Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2006. Том 47, № 1

УДК 517.5

СВОЙСТВА БАЗИСНОСТИ В L_p СИСТЕМ СТЕПЕНЕЙ

Б. Т. Билалов

Аннотация: Рассматривается система степеней с комплекснозначными коэффициентами. Установлено необходимое и достаточное условие полноты и минимальности, а также необходимое условие базисности такой системы в лебеговых пространствах.

Ключевые слова: система степеней, свойства базисности, полнота, минимальность.

Многие задачи механики и математической физики требуют исследования базисных свойств в соответствующих банаховых пространствах систем вида [1–4]

$$a(t)v^n(t) + b(t)w^n(t), \quad n \geq 1, \tag{1}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $v(t)$ и $w(t)$ — (вообще говоря) комплекснозначные функции. Поэтому базисные свойства систем (1) изучались многими авторами [5–11]. При различных условиях на входящие в эту систему функции были получены различные условия полноты и в некоторых случаях минимальности в пространствах L_p. В основном исследование базисных свойств системы вида (1) сводится к разрешимости соответствующей краевой задачи сопряжения со сдвигом в классах Харди H_p и Смирнова E_p. Имеются тесные связи между базисными свойствами системы вида (1) и построенной по ней «двойной» системы степеней

$$\{A(t)\varphi^n(t); B(t)\overline{\varphi}^n(t)\}_{n\geq 0}. \tag{2}$$

Поэтому исследование базисных свойств системы (2), которая обобщает классическую систему экспонент $\{e^{int}\}_{-\infty}^{+\infty}$ и систему $\{e^{i(n+\beta\cdot\operatorname{sign} n)t}\}_{-\infty}^{+\infty}$ (см. [10, 12–14]), представляет особый интерес.

С другой стороны, рассмотрение системы (2) интересно и с теоретической точки зрения. Так, еще в 1926 г. Уолшем (см. [15]) доказана следующая

Теорема У. *Пусть Γ — произвольная кривая Жордана конечной плоскости z. Тогда любая функция $f(z)$, непрерывная на Γ, может быть равномерно приближена на Γ суммой полиномов от z и от $\bar{z}$ ($\bar{z}$ — комплексное сопряжение).*

Иначе говоря, система $\{z^n(t); \bar{z}^n(t)\}_{n\geq 0}$ полна в $C_0[a,b]$, а значит, и в $L_p(a,b)$, $p \geq 1$, где $\Gamma \equiv z\{[a,b]\}$ $(z(a) = z(b))$, $C_0[a,b] \equiv \{f \in C[a,b] : f(a) = f(b)\}$.

Взяв в качестве $B(t)$ функцию $\overline{A}(t)$ в (2) и перейдя от комплексной к действительнозначным функциям, получим эквивалентность базисных свойств систем (2) и

$$\{\operatorname{Re}[A(t)\varphi^n(t)]; \operatorname{Im}[A(t)\varphi^n(t)]\}_{n\geq 0}, \tag{3}$$

рассмотренной в [9, 16]. В случае, когда $A(t)$ кусочно гёльдерова на $[a,b]$, $\Gamma = \varphi\{[a,b]\}$ — кусочно ляпуновский контур, в [9] получено необходимое и достаточное условие полноты и минимальности системы (3) в $L_p^{\mathbb{R}}(a,b)$, $p \in (1,+\infty)$.

В предлагаемой работе дано необходимое и достаточное условие полноты и минимальности в L_p, $p \geq 1$ ($L_\infty \equiv C$), а также необходимое условие базисности в L_2 системы вида (1) при более общих предположениях относительно функций $A(t)$, $B(t)$ и $\varphi(t)$. Результаты работы анонсированы в [17].

1. Вспомогательные понятия и основные предположения

Пусть B — банахово пространство над полем комплексных чисел с нормой $\|\cdot\|_B$, в котором задана «двойная» система элементов

$$\{x_n^+; x_n^-\}_{n\geq 0}. \tag{4}$$

Определение. Систему (4) назовем *базисом в* B, если для любого $x \in B$ существует единственная последовательность комплексных чисел $\left\{a_n^+; a_n^-\right\}_{n\geq 0}$, для которой

$$\left\|\sum_{n=0}^{N^+} a_n^+ x_n^+ + \sum_{n=0}^{N^-} a_n^- x_n^- - x\right\| \to 0 \quad \text{при } N^-, N^+ \to \infty.$$

Из этого определения не следует безусловная базисность, так как если классическую систему экспонент $\{e^{int}\}_{-\infty}^{+\infty}$ записать в виде $\{e^{int}; e^{-i(n+1)t}\}_{n\geq 0}$, то, как известно, она образует базис в $L_p(-\pi,\pi)$, $1 < p < +\infty$, в смысле данного определения.

Через H_p и $E_p(D)$ обозначены обычные классы аналитических функций Харди и Смирнова в области D.

Будем предполагать, что комплекснозначные функции $A(t) \equiv |A(t)|e^{i\alpha(t)}$, $B(t) \equiv |B(t)|e^{i\beta(t)}$ и $\varphi(t)$ удовлетворяют следующим условиям.

1. Функции $|A(t)|$, $|B(t)|$ и $|\varphi'(t)|$ измеримы на (a,b), причем

$$\{|A(t)|^{\pm 1}; |B(t)|^{\pm 1}; |\varphi'(t)|^{\pm 1}\} < +\infty.$$

2. $\Gamma = \varphi\{[a,b]\}$ — замкнутый ($\varphi(a) = \varphi(b)$) спрямляемый простой контур Жордана, Γ либо кривая Радона (т. е. угол $\theta(\varphi(t))$ между касательной в точке $\varphi = \varphi(t)$ к кривой Γ и действительной осью есть функция ограниченной вариации на $[a,b]$), либо кусочно ляпуновский контур. Обозначим через $\{\varphi_k\}$ точки разрыва функции $\arg\varphi'(t)$ на (a,b). Кривая Γ не имеет точек заострения.

