Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2006. Том 47, № 1

УДК 519.41/47

ГРУППЫ, В КОТОРЫХ ВСЕ НЕНОРМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ ПОРОЖДАЮТ СОБСТВЕННУЮ ПОДГРУППУ

Н. С. Черников, С. А. Довженко

Аннотация: Получено полное конструктивное описание групп, у которых все ненормальные циклические подгруппы порождают собственную подгруппу.

Ключевые слова: дедекиндова группа, нильпотентная группа, циклическая группа, группа с циклическим коммутантом, группа с центральным коммутантом, нормальная собственная подгруппа, ненормальная собственная подгруппа.

Напомним, что группа, у которой все подгруппы нормальные, называется *дедекиндовой*. Как утверждает теорема Дедекинда [1], конечная группа дедекиндова тогда и только тогда, когда она либо абелева, либо разлагается в прямое произведение подгруппы кватернионов, элементарной абелевой 2-подгруппы и абелевой подгруппы без элементов порядка 2 (равносильно — абелевой подгруппы нечетного порядка). Согласно теореме Бэра [2] теорема Дедекинда переносится на случай произвольной группы со следующим изменением в формулировке: « … и **периодической** абелевой подгруппы … ». В связи с теоремами Дедекинда и Бэра Кеппитт [3] исследовал произвольные группы, не дедекиндовы, но в которых все ненормальные подгруппы порождают собственную подгруппу, и установил многие их важные свойства. Например, ввиду [3] в такой группе коммутант всегда центральная циклическая подгруппа. (Заметим, что в группе все ненормальные подгруппы порождают собственную подгруппу тогда и только тогда, когда в ней все ненормальные циклические подгруппы порождают собственную подгруппу, см. ниже следствие 2.) Впоследствии отмеченные группы изучались А. Ф. Баранником [4], Н. Ф. Кузенным и Н. Н. Семко (см. [5, § 1.4]) и др. Однако до сих пор не было получено полного конструктивного описания таких групп G и даже не было известно ни одного их конкретного примера. Теоремы 1–3 настоящей работы в комплексе с учетом следствия 2, а также замечания 6 (см. в конце статьи) дают полное конструктивное описание групп, в которых все ненормальные циклические подгруппы порождают собственную подгруппу. Отметим, что факт наличия у авторов требуемого описания анонсирован ими в [6]. Отдельно теорема 4 дает полное описание таких примарных групп G вида $G = \langle b \rangle \leftthreetimes \langle a \rangle$, а теорема 5 — таких примарных групп бесконечной экспоненты. Отметим, что в настоящей работе весьма существенно используются результаты из [3].

Заметим, что группы, в которых все ненормальные подгруппы порождают собственную подгруппу, есть при любом простом $p \neq 2$ уже среди групп порядка p^3 (см. предложение 1). Отметим еще предложение 3 настоящей работы, в соответствии с которым произвольная неабелева p-группа A конечной экспоненты с центральным циклическим коммутантом содержится в p-группе G, обладающей отмеченным свойством, вида $G = AB$, где B — центральная локально циклическая подгруппа группы G, причем B может быть как конечной, так и бесконечной.

Обозначения. Ниже $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{P}$ — множества натуральных, целых, целых неотрицательных, простых чисел соответственно; p — всегда простое число; $|M|$ — мощность множества M; $\setminus$ — знак теоретико-множественной разности; $\operatorname{Ker}\varphi$ — ядро гомоморфизма φ; $\times$ и $\leftthreetimes$ — знаки прямого и полупрямого произведений, $\simeq$ — знак изоморфизма. Пусть G — группа и H — ее подгруппа. Отметим, что мощность группы G принято называть ее *порядком*. Напомним, что H называется *истинной*, если $H \neq G$, и *собственной*, если $1 \neq H \neq G$. Как обычно, $|G : H|$ — индекс H в G. Следуя [7], экспоненту группы G обозначим через $\operatorname{Exp}(G)$. Через $J(G)$, как, например, в [8] или [9], обозначаем пересечение всех подгрупп конечного индекса группы G. Записи $M \leq G$ и $M < G$, $M \trianglelefteq G$ и $M \triangleleft G$ означают, что M — подгруппа и истинная подгруппа группы G, нормальная и истинная нормальная ее подгруппа соответственно. Запись $G = M \leftthreetimes H$ означает, что $M \trianglelefteq G = MH$ и $M \cap H = 1$, а запись $G = M \times H$ — что $G = M \leftthreetimes H$ и $H \trianglelefteq G$. Если $\varnothing \neq M \subseteq G$, то $\langle M \rangle$ — подгруппа, порожденная M в G, и $M^G = \{u^g \mid u \in M,\ g \in G\}$. Как всегда, $C_G(M)$ — централизатор множества $M \neq \varnothing$ в G. Если G абелева, то $G^m = \{g^m \mid g \in G\}$ для любого $m \in \mathbb{Z}$. (Очевидно, $G^m \leq G$.) Для произвольных $b, a \in G$, как обычно, $b^a = a^{-1}ba$ и $[b, a]$ — коммутатор элементов b и a. Ниже $[H, K]$ — взаимный коммутант подгрупп H и K группы G, G' — коммутант и $Z(G)$ — центр группы G. Далее, как в [3], в случае, когда группа G недедекиндова, $S(G)$ — подгруппа, порожденная всеми ее ненормальными подгруппами, и в случае, когда G дедекиндова, $S(G) = 1$.

Напомним, что p'-группа — это периодическая группа без элементов порядка p.

