраняющие расстояние 1 // Сиб. мат. журн. 1979. Т. 29, № 3. С. 597–602.
7. *Tyszka A.* Discrete versions of the Beckman–Quarles theorem // Aequationes Math. 2000. V. 59. P. 124–133.
8. *Tyszka A.* The Beckman–Quarles theorem for continuous mappings from $\mathbb{C}^n$ to $\mathbb{C}^n$. 2004. 20 p. (Preprint / ArXiv:math.MG/0406093).
9. *Александров А. Д., Берестовский В. Н., Николаев И. Г.* Обобщенные римановы пространства // Успехи мат. наук. 1986. Т. 41, № 3. С. 3–44.
10. *Ballmann W.* Lectures on spaces of nonpositive curvature. Boston; Basel; Schtuttgart: Birkhaüser, 1995.
11. *Bridson M., Haefliger A.* Metric spaces of nonpositive curvature. Berlin: Springer-Verl., 1999. (Grundlehren der Math. Wiss.; V. 319).
12. *Buyalo S. V.* Lectures on spaces of curvature bounded above. Urbana-Schampaign: Univ. Illinois, 1994. (Preprint).
13. *Alexander S. B., Bishop R. L.* The Hadamard–Cartan theorem in locally convex spaces // Enseign. Math. 1990. V. 36. P. 309–320.
14. *Kapovich I., Benakli N.* Boundaries of hyperbolic groups // Contemp. Math. 2002. V. 296. P. 39–94.
15. *Webster C., Winchester A.* Boundaries of hyperbolic metric spaces. 2003. (Preprint / ArXiv: math.MG/0310101).
16. *Ballmann W., Gromov M., Schroeder V.* Manifolds of nonpositive curvature. Boston; Basel; Schtuttgart: Birkhaüser, 1985.


*Статья поступила 28 октября 2004 г., окончательный вариант — 3 марта 2005 г.*

*Андреев Павел Дмитриевич*
*Поморский гос. университет имени М. В. Ломоносова,*
*пр. Ломоносова, 4, Архангельск 163060*
pdandreev@mail.ru