Для определенности будем считать, что, когда точка $\varphi = \varphi(t)$ с возрастанием t пробегает кривую Γ, внутренняя область $\operatorname{int}\Gamma$ остается слева.

3. Функции $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ кусочно непрерывны на $[a,b]$ и могут иметь бесконечное число точек разрыва первого рода. Пусть $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$ — точки разрыва этих функций на (a,b) соответственно.

4. Положим $\{\tilde{s}_k\} \equiv \{\alpha_k\} \cup \{\beta_k\} \cup \{\varphi_k\}$. Множество $\{\tilde{s}_k\}$ может иметь единственную предельную точку $s_0 \in (a,b)$. Функция $\theta(t) \equiv \beta(t) - \alpha(t) + \frac{2}{p}\arg\varphi'(t)$ в точке s_0 имеет справа и слева конечные пределы, где $p \in (1,+\infty)$ — некоторое число.

Не ограничивая общности, будем считать, что функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\arg\varphi'(t)$ непрерывны слева на (a,b).

Функцию $\arg\varphi'(t)$ определим следующим образом. Будем брать в каждой начальной точке разрыва $\widetilde{\varphi}_k$, где $(\widetilde{\varphi}_k, \widetilde{\varphi}_{k+1})$ — интервал непрерывности функции $\arg\varphi'(t))$, ветвь $\arg\varphi'(\widetilde{\varphi}_k+0)$. В конечной точке $\widetilde{\varphi}_{k+1}$ значение $\arg\varphi'(\widetilde{\varphi}_{k+1}-0)$ будем получать из выбранной ветви $\arg\varphi'(\widetilde{\varphi}_k+0)$ путем непрерывного изменения, причем $0 \le \arg\varphi'(a+0) < 2\pi$, $|\arg\varphi'(\widetilde{\varphi}_k+0) - \arg\varphi'(\widetilde{\varphi}_k-0)| < \pi$.

5. $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\tilde{h}_i| < +\infty$, где $\tilde{h}_i = \theta(\tilde{s}_i+0) - \theta(\tilde{s}_i-0)$.

Прежде чем сформулировать основные теоремы, определим некоторые величины, необходимые в дальнейшем.

Пусть r — номер, после которого выполняется условие

$$-\frac{2\pi}{q} < \tilde{h}_k < \frac{2\pi}{p}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1, \quad k \ge r.$$

Перенумеруем элементы множества $\{\tilde{s}_i\}_1^r$ по возрастанию и обозначим их через $\{s_i\}_i^r$. Перенумеруем соответствующие им скачки $\{\tilde{h}_i\}_i^r$ и обозначим их через $\{h_i\}_i^r$. Отметим, что в зависимости от того, принадлежит ли число $h_0 = \theta(s_0+0)-\theta(s_0-0)$ интервалу $(-\frac{2\pi}{q}, \frac{2\pi}{p})$, точка s_0 и число h_0 могут быть включены соответственно в множества $\{\tilde{s}_i\}_1^r$ и $\{\tilde{h}_i\}_1^r$.

Определим целые числа n_i, $i=\overline{1,r}$, из условий

$$-\frac{1}{q} < \frac{h_i}{2\pi} + n_{i-1} - n_i \le \frac{1}{p}, \quad n_0 = 0, \ i = \overline{1,r}. \tag{5}$$

Обозначим

$$\omega_\varphi \overset{\text{def}}{\equiv} \frac{1}{2\pi}\Big[\beta(a+0) - \beta(b-0) + \alpha(b-0) - \alpha(a+0) + \frac{2}{p}(\arg\varphi'(a+0) - \arg\varphi'(b-0))\Big] + \frac{2}{p} + n_r - 1. \tag{6}$$

Всюду в дальнейшем через $\overline{L\{M\}}$ обозначаем замыкание линейной оболочки множества M.

При доказательстве основных теорем нам понадобятся следующие леммы, которые представляют самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Пусть B — банахово пространство, система $\{x_i\}_{i\ge1} \subset B$ неминимальна, а $\{x_i\}_{i\ge2}$ минимальна в B. Тогда $x_1 \in X_1$, где X_1 — замыкание линейной оболочки $\{x_i\}_{i\ge2}$, т. е. $X_1 \equiv \overline{L\{x_i\}}_{i\ge2}$.*

Доказательство. Так как $\{x_i\}_{i\ge1}$ неминимальна, существует $r \in \mathbb{N}$ такое, что $x_r \in X_r^1$, где $X_r^1 \equiv \overline{L\{x_n\}}_{n\ge1, n\ne r}$.

Пусть $X_r^2 \equiv \overline{L\{x_n\}}_{n\ge2, n\ne r}$. Если $r=1$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $r>1$. Очевидно, что $\inf\limits_{x\in X_r^2} \|x_r - x\| = \rho > 0$, $\|\cdot\|$ — норма в B. Из $x_r \in X_r^1$ следует, что для любого $k>1$ существуют $N^{(k)}$ и $\{a_n^k\}_1^{N^{(k)}}$ такие, что

$$\Big\|x_r - \sum_{n=1, n\ne r}^{N^{(k)}} a_n^k x_n\Big\| < \frac{1}{k}. \tag{7}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{k} > \Big\|x_r - \sum_{n=2, n\ne r}^{N^{(k)}} a_n^k x_n\Big\| - |a_1^k|\|x_1\| \ge \rho - |a_1^k|\|x_1\|,$$

т. е.

$$\|a_1^k\| > \frac{1}{\|x_1\|}\left(\rho - \frac{1}{k}\right) \geq \frac{\rho}{2\|x_1\|} > 0 \quad \forall k \geq N_0$$