Теорема 1. *В группе F тогда и только тогда*

$$1 \neq S(F) \neq F, \tag{1}$$

когда $F = G \times D$, при некотором p G и D соответственно p- и дедекиндова p'-подгруппы, и в G найдутся подгруппы A и B такие, что выполняются условия:

1) *подгруппа A имеет конечную экспоненту, $B \triangleleft G$, подгруппа B циклическая или квазициклическая, и*

$$G = AB, \tag{2}$$

$$A' \subseteq B \cap A \subseteq Z(G), \tag{3}$$

причем если $B \subseteq Z(G)$, то $A' \neq 1$;

2) *если $B \nsubseteq Z(G)$, то для некоторых $l, m, k \in \mathbb{N}$ и $b \in B$, $a \in A$ выполняются соотношения*

$$l < p, \quad k \geq 2m, \quad p^k > 4, \tag{4}$$

$$B = \langle b \rangle, \quad |\langle b \rangle| = p^k, \tag{5}$$

$$A = \langle a \rangle C_A(B), \quad |A : C_A(B)| = p^m, \quad b^a = b^{1+lp^{k-m}}, \tag{6}$$

причем в случае, когда $|A'| \geq p^m$,

$$p^k \geq |A'| \operatorname{Exp}(A/A'^p), \tag{7}$$

а в случае, когда $|A'| \leq p^m$, для подгруппы $T \subseteq B \cap A$ с $|T| = \min(p^{m-1}, |B \cap A|)$

$$p^k \geq p^m \operatorname{Exp}(A/T); \tag{8}$$

3) *в случае, когда* $B \subseteq Z(G)$,

$$|B| \geq |A'|\mathrm{Exp}(A/A'^p). \tag{9}$$

Далее, (1) выполняются в том и только том случае, когда

$$1 \neq S(G) \neq G; \tag{10}$$

если выполняются (1), то справедливы следующие утверждения 1–5, в которых подгруппы G, D, A и B любые такие, как выше; если выполняются (1), то подгруппы A и B всегда можно подобрать так, что

$$A \cap B = G'. \tag{11}$$

1. *Имеет место соотношение*

$$S(F) = S(G) \times D. \tag{12}$$

2. *Подгруппа* F' (*и вместе с тем подгруппа* G') *циклическая.*

3. *Либо* $G' = A' \supseteq [B, A]$, *либо* $G' = [B, A] \supset A'$.

4. *В случае, когда* $B \nsubseteq Z(G)$, *справедливы соотношения*

$$[B, A] = \langle [b, a] \rangle = \langle b^{p^{k-m}} \rangle, \tag{13}$$

$$[B, A]^p = \langle b^{p^{k-m+1}} \rangle, \quad |[B, A]| = p^m, \quad |[B, A]^p| = p^{m-1}, \tag{14}$$

$$p^k \geq p^m |B \cap A|.$$

5. *Выполняется неравенство*

$$|B| \geq |G'|\mathrm{Exp}(AG'^p/G'^p),$$

и для подгруппы $V \subset B$, *порядка, равного* $\frac{|G'|}{p}\mathrm{Exp}(AG'^p/G'^p)$, *справедливы соотношения*

$$1 \neq S(G) \subseteq AV \neq G \tag{15}$$

и

$$1 \neq S(F) \subseteq AV \times D \neq F. \tag{16}$$

(Используя теорему Бэра [2], нетрудно убедиться в том, что в теореме 1 число p и вместе с тем подгруппы G и D определяются однозначно.)

Теорема 2. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$ *и* A — p*-группа конечной экспоненты с центральным циклическим коммутантом такая, что* $\mathrm{Exp}(A/A') \geq p^m$; N — *подгруппа группы* A *такая, что* $A' \subseteq N$, $|A : N| = p^m$ *и* $A = N\langle a \rangle$ *для некоторого* $a \in A$; $\langle c \rangle$ — *любая центральная циклическая подгруппа группы* A, *содержащая* A' *и содержащаяся в* N; $T \leq \langle c \rangle$ *и* $|T| = \min(p^{m-1}, |\langle c \rangle|)$; D — *дедекиндова* p'*-группа. Пусть* k *и* l — *произвольные натуральные числа такие, что* $p^k \geq p^m|\langle c \rangle|$, *выполняются* (4) *и в случаях, когда* $|A'| \geq p^m$ *и* $|A'| \leq p^m$, — *соответственно* (7) *и* (8); $H = \langle h \rangle$ — *циклическая группа порядка* p^k; $u \in H$ *и* $|\langle u \rangle| = |\langle c \rangle|$. *Пусть на* H *определено действие группы* A *следующим образом:*

$$(h^r)^{ga^s} = h^{r(1+lp^{k-m})^s}$$

для произвольных $r, s \in \mathbb{N}$ и $g \in N$; K — группа всех пар (g, v) с $g \in A$ и $v \in H$, умножаемых по правилу

$$(g, v)(g', v') = (gg', v^{g'}v');$$

$S = \langle (c, u) \rangle \leq K$. *Тогда $S \subseteq Z(K)$ и существуют p-группа G и группа F, удовлетворяющие следующим условиям:*

1) $G \simeq K/S$ *и* $F = G \times D^*$, $D^* \simeq D$;

2) *группа A содержится в G в качестве подгруппы, и для некоторой нецентральной нормальной циклической подгруппы $B = \langle b \rangle$ порядка p^k группы G выполняются соотношения*

$$G = AB, \quad A' \subseteq B \cap A = \langle c \rangle \subseteq Z(G), \quad C_A(B) = N, \tag{17}$$

и соотношения (6);

3) *справедливо утверждение* 5 *теоремы* 1, *и вместе с тем выполняются* (10) *и* (1).

Напомним, что локально циклические p-группы — это в точности циклические и квазициклические p-группы.

Теорема 3. *Пусть A — неабелева p-группа конечной экспоненты с центральным циклическим коммутантом и $\langle c \rangle$ — любая центральная циклическая подгруппа группы A, содержащая A'; d — натуральная степень числа p или $d = \infty$, причем*

$$4, |\langle c \rangle| < d \geq |A'|\mathrm{Exp}(A/A'^p);$$

H — локально циклическая p-группа с $|H| = d$; $u \in H$ и $|\langle u \rangle| = |\langle c \rangle|$; K — внешнее прямое произведение групп A и H, и $S = \langle (c, u) \rangle (\leq K)$; D — дедекиндова p'-группа. Тогда существуют p-группа G и группа F, удовлетворяющие условиям 1, 3 *из теоремы* 2 *и следующему условию:*

2*) *группа A содержится в G в качестве подгруппы, и для некоторой центральной локально циклической подгруппы B с $|B| = d$ группы G будет $G = AB$ и $A' \subseteq B \cap A = \langle c \rangle$ $(\subseteq Z(G))$ (т. е. выполняются все, кроме последнего, соотношения из* (17)).