при некотором N_0, и, значит, $\inf\limits_{k\geq N_0} |a_1^k| \geq \frac{\rho}{2\|x_1\|}$. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется $N_1 \geq N_0$ такое, что $\frac{2\|x_1\|}{\rho k} < \varepsilon$ для любого $k \geq N$. В результате из (7) имеем

$$\left\| x_1 - \left(\frac{1}{a_1^k} x_r - \sum_{n=2, n\neq r}^{N^{(k)}} \frac{a_n^k}{a_1^k} x_n \right) \right\| < \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{|a_1^k|} \leq \frac{2\|x_1\|}{\rho k} < \varepsilon \quad \forall k \geq N_1, \text{ т. е. } x_1 \in X_1.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть B — банахово пространство. Система $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset B$ минимальна в B только в том случае, если $x_k \notin \overline{L\{x_n\}}_{n\geq k+1}$ $\forall k \in N$.*

В [18] условие этой леммы положено в основу определения усиленно линейной независимости систем.

Доказательство. Покажем, что $x_2 \notin \overline{L\{x_n\}}_{n\geq 1, n\neq 2}$. Ясно, что есть такое $\rho > 0$, что

$$\left\| \sum_{n=3}^{N} a_n^N x_n - x_2 \right\| \geq \rho > 0$$

для всех $N \geq 3$ и $\{a_n^N\}$. Пусть $x_2 \in \overline{L\{x_n\}}_{n\geq 1, n\neq 2}$. Тогда для любого $k \geq 1$ найдутся N и $\{a_n^k\}_{n=1}^N$ такие, что

$$\left\| \sum_{n=3}^{N} a_n^k x_n + a_1^k x_1 - x_2 \right\| < \frac{1}{k}. \tag{8}$$

Тем самым

$$\frac{1}{k} > \left\| \sum_{n=3}^{N} a_n^k x_n - x_2 \right\| - |a_1^k| \|x_1\| \geq \rho - |a_1^k| \|x_1\|, \quad |a_1^k| \geq \frac{1}{\|x_1\|}\left(\rho - \frac{1}{k}\right).$$

Из (8) имеем

$$\left\| \sum_{n=3}^{N} \frac{a_n^k}{a_1^k} x_n - \frac{1}{a_1^k} x_2 + x_1 \right\| \leq \frac{1}{k} \cdot \frac{\|x_1\|}{\rho - 1/k} \to 0$$

при $k \to \infty$, т. е. $x_1 \in \overline{L\{x_n\}}_{n\geq 2}$. Получили противоречие, следовательно, $x_2 \notin \overline{L\{x_n\}}_{n\geq 1, n\neq 2}$. Итак, по условиям леммы 2 для любого $k_0 \geq 1$ будет

$$x_{k_0 - 1} \notin \overline{L\{x_n\}}_{n\geq k_0 - 1, n\neq k_0}, \quad x_{k_o} \notin \overline{L\{x_n\}}_{n\geq k_0 + 1}.$$

Из предыдущих рассуждений следует, что $x_{k_o} \notin \overline{L\{x_n\}}_{n\geq k_0 - 1, n\neq k_0}$. Рассмотрим систему $\{x_{k_0-2}; x_{k_0}; x_{k_0-1}; x_{k_0+1}; \dots\}$. Для нее выполняются все условия леммы 2, если в качестве элементов x_1, x_2 взять соответственно x_{k_0-2} и x_{k_0}. В результате $x_{k_0} \notin \overline{L\{x_{k_0-2}; x_{k_0-1}; x_{k_0+1}; \dots\}}$. Продолжая этот процесс, в итоге получаем $x_{k_0} \notin \overline{L\{x_n\}}_{n\geq 1, n\neq k_0}$. То, что из минимальности вытекает выполнение условий леммы, очевидно. Лемма доказана.

2. Необходимое и достаточное условие полноты системы степеней

Основным результатом этого пункта является следующая

Теорема 1. *Пусть функции $A(t), B(t)$ и $\varphi(t)$ удовлетворяют условиям* 1–5 *и ω_φ определяется из* (5), (6). *Тогда система* (2) *полна в $L_p(a,b)$, $1 < p < +\infty$, только в том случае, если $\omega_\varphi \le \frac{1}{p}$.*

Доказательство. Полнота системы (2) в L_p эквивалентна равенству нулю п. в. любой $f \in L_p$, для которой

$$\int_a^b A\varphi^n \bar{f} dt = 0, \quad \int_a^b B\overline{\varphi}^n \bar{f}\, dt = 0, \quad n = \overline{0,\infty}. \tag{9}$$

Обозначим через $t = \psi(\varphi)$ функцию, обратную к $\varphi = \varphi(t)$ на (a,b). Очевидно, что $t = \psi(\varphi)$ является однозначной и кусочно дифференцируемой на $\Gamma\backslash\{\varphi(a) = \varphi(b)\}$. В дальнейшем точка $\varphi_0 = \varphi(a) = \varphi(b)$ рассматривается как «склеенные» две различные «концевые» точки: $\varphi_0^+ = \varphi(a)$, $\varphi_0^- = \varphi(b)$. Тогда естественно считать $\psi(\varphi_0^+) = a$ и $\psi(\varphi_0^-) = b$. Из (9) имеем

$$\int_a^b A\varphi^n \bar{f}\, dt = \int_\Gamma A(\psi(\varphi))\bar{f}(\psi(\varphi))[\varphi'(\psi(\varphi))]^{-1}\varphi^n d\varphi$$
$$= \int_\Gamma \Phi_1(\varphi)\varphi^n d\varphi = 0, \quad n = \overline{0,\infty}, \tag{10}$$

где

$$\Phi_1(\varphi) = \frac{A(\psi(\varphi))\bar{f}(\psi(\varphi))}{\varphi'(\psi(\varphi))}.$$