Ниже, как, например, в [8], под группой диэдра понимаем группу, которая порождается двумя своими различными элементами порядка 2. Если $G = \langle a, b \rangle$, $|\langle a \rangle| = |\langle b \rangle| = 2$, то, очевидно, $G = \langle ab \rangle \leftthreetimes \langle a \rangle = \langle ab \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$ и $(ab)^a = (ab)^b = (ab)^{-1}$.

Теорема 4. *Пусть $G = \langle b \rangle \leftthreetimes \langle a \rangle$ — неабелева p-группа, причем G не группа диэдра порядка 8; $|\langle b \rangle| = p^k$, $|\langle a \rangle| = p^n$ и $b^a = b^{1+lp^{k-t}}$, $l, t \in \mathbb{N}$ и $l < p$, $t < k$; $|\langle a \rangle : C_{\langle a \rangle}(\langle b \rangle)| = p^m$; $R \leq \langle b \rangle$ и $|R| = \min(p^{t+n-1}, |\langle b \rangle|)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Соотношения* (10) *выполняются в том и только том случае, когда*

$$2t, t + n \leq k. \tag{18}$$

2. *Если $2t \leq k$, то*

$$G' \subseteq Z(G), \quad |G'| = p^m \tag{19}$$

и

$$S(G) = R \leftthreetimes \langle a \rangle. \tag{20}$$

Легко видеть, что в теореме 4 $|G'| = p^t$, а потому ввиду ее утверждения 2 $t = m$ в случае, когда $2t \leq k$.

Теорема 5. *Пусть G — p-группа бесконечной экспоненты. Тогда следующие утверждения равносильны.*

1. *Выполняются* (10).

2. *Для некоторых нормальных в G неабелевой подгруппы A конечной экспоненты и квазициклической подгруппы B*

$$G = AB \quad \text{и} \quad A' \subseteq B. \tag{21}$$

3. *Группа G нильпотентна, и для некоторых ее неабелевой подгруппы A конечной экспоненты и квазициклической подгруппы B имеет место равенство $G = AB$.*

4. *Группа G неабелева, и для некоторой квазициклической подгруппы B из $Z(G)$*

$$G' \subseteq B \quad \text{и} \quad \mathrm{Exp}(G/B) < \infty. \tag{22}$$

5. *Группа G неабелева нильпотентная, и для некоторой ее квазициклической подгруппы B выполняются* (22).

Далее, если справедливо утверждение 2 или 3 настоящей теоремы и V — подгруппа группы B с $|V| = \frac{|A'|}{p}\mathrm{Exp}(A/A'^p)$, то выполняются (15).

Доказательствам теорем 1–5 ниже предпослан ряд представляющих, на наш взгляд, самостоятельный интерес предложений, не обязательно используемых в полной общности. Авторы старались сделать доказательства теорем и предложений по возможности доступными и подробными.

Лемма 1. *Пусть $G \neq 1$ — группа, $H < G$. Тогда*

$$H \subseteq (G \setminus H)(G \setminus H) \tag{23}$$

и вместе с тем

$$G = (G \setminus H)(G \setminus H) \cup (G \setminus H) = \langle G \setminus H \rangle. \tag{24}$$

Доказательство. Действительно, для любых $g \in G \setminus H$, $h \in H$ будет g^{-1}, $gh \in G \setminus H$ и $h = g^{-1}(gh) \in (G \setminus H)(G \setminus H)$, т. е. выполняется (23). Так как $G = H \cup (G \setminus H)$, то верны (24).

Следствие 1. *Неабелева группа G экспоненты p порождается своими ненормальными циклическими подгруппами.*

Доказательство. Ввиду леммы 1 $G = \langle \langle g \rangle \mid g \in G \setminus Z(G) \rangle$, а для $g \in G \setminus Z(G)$ будет $\langle g \rangle \ntrianglelefteq G$, поскольку $|\langle g \rangle| = p$.

Лемма 2. *Пусть $G \neq 1$, $H < G$ и $\langle g \rangle \trianglelefteq G$ для любого $g \in G \setminus H$, и пусть $K < G$ и $K \nsubseteq H$. Тогда $K \triangleleft G$. В частности, $S(G) \subseteq H$.*

Доказательство. Действительно, в силу леммы 1 $K = \langle \langle g \rangle \mid g \in K \setminus H \rangle$, а для каждого $g \in K \setminus H$ выполнено $\langle g \rangle \trianglelefteq G$.

Лемма 3. *Пусть G — недедекиндова группа и H — подгруппа, порожденная всеми ее ненормальными циклическими подгруппами. Тогда $H = S(G)$. В частности, $S(G) \neq G$ тогда и только тогда, когда $H \neq G$.*

Доказательство. Действительно, очевидно, $H \subseteq S(G)$. Если $H \neq G$, то для любого $g \in G \setminus H$ имеем $\langle g \rangle \trianglelefteq G$, а потому ввиду леммы 2 произвольная подгруппа $K \nsubseteq H$ группы G нормальна в G. Следовательно, $S(G) \subseteq H$.

Из леммы 3 непосредственно вытекает

Следствие 2. *Пусть G — произвольная группа, и пусть в случае, когда G недедекиндова, H — подгруппа, порожденная всеми ее ненормальными циклическими подгруппами, а в противном случае $H = 1$. В группе G соотношения* (10) *выполняются тогда и только тогда, когда $1 \neq H \neq G$.*

Лемма 4. *Пусть F — недедекиндова группа и при некотором p пусть $F = G \times D$, G — p-группа, D — дедекиндова p'-группа. Тогда G недедекиндова и $S(F) = S(G) \times D$.*

Доказательство. Пусть $K < F$ и $K \ntrianglelefteq F$. Так как, очевидно, $K = (K \cap G) \times (K \cap D)$ и $K \cap D \trianglelefteq F$, то $K \cap G \ntrianglelefteq G$. Следовательно, G недедекиндова, $K \cap G \subseteq S(G)$ и $K \subseteq S(G) \times D$. Ввиду произвольности K будет $S(F) \subseteq S(G) \times D$.

Пусть $K < G$ и $K \ntrianglelefteq G$. Тогда $KD \ntrianglelefteq F$, а значит, $KD \subseteq S(F)$. Из произвольности K вытекает, что $S(G) \times D \subseteq S(F)$.

Следующее утверждение известно.

Лемма 5. *Пусть G — группа и $a, b, g \in G$; $r \in \mathbb{Z}$ и $s = \frac{r(r-1)}{2}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если подгруппа $\langle a^G \rangle$ абелева, то $[a^r, b] = [a, b]^r$ и $[b, a^r] = [b, a]^r$.*
2. *Если $G' \subseteq Z(G)$, то*

$$[ab, g] = [a, g][b, g], \quad [a, bg] = [a, g][a, b],$$

$$(ab)^r = a^r b^r [a, b]^{-s}, \quad [a^r, b] = [a, b^r] = [a, b]^r.$$

В частности,

$$(ab)^2 = a^2 b^2 [a, b]^{-1}, \quad (ab)^4 = a^4 b^4 [a, b]^{-6}.$$

Следствие 3. *Пусть G — группа такая, что $G' \subseteq Z(G)$; $a, b \in G$, $r \in \mathbb{Z}$ и $a^* \in \langle a^r \rangle$, $b^* \in \langle b^r \rangle$. Тогда $[a^*, b], [a, b^*] \in \langle [a, b]^r \rangle \subseteq G'^r$.*

Доказательство. Действительно, $a^* = a^{lr}$ при некотором $l \in \mathbb{Z}$. Поэтому ввиду утверждения 2 леммы 5 $[a^*, b] = [a, b]^{lr} \in \langle [a, b]^r \rangle$. Аналогично $[a, b^*] \in \langle [a, b]^r \rangle$.

В силу следующего несложного предложения класс групп, в которых все ненормальные подгруппы порождают собственную подгруппу, непустой.

Предложение 1. *Для группы G порядка p^3* (10) *выполняются тогда и только тогда, когда она неабелева, $p \neq 2$ и $\mathrm{Exp}(G) = p^2$.*

Доказательство. Ясно, что $|G'| \in \{p, 1\}$ и $G' \subseteq Z(G)$.

Необходимость. Так как G, очевидно, неабелева и ввиду следствия 1 $\mathrm{Exp}(G) \neq p$, то $\mathrm{Exp}(G) = p^2$.

Пусть $p = 2$ и $|\langle b \rangle| = 4$, $a \in G \setminus \langle b \rangle$. Тогда, как нетрудно показать, $\langle b \rangle \lhd G = \langle b \rangle \langle a \rangle$, $b^a = b^{-1}$, $G' = \langle b^2 \rangle$.

Далее, $|\langle a \rangle| = 4$. Действительно, иначе $|\langle a \rangle| = 2$ и $(ba)^2 = baba = bb^a = bb^{-1} = 1$, а значит, $G = \langle b \rangle \leftthreetimes \langle a \rangle = \langle b \rangle \leftthreetimes \langle ba \rangle$ и ввиду неабелевости G имеем $\langle a \rangle, \langle ba \rangle \ntrianglelefteq G$. Вместе с тем $G = \langle a, ba \rangle = S(G)$; противоречие.

Так как $|\langle a \rangle| = |\langle b \rangle| = 4$ и $|G| = 8$, то $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle b^2 \rangle = G'$ и $\langle a \rangle \lhd G$. Пусть $g \in G \setminus (\langle b \rangle \cup \langle a \rangle)$. Тогда $g = b^* a^*$, причем $\langle b \rangle = \langle b^* \rangle$, $\langle a \rangle = \langle a^* \rangle$. По утверждению 2 леммы 5 $g^2 = b^{*2} a^{*2} [b^*, a^*]^{-1} = b^2 b^2 b^{-2} = b^2$, а значит, $\langle g \rangle \supset G'$ и $\langle g \rangle \lhd G$. Итак, все циклические подгруппы группы G нормальны в ней. Поэтому произвольная подгруппа группы G нормальна в G, тем самым $S(G) = 1$; противоречие. Таким образом, $p \neq 2$.

Достаточность. Пусть $b \in G$ и $|\langle b\rangle| = p^2$, $g \in G \setminus \langle b\rangle$. Очевидно, $G' \subset \langle b\rangle \lhd G$. Если $|\langle g\rangle| = p$, то положим $a = g$.

Пусть $|\langle g\rangle| = p^2$. Для некоторого $b^* \in \langle b\rangle$ имеем $b^{*p} = g^{-p}$. Ввиду утверждения 2 леммы 5 при $s = \frac{p(p-1)}{2}$

$$(gb^*)^p = g^p b^{*p}[g, b^*]^{-s} = g^p g^{-p}[g, b^*]^{-s} = [g, b^*]^{-s}.$$

Так как $|\langle [g, b^*]\rangle| \in \{p, 1\}$ и $p \mid s$ (поскольку $p \neq 2$), то $[g, b^*]^{-s} = 1$, а значит, $(gb^*)^p = 1$. Положим $a = gb^*$. Тогда $|\langle a\rangle| = p$, $G = \langle b\rangle \leftthreetimes \langle a\rangle$ и $|G : \langle b^p\rangle\langle a\rangle| = p$. Так как G неабелева, то $\langle a\rangle \ntrianglelefteq G$ и $S(G) \neq 1$. Пусть $h \in G \setminus \langle b^p\rangle\langle a\rangle$. Тогда для некоторых $\bar{b} \in \langle b\rangle$ и $\bar{a} \in \langle a\rangle$ будет $h = \bar{b}\bar{a}$ и $\langle \bar{b}\rangle = \langle b\rangle$. Согласно утверждению 2 леммы 5 $h^p = \bar{b}^p\bar{a}^p[\bar{b}, \bar{a}]^{-s} = \bar{b}^p$, а значит, $\langle h^p\rangle = \langle b^p\rangle = G'$ и $\langle h\rangle \lhd G$. Следовательно, ввиду леммы 2 $S(G) \subseteq \langle b^p\rangle\langle a\rangle \neq G$. Предложение доказано.

Замечание 1. Как известно, при $p \neq 2$ неабелева группа G с $|G| = p^3$ и $\mathrm{Exp}(G) = p^2$ представима в виде $G = \langle b\rangle \leftthreetimes \langle a\rangle$, где $|\langle b\rangle| = p^2$, $|\langle a\rangle| = p$ и $b^a = b^{1+p}$.