Из условия 1 следует, что $\Phi_1(\varphi) \in L_1(\Gamma)$. Тогда согласно [19, с. 205] равенства (10) эквивалентны существованию функции $F_1(z)$ из класса Смирнова $E_1(\operatorname{int}\Gamma) : F_1^+(\varphi) = \Phi(\varphi)$ п. в. на Γ, где $F_1^+(\varphi)$ — граничные значения по всем некасательным путям изнутри области $\operatorname{int}\Gamma$ функции $F(z)$ на Γ. Из условия 1 и того, что $f \in L_q(a,b)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$, следует, что $F_1^+ \in L_q(\Gamma)$. Из [20, с. 90] согласно условию 2 вытекает, что $\operatorname{int}\Gamma$ принадлежит классу C областей Смирнова. Тогда по теореме В. И. Смирнова [20, с. 92] функция $F_1(z)$ принадлежит классу $E_q(\operatorname{int}\Gamma)$. Выражая $\bar{f}$ через F_1^+, имеем

$$\bar{f}(\psi(\varphi)) = \frac{\varphi'(\psi(\varphi))}{A(\psi(\varphi))}F_1^+(\varphi), \quad \varphi \in \Gamma.$$

Из второго равенства (9) находим

$$\int_a^b \overline{B}(t)\varphi^n(t)f(t)\, dt = \int_\Gamma \Phi_2(\varphi)\varphi^n\, d\varphi = 0, \quad n = \overline{0,\infty},$$

где

$$\Phi_2(\varphi) = \frac{\overline{B}(\psi(\varphi))}{\varphi'(\psi(\varphi))} \cdot f(\psi(\varphi)).$$

Аналогично предыдущему показываем, что существует функция $F_2(z) \in E_q(\operatorname{int}\Gamma)$, для которой $F_2^+(\varphi) = \Phi_2(\varphi)$ п. в. на Γ. В результате

$$\bar{f}(\psi(\varphi)) = \frac{\varphi'(\psi(\varphi))}{B(\psi(\varphi))}\overline{F}_2^+(\varphi), \quad \varphi \in \Gamma. \tag{11}$$

Таким образом, получаем следующую задачу сопряжения в классе Смирнова $E_q(\operatorname{int}\Gamma)$:

$$F_1^+(\varphi) - \frac{A(\psi(\varphi))}{B(\psi(\varphi))} \cdot \frac{\overline{\varphi}'(\psi(\varphi))}{\varphi'(\psi(\varphi))}\overline{F}_2^+(\varphi) = 0 \quad \text{п. в. на } \Gamma. \tag{12}$$

Итак, если система (2) не полна в $L_p(a,b)$, то однородная задача сопряжения (12) нетривиально разрешима в классе $E_q(\operatorname{int}\Gamma)$.

Пусть теперь задача (12) имеет нетривиальное решение $(F_1(z); F_2(z))$ в классе $E_q(\operatorname{int}\Gamma)$. Рассмотрим функцию (11). По теореме 11.4 работы [20, с. 91] функции $|F_i^+(\varphi)|^q$, $i = 1,2$, суммируемы вдоль Γ, т. е.

$$\int\limits_\Gamma |F_i^+|^q|\,d\varphi| \le C < +\infty, \quad i = 1,2.$$

Принимая во внимание условие 1, получим

$$\int\limits_a^b |f(\varphi(t))|^q\,dt = \int\limits_a^b |F_2^+(\varphi(t))|^q \frac{|\varphi'(t)|^{q-1}}{|\overline{B}(t)|^q}|d\varphi(t)| \le C_0 \int\limits_\Gamma |F_2^+(\varphi)|^q|d\varphi|, \quad C_0 > 0.$$

Значит, $g(t) \equiv f(\varphi(t)) \in L_q(a,b)$.

Очевидно, что $F_i(z) \in E_1(\operatorname{int}\Gamma)$, $i = 1,2$. Тогда выполняется следующее равенство [19, с. 205]:

$$\int\limits_\Gamma F_i^+(\varphi)\varphi^k d\varphi = 0, \quad k \ge 0,\ i = 1,2.$$

Полагая здесь сначала $F_1^+(\varphi) = \frac{A(\psi(\varphi))}{\varphi'(\psi(\varphi))}\bar{f}(\varphi)$, затем $F_2^+(\varphi) = \frac{\overline{B}(\psi(\varphi))}{\varphi'(\psi(\varphi))}f(\varphi)$, получаем равенства (9).

Таким образом, если задача сопряжения (12) нетривиально разрешима в классе $E_q(\operatorname{int}\Gamma)$, то система (2) не полна в $L_p(a,b)$.

Итак, полнота системы (2) в $L_p(a,b)$, $p \in (1,+\infty)$, эквивалентна существованию только нулевого решения задачи сопряжения (12) в классе Смирнова $E_q(\operatorname{int}\Gamma)$.

Обозначим через $z = \omega(\xi)$, $\omega'(0) > 0$, $\omega(-\pi) = \varphi(a)$, функцию, осуществляющую конформное однолистное отображение круга $D = \{\xi \in C/|\xi| < 1\}$ на $\operatorname{int}\Gamma$. Рассмотрим следующие функции, определенные в единичном круге:

$$\Phi_i(\xi) \equiv F_i[\omega(\xi)][\omega'(\xi)]^{\frac{1}{q}}, \quad i = 1,2.$$

Известно [20, с. 91], что функции $F_i(z)$, $i = 1,2$, принадлежат классу Смирнова $E_q(\operatorname{int}\Gamma)$ тогда и только тогда, когда функции $\Phi_i(\xi)$, $i = 1,2$, принадлежат классу Харди H_q в единичном круге. Очевидно, что $\varphi = \omega(e^{i\sigma})$, $-\pi < \sigma < \pi$. Тогда из (12) имеем

$$\Phi_1^+(\xi) - G(\omega(\xi))\left[\frac{\omega'(\xi)}{\overline{\omega}'(\xi)}\right]^{\frac{1}{q}}\overline{\Phi}_2^+(\xi) = 0, \quad |\xi| = 1, \tag{13}$$