Лемма 6. *Пусть G и a, b — группа и ее p-элементы по некоторому p такие, что $G' \subseteq Z(G)$ и $|\langle [a, b]\rangle| \leq p$; r — натуральная степень числа p. Тогда*

1. *Выполняются соотношения*

$$a^p, b^p \in Z(\langle a, b\rangle). \tag{25}$$

2. *Если $r > 2$, то $(ab)^r = a^r b^r$. В частности, $(ab)^r = 1$ при $r > 2$ тогда и только тогда, когда $a^r = b^{-r}$.*

3. *Если $r = 2$, то*

$$(ab)^r = a^r b^r [a, b]^{-1} = a^r [a, b]^{-1} b^r, \tag{26}$$

и $(ab)^r = [a, b]^{-1}$, $(ab)^4 = 1$ в случае, когда $a^r = b^{-r}$. В этом случае $|\langle ab\rangle| = 4$ тогда и только тогда, когда $ab \neq ba$.

Доказательство. 1. Ввиду утверждения 2 леммы 5 $[a, b]^{|\langle a\rangle|} = [a^{|\langle a\rangle|}, b]$. Следовательно, $[a, b]^{|\langle a\rangle|} = 1$ и $[a, b]$ — p-элемент. Поэтому $|\langle [a, b]\rangle| \in \{p, 1\}$, т. е. $[a, b]^p = 1$. По утверждению 2 леммы 5 $[a^p, b] = [a, b^p] = [a, b]^p$, т. е. $[a^p, b] = [a, b^p] = 1$. Так как $[a^p, a] = [a^p, b] = [b^p, b] = ([a, b^p])^{-1} = [b^p, a] = 1$, то выполняются (25).

2. При $r > 2$, очевидно, $p | \frac{r(r-1)}{2}$, а потому $[a, b]^{-s} = 1$ при $s = \frac{r(r-1)}{2}$ и, значит, по утверждению 2 леммы 5 $(ab)^r = a^r b^r$.

3. При $r = 2$ равенства (26) справедливы ввиду утверждения 2 леммы 5 (с учетом того, что $[a, b]^{-1} \in Z(G)$). В отмеченном случае $(ab)^2 = [a, b]^{-1}$, $(ab)^4 = [a, b]^{-2} = 1$, и если $|\langle ab\rangle| = 4$, то $(ab)^2 = [a, b]^{-1} = b^{-1}a^{-1}ba \neq 1$, т. е. $ba \neq ab$. Если $ab \neq ba$, то $[a, b]^{-1} \neq 1$, а значит, $(ab)^2 \neq 1$ и $|\langle ab\rangle| = 4$.

Лемма 7. *Пусть G — группа такая, что $G' \subseteq Z(G)$; $M \neq \varnothing$ — некоторое множество ее p-элементов с ограниченными в совокупности порядками, $d = \max\limits_{g \in M}(|\langle g\rangle|)$. Пусть в случае, когда $p = 2$ и $\langle M\rangle$ неабелева, G' не содержит элементов порядка 4. Тогда*

1) $\mathrm{Exp}(\langle M\rangle) = d$ *при $d \neq 2$ или при абелевой $\langle M\rangle$;*

2) $\mathrm{Exp}(\langle M\rangle) = 4$ *при $d = 2$ и неабелевой $\langle M\rangle$.*

Доказательство, очевидно, сводится к случаю неабелевой $\langle M\rangle$. Пусть $r = d$ при $d \neq 2$ и $r = 4$ при $d = 2$; $s = \frac{r(r-1)}{2}$. Достаточно показать, что для $a, b \in G$ будет $|\langle ab\rangle| \mid r$, если $|\langle a\rangle| \mid r$ и $|\langle b\rangle| \mid r$. Отметим, что $[a, b]$ — p-элемент (см. выше). Если $p \neq 2$, то, очевидно, $|\langle a\rangle| \mid s$, а потому ввиду утверждения 2 леммы 5

$$(ab)^r = [a,b]^{-s} = [a^{-s},b] = 1.$$

Если $p = 2$, то $2 \mid s$, и поскольку $[a,b]$ — 2-элемент, то $|\langle [a,b]\rangle| \leq 2$. Следовательно,

$$(ab)^r = [a,b]^{-s} = 1.$$

Замечание 2. Если для некоторых элементов a и b группы G имеем $|\langle a\rangle| = 4$, $b^2 = a^2$ и $a^b = a^{-1}$, то $\langle a,b\rangle$ — группа кватернионов. Действительно, $\langle a\rangle \trianglelefteq \langle a,b\rangle$ и $|\langle b\rangle| = 4$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$, а потому $\langle a,b\rangle = \langle a\rangle\langle b\rangle$ и $|\langle a,b\rangle| = \frac{|\langle a\rangle||\langle b\rangle|}{|\langle a\rangle\cap\langle b\rangle|} = 8$. Далее, как группа кватернионов, так и подгруппа $\langle a,b\rangle$, очевидно, являются гомоморфными образами группы $F = \langle x,y \mid x^4 = 1, y^2 = x^2, x^y = x^{-1}\rangle$ и $|F| \mid 8$ аналогично тому, как $|\langle a,b\rangle| = 8$, а значит, они изоморфны F.

Лемма 8. *Пусть G и a,b — группа и ее p-элементы по некоторому p, такие, что $G' \subseteq Z(G)$, $|\langle [a,b]\rangle| \leq p$ и $|\langle a\rangle| \geq |\langle b\rangle|$; $r = |\langle b\rangle : \langle b\rangle \cap \langle a\rangle|$; a^* — элемент из $\langle a\rangle$ такой, что $|\langle a^*\rangle| = |\langle b\rangle|$ и $a^{*r} = b^{-r}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $\langle a^*,b\rangle$ абелева или $|\langle a\rangle| > |\langle b\rangle|$, или $r \neq 2,4$, то*

$$|\langle a^*b\rangle| = r, \tag{27}$$

$$\langle a^*b\rangle \cap \langle a\rangle = \langle a^*b\rangle \cap \langle b\rangle = 1. \tag{28}$$

В случае, когда $r \in \{2,4\}$,

$$|\langle a^*b\rangle| \in \{2,4\}. \tag{29}$$

2. *Если $r = 2$ и $|\langle a\rangle| = |\langle b\rangle|$, то либо $\langle a,b\rangle$ — группа кватернионов, либо*

$$\langle a,b\rangle = \langle a^*b\rangle \leftthreetimes \langle a\rangle = \langle a^*b\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle \tag{30}$$

и

$$(a^*b)^a = (a^*b)^b = (a^*b)^{-1}, \tag{31}$$

либо

$$|\langle [a,b]\rangle| = 2, \tag{32}$$

$$[a,b] \in \langle a\rangle, \tag{33}$$

$$|\langle a^*b\rangle| = 4 < |\langle a\rangle| \tag{34}$$

и для любого элемента h порядка 4 из $\langle a\rangle$ (или, что то же, из $\langle b\rangle$)

$$h \in Z(\langle a,b\rangle), \tag{35}$$

$$|\langle ha^*b\rangle| = 2, \tag{36}$$

$$\langle a,b\rangle = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle ha^*b\rangle = \langle b\rangle \leftthreetimes \langle ha^*b\rangle \tag{37}$$

(причем, очевидно, $\langle a\rangle = \langle ha\rangle = \langle ha^*\rangle$ и $\langle b\rangle = \langle hb\rangle$).

3. *Если*

$$|\langle a\rangle| = |\langle b\rangle| > 4 = r, \tag{38}$$

то в случае, когда $\langle a^*b\rangle \cap \langle a\rangle \neq 1$ (или, что равносильно, $\langle a^*b\rangle \cap \langle b\rangle \neq 1$), выполняются (34) и для любого элемента h порядка 4 из $\langle a\rangle \cup \langle b\rangle$ справедливы (35), (36) и следующие соотношения:

$$\langle ha^*b\rangle \cap \langle a\rangle = \langle ha^*b\rangle \cap \langle b\rangle = 1 \tag{39}$$

(причем если $h \in \langle a \rangle$, то $\langle a \rangle = \langle ha \rangle = \langle ha^* \rangle$, и если $h \in \langle b \rangle$, то $\langle b \rangle = \langle hb \rangle$).

4. *Если*
$$|\langle a \rangle| = |\langle b \rangle| = 4 = r,$$
то
$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = 1 \tag{40}$$
и либо
$$\langle a^* b \rangle \cap \langle a \rangle = \langle a^* b \rangle \cap \langle b \rangle = 1, \tag{41}$$
либо
$$(a^* b)^2 = a^2, \quad \langle a, b \rangle = \langle b \rangle \leftthreetimes \langle a \rangle, \quad b^a = b^{-1}, \tag{42}$$
либо
$$(a^* b)^2 = b^2, \quad \langle a, b \rangle = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle, \quad a^b = a^{-1}. \tag{43}$$

5. *Если $\langle a, b \rangle$ не является группой кватернионов и не выполняется* (40)*, то в $\langle a \rangle$ найдется элемент $\bar{a}$ такой, что*
$$|\langle \bar{a} \rangle| = |\langle b \rangle|, \quad \langle \bar{a} b \rangle \cap \langle a \rangle = \langle \bar{a} b \rangle \cap \langle b \rangle = 1, \tag{44}$$
причем $|\langle \bar{a} b \rangle| = r$ в случае, когда $r \neq 2, 4$, и $|\langle \bar{a} b \rangle| \in \{2, 4\}$ в случае, когда $r \in \{2, 4\}$.

Доказательство. Сделаем сначала несколько замечаний.

Так как $[a, b] \in Z(\langle a, b \rangle)$ и, очевидно, $\langle a, b \rangle / \langle [a, b] \rangle$ абелева, то $\langle a, b \rangle' \subseteq \langle [a, b] \rangle$. Следовательно, $\langle a, b \rangle' = \langle [a, b] \rangle \subseteq Z(\langle a, b \rangle)$. Поэтому соотношения $[a, b] \in H \leq \langle a, b \rangle$ всегда влекут соотношение $H \trianglelefteq \langle a, b \rangle$.

Аналогично $\langle a^*, b \rangle' = \langle [a^*, b] \rangle \subseteq Z(\langle a^*, b \rangle)$.

В случае, когда $|\langle a \rangle| = |\langle b \rangle|$, очевидно, $\langle a^* \rangle = \langle a \rangle$ и вместе с тем для некоторого $l \in \mathbb{Z}$ имеем $p \nmid l$ и $a^* = a^l$. Тогда
$$\langle a, b \rangle = \langle a^*, b \rangle, \quad \langle a, b \rangle' = \langle [a, b] \rangle = \langle [a^*, b] \rangle$$
и в силу утверждения 2 леммы 5 $[a^*, b] = [a, b]^l$. В этом же случае ввиду утверждений 2 и 3 леммы 6 при $r \neq 2$
$$(a^* b)^r = 1, \tag{45}$$
а при $r = 2$
$$(a^* b)^4 = 1, \tag{46}$$
причем $|\langle a^* b \rangle| = 4$ тогда и только тогда, когда $[a^*, b] \neq 1$ или, что равносильно, $[a, b] \neq 1$. В частности, если $r \in \{2, 4\}$, то выполняется (29).

Понятно, что настоящая лемма справедлива при $r = 1$. (В случае утверждения 5 при $r = 1$ можно положить $\bar{a} = a^*$.) Далее $r \neq 1$. Тогда, как легко видеть, $a^* b \notin \langle a \rangle \cup \langle b \rangle$.

1. Пусть $\langle a^*, b \rangle$ абелева. Тогда
$$(a^* b)^r = a^{*r} b^r = b^{-r} b^r = 1,$$
т. е. выполняется (45), и
$$(a^* b)^{\frac{r}{p}} = a^{*\frac{r}{p}} b^{\frac{r}{p}}. \tag{47}$$

Так как, очевидно, $a^{*\frac{r}{p}} \notin \langle b \rangle$ и $b^{\frac{r}{p}} \notin \langle a \rangle$, то с учетом (47) $(a^* b)^{\frac{r}{p}} \notin \langle a \rangle \cup \langle b \rangle$ и, в частности, $(a^* b)^{\frac{r}{p}} \neq 1$. В силу этого и (45) выполняются (27) и (28).