где
$$G(\varphi) = \frac{A(\psi(\varphi))}{B(\psi(\varphi))} \cdot \frac{\overline{\varphi}'(\psi(\varphi))}{\varphi'(\psi(\varphi))}, \quad \varphi \in \Gamma.$$
Следовательно, полнота системы (2) в $L_p(a,b)$ эквивалентна существованию только нулевого решения задачи сопряжения (13) в классе Харди H_q. Введем следующие функции:
$$\widetilde{A}(\sigma) \equiv A(\psi(\omega(e^{i\sigma}))),$$
$$\widetilde{B}(\sigma) \equiv B(\psi(\omega(e^{i\sigma})))\frac{\varphi'(\psi(\omega(e^{i\sigma})))}{\overline{\varphi}'(\psi(\omega(e^{i\sigma})))}\left[\frac{\overline{\omega}'(e^{i\sigma})}{\omega'(e^{i\sigma})}\right]^{\frac{1}{q}}, \quad -\pi < \sigma \leq \pi.$$

Рассмотрим систему экспонент
$$\{\widetilde{A}(\sigma)e^{in\sigma}; \widetilde{B}(\sigma)e^{-in\sigma}\}_{n=1}^{\infty}. \tag{14}$$
Рассуждая, как и выше, доказываем, что полнота системы (14) в $L_p(-\pi,\pi)$ эквивалентна существованию только нулевого решения задачи сопряжения (13) в классе Харди H_q в единичном круге. Следовательно, полнота системы (2) в $L_p(a,b)$ эквивалентна полноте системы (14) в $L_p(-\pi,\pi)$.

Обозначим через $\xi = \tau(z)$ обратную функцию к $z = \omega(\xi)$, осуществляющую конформное однолистное отображение области $\operatorname{int}\Gamma$ на единичный круг. Пусть $\tau_k = \tau(\varphi(\tilde{s}_k))$, $k = \overline{1,\infty}$. Очевидно, что множество $\{\sigma_k = \arg\tau_k\}_1^{\infty}$ состоит из точек разрыва функции $\tilde{\theta}(\sigma) \equiv \arg\widetilde{B}(\sigma) - \arg\widetilde{A}(\sigma)$ на $(-\pi,\pi)$. Ясно, что
$$\arg\widetilde{A}(\sigma) \equiv \alpha(\psi(\omega(e^{i\sigma}))),$$
$$\arg\widetilde{B}(\sigma) \equiv \beta(\psi(\omega(e^{i\sigma}))) + 2\arg\varphi'(\psi(\omega(e^{i\sigma}))) - \frac{2}{q}\arg\omega'(e^{i\sigma}).$$
Отметим, что $\varphi'(\nu(\sigma))$ — значение функции $\varphi(t)$ в точке $t = \nu(\sigma)$. Используя теорему 11.2 из [20, с. 88], представим функцию $\arg\omega'(e^{i\sigma})$ в следующем виде:
$$\arg\omega'(e^{i\sigma}) = \theta(s(\sigma)) - \sigma - \frac{\pi}{2}, \quad -\pi < \sigma \leq \pi,$$
где $\theta(s(\sigma))$ — угол между касательной в точке $\omega(e^{i\sigma})$ к кривой Γ и действительной осью; $s(\sigma)$ — длина дуги, отсчитываемая от точки $\varphi = \varphi(a)$ в положительном направлении до точки $\omega(e^{i\sigma})$, $-\pi < \sigma \leq \pi$. Из условий 1–5 следует, что функции $\widetilde{A}(\sigma)$ и $\widetilde{B}(\sigma)$ удовлетворяют всем условиям теоремы 1 на $[-\pi,\pi]$ из [21]. Учитывая геометрический смысл аргумента производной и применяя результаты работы [21] к системе (14), получаем утверждение теоремы. Теорема доказана.

3. Необходимое и достаточное условие минимальности системы степеней

Справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть функции $A(t)$, $B(t)$ и $\varphi(t)$ удовлетворяют условиям 1–5, ω_φ определяется из (5), (6). Тогда система (2) минимальна в $L_p(a,b)$, $1 < p < +\infty$, только в том случае, если $\omega_\varphi > -\frac{1}{q}$, $0 \in \operatorname{int}\Gamma$.*

Доказательство. Сначала предположим, что $0 \in \operatorname{int}\Gamma$. Пусть $-\frac{1}{q} < \omega \leq \frac{1}{p}$. Применяя теорему 1 к системе
$$\{A_1(t)\varphi^n(t); B(t)\overline{\varphi}^n(t)\}_{n=0}^{\infty},$$

где $A_1(t) \equiv A(t)\cdot\varphi(t)$, и учитывая, что $\arg\varphi(b) - \arg\varphi(a) = 2\pi$, получаем, что она не полна в $L_p(a,b)$. Из того, что (2) полна в $L_p(a,b)$, следует, что $A(t) \notin \overline{\{A(t)\varphi^{n+1}(t); B\overline{\varphi}^n(t)\}}_{n=0}^{\infty}$, причем дефект этой системы равен 1. Рассмотрим систему

$$\{A_2(t)\varphi^n(t); B(t)\overline{\varphi}^n(t)\}_{n=0}^{\infty}, \tag{15}$$

где $A_2(t) \equiv A(t)\varphi^2(t)$. Как показано при доказательстве полноты, подпространство функций из $L_q(a,b)$, аннулирующих последовательность (15), и подпространство решений задачи сопряжения

$$F_1^+(\varphi) - \frac{A_2(\psi(\varphi))}{B(\psi(\varphi))}\cdot\frac{\overline{\varphi}'(\psi(\varphi))}{\varphi'(\psi(\varphi))}\overline{F}_2^+(\varphi) = 0, \quad \varphi\in\Gamma,$$

в классе $E_q(\operatorname{int}\Gamma)$ имеют одинаковую размерность. В свою очередь, эта задача эквивалентна задаче

$$\Phi_1^+(\xi) - G(\omega(\xi))\left[\frac{\omega'(\xi)}{\overline{\omega}'(\xi)}\right]^{\frac{1}{q}}\overline{\Phi}_2^+(\xi) = 0, \quad |\xi| = 1, \tag{16}$$

в H_q, где $G(\varphi) = \frac{A_2(\psi(\varphi))}{B(\psi(\varphi))}\cdot\frac{\overline{\varphi}'(\psi(\varphi))}{\varphi'(\psi(\varphi))}$.

Аналогичная связь имеется между задачей (16) и системой

$$\{\widetilde{A}(\sigma)e^{in\sigma}; \widetilde{B}(\sigma)e^{-in\sigma}\}_{n=1}^{\infty}, \tag{17}$$

где $\widetilde{A}(\sigma) \equiv A_2(\psi(\omega(e^{i\sigma}))), B(\sigma)$ из п. 2. По теореме 1 работы [21] система $\{\widetilde{A}e^{in\sigma}; \widetilde{B}e^{-ik\sigma}\}_{n=-1,k=1}^{\infty}$ полна и минимальна в $L_p(-\pi,\pi)$, значит, система (17) имеет дефект, равный 2. Следовательно, и система (15) имеет дефект, равный 2, в результате

$$A(t)\varphi(t) \notin \overline{\{A(t)\varphi^k(t); \overline{B}\varphi^n(t)\}}_{k=2,n=0}^{\infty}.$$

Продолжая этот процесс, получаем, что для любого $l \geq 0$

$$A\varphi^l \notin \overline{\{A\varphi^k; B\overline{\varphi}^n\}}_{k=l+1,n=0}^{\infty}, \quad B\varphi^l \notin \overline{\{A\varphi^k; B\overline{\varphi}^n\}}_{k=0,n=l+1}^{\infty}.$$

Из леммы 2 следует минимальность системы (2) в $L_p(a,b)$. То, что при $\omega \leq -\frac{1}{q}$ система (2) полна, но неминимальна, доказывается аналогично теореме 1 работы [21].

Рассмотрим случай, когда $0 \in \operatorname{ext}\Gamma$. Пусть сначала $\omega \leq \frac{1}{p}$. Из $0 \in \operatorname{ext}\Gamma$ вытекает, что $\arg\varphi(b) = \arg\varphi(a)$. Тогда из теоремы 1 в [21] следует, что система

$$\{A(t)\varphi^n(t); B(t)\overline{\varphi}^n\}_{n=m}^{\infty} \tag{18}$$

полна в $L_p(a,b)$ для любого целого m, т. е. (1) неминимальна.

Пусть теперь $\omega > \frac{1}{p}$. Как уже показано, полнота системы (18) эквивалентна существованию только нулевого решения задачи сопряжения

$$\Phi_1^+(\varphi) - \frac{A(\psi(\varphi))}{B(\psi(\varphi))}\cdot\frac{\overline{\varphi}'(\psi(\varphi))}{\varphi'(\psi(\varphi))}\cdot\frac{\varphi^m}{\overline{\varphi}^m}\overline{\Phi}_2^+(\varphi) = 0, \quad \varphi\in\Gamma, \tag{19}$$

в $E_q(\operatorname{int}\Gamma)$.

Очевидно, что если $(F_1(z); F_2(z))$ является решением задачи (12), то $\Phi_i(z) \equiv F_i(z)\cdot z^m$, $i = 1,2$, — решение (19), и, обратно, так как $z^{\pm m}$ является аналитическим в $\operatorname{int}\Gamma$. Значит, подпространства решений задач (12) и (19) имеют одинаковую размерность. В итоге множество функций из $L_q(a,b)$, аннулирующих последовательности (2) и (18) при любом $m \geq 0$, имеют одинаковую размерность. Таким образом, удаление m первых пар функций системы (2) не влияет на ее полноту в $L_p(a,b)$ и, значит, она неминимальна.

Пусть теперь $0 \in \Gamma$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Докажем, что при любом $m \geq 0$ система (18) неминимальна. Пусть при некотором целом $m_0 \geq 0$ система (18) минимальна в $L_p(a,b)$, и пусть $\{h_n^+(t); h_n^-(t)\}_{n=m_0}^{\infty}$ — биортогональная ей система, т. е.

$$\int_a^b A(t)\varphi^{m_0}(t)\bar{h}_{m_0}^+(t)\,dt = \int_\Gamma A(\psi(\varphi))\frac{\bar{h}_{m_0}^+(\psi(\varphi))}{\varphi'(\psi(\varphi))}\varphi^{m_0}\,d\varphi = 1 \neq 0, \qquad (20)$$

$$\int_a^b A(t)\varphi^{m_0+n}(t)\bar{h}_{m_0}^+(t)\,dt = \int_\Gamma A(\psi(\varphi))\frac{\bar{h}_{m_0}^+(\psi(\varphi))}{\varphi'(\psi(\varphi))}\varphi^{n+m_0}\,d\varphi = 0, \quad n \geq 1, \qquad (21)$$

где $t = \psi(\varphi)$ — обратная к $\varphi = \varphi(t)$ функция.