Пусть $|\langle a\rangle| > |\langle b\rangle|$. Тогда $a^* \in \langle a^p\rangle$. Ввиду утверждения 1 леммы 6 $a^* \in Z(\langle a,b\rangle)$. Следовательно, $\langle a^*, b\rangle$ абелева.

Пусть $r \neq 2, 4$. Можно считать, что $|\langle a\rangle| = |\langle b\rangle|$. Тогда справедливо (45) (см. замечания выше). Так как при $s = \frac{\frac{r}{p}(\frac{r}{p}-1)}{2}$

$$(a^*b)^{\frac{r}{p}} = a^{*\frac{r}{p}} b^{\frac{r}{p}} [a^*, b]^{-s}$$

(см. утверждение 2 леммы 5), $[a^*, b] = [a, b]^l$ (см. замечания выше), $|\langle [a, b]\rangle| \in \{p, 1\}$ (см. доказательство утверждения 1 леммы 6) и, очевидно, $p \mid s$, то выполняется (47). Поскольку справедливы (45) и (47), то выполняются (27) и (28) (см. выше).

2, 3. Пусть $r = 2$, $|\langle a\rangle| = |\langle b\rangle|$. Тогда

$$|\langle [a, b]\rangle| \leq 2, \tag{48}$$

$$\langle a\rangle = \langle a^*\rangle, \quad \langle a, b\rangle = \langle a^*, b\rangle \tag{49}$$

и

$$\langle [a, b]\rangle = \langle [a^*, b]\rangle \tag{50}$$

(см. замечания выше). Так как $a^{*2}b^2 = 1$, ввиду утверждения 2 леммы 5

$$(a^*b)^2 = [a^*, b]^{-1}. \tag{51}$$

Следовательно, с учетом (50) и (51) $\langle [a, b]\rangle \subseteq \langle a^*b\rangle$, а значит,

$$\langle a^*b\rangle \lhd \langle a, b\rangle \tag{52}$$

(см. замечания выше). Согласно (52) и (49), очевидно,

$$\langle a, b\rangle = \langle a^*b\rangle\langle b\rangle = \langle a^*b\rangle\langle a\rangle. \tag{53}$$

Пусть $\langle a^*b\rangle \cap \langle a\rangle = 1$. Тогда в силу (52), (53) и того, что $|\langle b\rangle| = |\langle a\rangle|$, выполняются (30). Так как (46) и (30) верны и в случае, когда $|\langle a^*b\rangle| = 4$, $\langle a, b\rangle$ неабелева (см. замечания выше), то выполняются (31).

Далее пусть или $r = 2$ и $|\langle a\rangle| = |\langle b\rangle|$ или выполняются (38).

Предположим, что

$$\langle a^*b\rangle \cap \langle a\rangle \neq 1. \tag{54}$$

Поскольку $r \neq 1$, то $b \notin \langle a\rangle$, а значит, и $a^*b \notin \langle a\rangle$. Поэтому с учетом (45), (46) и (54)

$$\langle a^*b\rangle \cap \langle a\rangle = \langle (a^*b)^2\rangle \tag{55}$$

и

$$|\langle a^*b\rangle| = 4 \tag{56}$$

и с учетом также (50) и (51) при $r = 2$

$$\langle (a^*b)^2\rangle = \langle [a, b]\rangle. \tag{57}$$

Ввиду (55)–(57) при $r = 2$, очевидно, выполняются (32) и (33), а значит,

$$\langle a\rangle \trianglelefteq \langle a, b\rangle. \tag{58}$$

Так как $\langle a, b\rangle$ при $r = 2$ — неабелева 2-группа, причем $\langle a, b\rangle = \langle a^*b\rangle\langle a\rangle$ (см. (53)) и выполняются (56), (55) и (58), то с учетом замечания 2 либо $4 < |\langle a\rangle|$ и справедливы (34), либо $\langle a, b\rangle$ — группа кватернионов.

Пусть $\langle a,b\rangle$ не группа кватернионов. Поскольку

$$|\langle h\rangle| = 4 < |\langle a\rangle| = |\langle a^*\rangle| = |\langle b\rangle|,\ (a^*b)^2 \in \langle a\rangle,\ h \in \langle a\rangle \cup \langle b\rangle,\ |\langle (a^*b)^2\rangle| = |\langle h^2\rangle| = 2, \tag{59}$$

то $h \in \langle a^2\rangle \cup \langle b^2\rangle$, очевидно, $(a^*b)^2 = h^2 \in \langle a\rangle \cap \langle b\rangle \neq 1$ и в случаях, когда $h \in \langle a\rangle$ и $h \in \langle b\rangle$, соответственно $\langle a\rangle = \langle ha\rangle$, $\langle ha^*\rangle$ и $\langle b\rangle = \langle hb\rangle$. Следовательно, выполняется (35) (см. утверждение 1 леммы 6) и

$$(ha^*b)^2 = h^2(a^*b)^2 = h^2h^2 = 1. \tag{60}$$

Пусть $h \in \langle a\rangle$. Так как $b \notin \langle a\rangle$, то $ha^*b \notin \langle a\rangle$, а значит, ввиду (60) выполняется (36) и $\langle ha^*b\rangle \cap \langle a\rangle = 1$. Поскольку $\langle a\rangle = \langle ha^*\rangle$ и $a \notin \langle b\rangle$, то $ha^*b \notin \langle b\rangle$ и, следовательно, в силу (36) $\langle ha^*b\rangle \cap \langle b\rangle = 1$. Таким образом, выполняются (39).

Пусть $h \in \langle b\rangle$. Так как $a \notin \langle b\rangle$ и $\langle a\rangle = \langle a^*\rangle$, то, очевидно, $ha^*b \notin \langle b\rangle$, а значит, ввиду (60) выполняется (36) и $\langle ha^*b\rangle \cap \langle b\rangle = 1$. Поскольку $h \in Z(\langle a,b\rangle)$ (см. (35)), то $ha^*b = a^*hb$. Далее, $a^*hb \notin \langle a\rangle$. Действительно, иначе $hb \in \langle a\rangle$, поэтому $\langle b\rangle = \langle hb\rangle \subseteq \langle a\rangle$, что невозможно. Следовательно, ввиду (36) $\langle ha^*b\rangle \cap \langle a\rangle = 1$. Таким образом, выполняются (39).