Введем функцию

$$\omega(\varphi) = \int_{\varphi_0^-}^{\varphi} \xi^{m_0} A(\psi(\xi))\frac{\bar{h}_{m_0}^+(\psi(\xi))}{\varphi'(\psi(\xi))}\,d\xi,$$

где интегрирование идет от точки $\varphi_0^- = \varphi(a)$ по контуру Γ в положительном направлении до точки φ. Интегрируя по частям, из (21) имеем

$$0 = \varphi^n\omega(.\varphi)\Big|_{\varphi_0^-}^{\varphi_0^+} - n\int_\Gamma \varphi^{n-1}\omega(\varphi)d\varphi, \quad n = \overline{1,\infty}.$$

Из $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ следует, что

$$\int_\Gamma \varphi^n\omega(\varphi)d\varphi = 0, \quad n = \overline{0,\infty}. \qquad (22)$$

Функция $\omega(\varphi)$ имеет ограниченное изменение относительно длины дуги s. Тогда по теореме Риссов [19, с. 209] из (22) следует, что функция $\omega(\varphi)$ абсолютно непрерывна на Γ и, значит, $\omega(\varphi_0^-) = \omega(\varphi_0^+)$. С другой стороны, из (20) имеем

$$\omega(\varphi_0^+) - \omega(\varphi_0^-) = \int_\Gamma A(\psi(\varphi))\frac{\bar{h}_{m_0}^+(\psi(\xi))}{\varphi'(\psi(\xi))}\varphi^{m_0}\,d\varphi \neq 0.$$

Получили противоречие. Теорема доказана.

Замечание. Как следует из доказательств теорем 1, 2, на полноту и минимальность системы (1) влияет только разность аргументов функций $A(t)$, $B(t)$ (т. е. на утверждения этих теорем функция $\xi(t)$ не имеет никакого влияния, если $\alpha = \beta (\operatorname{mod} \xi)$).

4. Необходимое условие базисности систем степеней в L_2

В этом пункте рассматривается базисность системы (1) в L_2. Оказывается, система экспонент, которая образует базис в L_2, является исключением среди систем вида (1).

Теорема 3. *Пусть функции $A(t)$, $B(t)$, $\varphi(t)$ удовлетворяют условиям* 1, 2. *Если система* (1) *образует базис в* $L_2(a,b)$, *то* $|\varphi(t)| \equiv \mathrm{const}$ *на* $[a,b]$.

Доказательство. Допустим противное. Пусть

$$R = \max_{[a,b]} |\varphi(t)| > \min_{[a,b]} |\varphi(t)| = r.$$

Из базисности (2) следует, что любая $f \in L_2$ имеет биортогональное разложение

$$f(t) = A(t) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi^n(t) + B(t) \sum_{n=0}^{\infty} b_n \overline{\varphi}^n(t). \tag{23}$$

Обозначим

$$f^+(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi^n(t).$$

Из базисности и из условия 1 получаем, что $f^+(t) \in L_2(a,b)$. Рассмотрим степенной ряд $F(z) \equiv \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Его радиус сходимости обозначим через R_0. Покажем, что $R_0 \geq R$. Пусть $R_0 < R$. Так как $|\varphi(t)| \in C[a,b]$, найдется точка $t_0 \in [a,b]$ такая, что $R = |\varphi(t_0)|$. Следовательно, существует δ-окрестность $\overline{G}_\delta(t_0) = [t_0-\delta, t_0+\delta]$ (при $t_0 = a$ или $t_0 = b$ — односторонняя окрестность) точки t_0 такая, что $R_0 < |\varphi(t)| \leq R$ для любого $t \in \overline{G}_\delta(t_0)$, т. е. $r_\delta = \min\limits_{\overline{G}_\delta(t_0)} |\varphi(t)| > R_0$. Из сходимости в L_2 ряда (23) следует, что $\|a_n \varphi^n(t)\|_{L_2} \to 0$ при $n \to \infty$, где $\|\cdot\|_{L_2}$ — норма в $L_2(a,b)$. Таким образом, $\|a_n \varphi^n(t)\|_{L_2(\overline{G}_\delta(t_0))} \to 0$, $n \to \infty$. Как известно, $R_0 = \frac{1}{\overline{\lim\limits_n} \sqrt[n]{|a_n|}}$, т. е. существует последовательность $\{n_k\}$ такая, что $R_0^{-1} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}$. Так как $r_\delta > R_0$, то для достаточно больших k

$$r_\delta > \frac{1}{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}}, \quad \text{т. е. } |a_{n_k} \varphi^{n_k}(t)| > 1 \ \forall t \in \overline{G}_\delta(t_0).$$

Отсюда $\|a_{n_k} \varphi^{n_k}(t)\|_{L_2(\overline{G}_\delta(t_0))} \geq 2\delta > 0$ для достаточно больших k; противоречие. Значит, $R_0 \geq R$. Следовательно, для любой $f \in L_2$ функция $F(z)$ является аналитической в круге $z : |z| < R$. Так как $r < R$, найдется δ_0-окрестность некоторой точки $\tau \in (a,b)$ такая, что $|\varphi(t)| < R$ для любого $t \in D_{\delta_0}(\tau) = [\tau - \delta_0, \tau + \delta_0]$. Очевидно, что $F^+[\varphi(t)] = f^+(t)$ п. в. на $D_{\delta_0}(\tau)$. Из условий 1, 2 вытекает, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ сходится в $L_2(\Gamma)$. Тогда

$$\int\limits_\Gamma \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n \xi^k \, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_\Gamma \xi^{n+k} \, d\xi = 0 \quad \forall k \geq 0.$$

Из этого равенства и теоремы Смирнова [22, с. 424] следует, что существует $F_1(z) \in E_1(\operatorname{int}\Gamma)$, для которой $F_1(\xi) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ п. в. на Γ. По условию 2 $\operatorname{int}\Gamma$ принадлежит классу C областей Смирнова [20, с. 90]. Так как $F_1^+(\xi) \in L_2(\Gamma)$, опять же по теореме Смирнова [20, с. 92] функция $F_1(z)$ принадлежит $E_2(\operatorname{int}\Gamma)$. Из предыдущих рассуждений вытекает, что $F_1^+[\varphi(t)] = F^+[\varphi(t)]$ п. в. на $D_{\delta_0}(\tau)$. По теореме единственности Привалова [22, с. 413] $F_1(z) \equiv F(z)$ в $\operatorname{int}\Gamma$.

Следовательно, $F(z) \in E_2(\operatorname{int}\Gamma)$ и $F^+[\varphi(t)] = f^+(t)$ п. в. на $[a,b]$.

Аналогично доказывается, что функция

$$\Phi(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \bar{b}_n z^n$$

принадлежит $E_2(\operatorname{int}\Gamma)$ и

$$\overline{\Phi}[\varphi(t)] = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \overline{\varphi}^n(t) \quad \text{п. в. на } [a,b].$$

В итоге функции $F(z)$ и $\Phi(z)$ являются решениями следующей задачи сопряжения в $E_2(\operatorname{int}\Gamma)$:

$$A(t)F^{+}[\varphi(t)] + B(t)\overline{\Phi}^{+}[\varphi(t)] = f(t) \quad \text{п. в. на } [a,b]. \tag{24}$$

Аналогично доказательству теоремы 1 получаем, что однородная задача

$$A(t)F^{+}[\varphi(t)] + B(t)\overline{\Phi}^{+}[\varphi(t)] = 0 \quad \text{п. в. на } [a,b]$$

имеет только тривиальное решение в $E_2(\operatorname{int}\Gamma)$, так как (2) полна в $L_2(a,b)$. Значит, (24) однозначно разрешима в $E_2(\operatorname{int}\Gamma)$.

Так как $r < R$, найдется $z_0 \in \operatorname{ext}\Gamma$ такая, что $|z_0| < R$. Рассмотрим функцию

$$f_0(\varphi(t)) \equiv \frac{1}{\varphi(t) - z_0} \equiv \frac{f(t)}{A(t)}.$$

Очевидно, что

$$f_0(z) = \frac{1}{z - z_0} \in E_2(\operatorname{int}\Gamma)$$

и, более того,

$$A(t)f_0^{+}[\varphi(t)] = f(t) \quad \text{на } [a,b]. \tag{25}$$

Сравнивая (25) с (24), из единственности получаем, что $F(z) \equiv f_0(z)$, $\Phi(z) \equiv 0$ в $\operatorname{int}\Gamma$. Тем самым $F(z)$ является аналитическим продолжением $f_0(z)$ из области $\operatorname{int}\Gamma$ в $C_R \setminus \operatorname{int}\Gamma$, $C_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$. Но из единственности аналитического продолжения следует, что это невозможно, так как $z_0 \in C_R$ является полюсом функции $f_0(z)$ в C_R. Теорема доказана.

Замечание. Как показано в [23], в случае базисности система вида (1) изоморфна классической системе экспонент.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В.* Об одной системе функций // Успехи мат. наук. 1950. Т. 5, № 4. С. 150–151.
2. *Пономарев С. М.* Об одной задаче на собственные значения // Докл. АН СССР. 1979. Т. 249, № 5. С. 1068–1070.
3. *Шкаликов А. А.* О свойствах части собственных и присоединенных элементов самосопряженных квадратичных пучков операторов // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283, № 5. С. 1100–1194.
4. *Габов С. А., Крутицкий П. А.* О нестационарной задаче Ларсена // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1987. Т. 27, № 8. С. 1184–1194.
5. *Джавадов М. Г.* О полноте некоторой части собственных функций несамосопряженного дифференциального оператора // Докл. АН СССР. 1964. Т. 159, № 4. С. 723–725.
6. *Шкаликов А. А.* Об одной системе функций // Мат. заметки. 1975. Т. 18, № 6. С. 855–860.
7. *Любарский Ю. И.* Полнота и минимальность систем функций вида $\{a(t)\varphi^n(t) - b(t)\varphi^n(t)\}$. II // Теория функций, функцион. анал. и их приложения. Харьков, 1988. № 49. С. 77–86.

8. *Любарский Ю. И., Ткаченко В. А.* Полнота и минимальность специальных систем функций на множествах в комплексной плоскости. Харьков, 1985. 29 с. (Препринт / ФТИНТ АН УССР; № 33).

9. *Барменков А. Н.* Об аппроксимативных свойствах некоторых систем функций. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1983.

10. *Моисеев Е. И.* О базисности одной системы синусов и косинусов // Докл. АН СССР. 1984. Т. 275, № 4. С. 794–798.

11. *Моисеев Е. И.* О базисности одной системы синусов // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 1. С. 177–179.

12. *Levinson N.* Gap and density theorems. New York: Publ. Amer. Math. Soc., 1940.

13. *Винер Н., Пэли Р.* Преобразование Фурье в комплексной области. М.: Наука, 1964.

14. *Седлецкий А. М.* Биортогональные разложения в ряды экспонент на интервалах вещественной оси // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, № 5. С. 51–95.

15. *Уолш Дж. Л.* Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.

16. *Казьмин Ю. А.* Замыкание линейной оболочки одной системы функций // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 4. С. 799–805.

17. *Билалов Б. Т.* Необходимое и достаточное условие полноты и минимальности системы вида $\{A\varphi^n; B\overline{\varphi}^n$ // Докл. РАН. 1992. Т. 322, № 6. С. 1019–1021.

18. *Turner R. E. L.* Eigenfunction expansions in banach spaces // Quart. J. Math. Oxford. 1968. V. 19, N 2. P. 193–211.

19. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950.

20. *Данилюк И. И.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1975.

21. *Билалов Б. Т.* Базисные свойства некоторых систем экспонент, косинусов и синусов // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 2. С. 264–273.

22. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

23. *Билалов Б. Т.* Об изоморфизме двух базисов в L^p. II // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1, № 4. С. 1091–1094.

Статья поступила 1 июля 2004 г.

Билалов Билал Тельман оглы
Институт математики и механики НАН Азербайджана
ул. Ф. Агаева, 9, квартал 553. Баку Az 1141, Азербайджан
b_bilalov@mail.ru