Поскольку $\langle a\rangle \trianglelefteq \langle a,b\rangle$ при $r=2$ (см. (58)), то $\langle a,b\rangle = \langle a\rangle\langle b\rangle$ и $|\langle a,b\rangle : \langle a\rangle| = 2$. Так как $|\langle b\rangle| = |\langle a\rangle|$, то $|\langle a,b\rangle : \langle b\rangle| = 2$, а значит, $\langle b\rangle \lhd \langle a,b\rangle$. Тогда с учетом (36) и (39) верны (37).

4. Очевидно, $\langle a^*\rangle = \langle a\rangle$. Так как $|\langle b\rangle| = |\langle b\rangle : \langle b\rangle \cap \langle a\rangle|$, то выполняется (40).

Пусть (41) не выполняются и, например, $\langle a^*b\rangle \cap \langle b\rangle \neq 1$. Поскольку $|\langle a^*b\rangle| \in \{2,4\}$ (см. утверждение 1) и $a^*b \notin \langle b\rangle$, то, очевидно, $|\langle a^*b\rangle| = 4$, $(a^*b)^2 = b^2$, а значит, $a^{*2}b^2[a^*,b]^{-1} = b^2$ (см. утверждение 2 леммы 5) и $a^{*2} = [a^*,b] \neq 1$. Тогда $\langle [a^*,b]\rangle \subseteq \langle a^*\rangle = \langle a\rangle$, тем самым $\langle a\rangle \lhd \langle a^*,b\rangle = \langle a,b\rangle$. Следовательно, $\langle a,b\rangle = \langle a\rangle \rightthreetimes \langle b\rangle$. Поскольку $\langle a,b\rangle$ неабелева и $|\langle a\rangle| = 4$, то $a^b = a^{-1}$.

5. Действительно, если $\langle a,b\rangle$ не группа кватернионов и $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle \neq 1$, то, как нетрудно видеть, выполняются условия одного из утверждений 1–3. Ввиду утверждений 1 и 2, 3 при их условиях можно соответственно положить $\bar{a} = a^*$; либо $a = a^*$, либо $\bar{a} = ha^*$ для $h \in \langle a\rangle \cup \langle b\rangle$ с $|\langle h\rangle| = 4$.

Следствие 4. *Пусть G — группа такая, что $G' \subseteq Z(G)$, для некоторого p пусть A и b — ее квазициклическая p-подгруппа и p-элемент; $r = |\langle b\rangle : \langle b\rangle \cap A|$; a^* — элемент из A такой, что $|\langle a^*\rangle| = |\langle b\rangle|$ и $a^{*r} = b^{-r}$. Тогда выполняются (27) и (28) с заменой в (28) $\langle a\rangle$ на A.*

Доказательство. Пусть $g \in A$ и $g^{|\langle b\rangle|} = a^*$. Тогда в силу утверждения 2 леммы 5

$$[a^*,b] = [g^{|\langle b\rangle|}, b] = [g, b^{|\langle b\rangle|}] = 1.$$

Поэтому ввиду утверждения 1 леммы 8 выполняется (27) и при любом $a \in A$, таком, что $a^* \in \langle a\rangle$, — (28). Следствие доказано.

Лемма 9. *Пусть $G = HB$ — p-группа, $H, B \leq G$, причем подгруппа B циклическая или квазициклическая, и выполняются соотношения*

$$G' \subseteq B, \tag{61}$$

$$|G'| \leq p, \tag{62}$$

$$|B : G'| \geq \mathrm{Exp}(H) < \infty. \tag{63}$$

Тогда в G найдется подгруппа A такая, что

$$G = AB, \quad A \cap B = G', \tag{64}$$

$$|B : G'| \geq \mathrm{Exp}(A) < \infty. \tag{65}$$

Доказательство. Если $H = 1$, то нужно положить $A = G'$. Пусть $H \neq 1$, т. е. $\mathrm{Exp}(H) \geq p$. Очевидно, ввиду (61), (62) $B \trianglelefteq G$,

$$G' \subseteq Z(G) \tag{66}$$

и $\mathrm{Exp}(HG') = \mathrm{Exp}(H)$. Не теряя общности рассуждений, можно считать, что $G' \subseteq H$.

Если G неабелева, то с учетом (62), (63)

$$|B| = |G'||B : G'| \geq p\mathrm{Exp}(H) > \mathrm{Exp}(H) \geq p, \tag{67}$$

т. е. $|B| \geq p^2$.

Пусть G — неабелева 2-группа и $|B| = 4$. Тогда, очевидно, $|G'| = 2$ и ввиду (63), (67) $\mathrm{Exp}(H) = 2$. Поэтому $H \cap B = G'$ и можно положить $A = H$. Далее считаем, что $|B| > 4$ в случае, когда G — неабелева 2-группа. Тогда $\langle x\rangle B$ не изоморфна группе кватернионов при любом $x \in G$.

Пусть B квазициклическая. Тогда B/G' квазициклическая. Ввиду, например, теоремы 2 из § 3, гл. 3 в [10] для некоторой подгруппы A/G' (абелевой) группы G/G' имеем $G/G' = (A/G')\times(B/G')$. Очевидно, выполняются (64). Так как $\mathrm{Exp}(H) < \infty$ и

$$G/B = HB/B \simeq H/H \cap B, \quad G/B \simeq (G/G')/(B/G') \simeq A/G',$$

то $\mathrm{Exp}(A) < \infty$. Следовательно, выполняются (65).

Пусть B циклическая. Поскольку $G/G' = (H/G')(B/G')$, G/G' абелева и ввиду (63) $|B/G'| \geq \mathrm{Exp}(H/G')$, то, очевидно, для любой циклической подгруппы T группы G/G' будет $|T| \leq |B/G'|$. Поэтому, как легко видеть, B/G' сервантна в G/G' (определение см., например, в [10]), а значит, ввиду теоремы Прюфера — Куликова (см., например, [10]) $G/G' = (K/G') \times (B/G')$ для некоторой подгруппы K/G'. Тогда

$$K/G' \simeq (G/G')/(B/G') \simeq (H/G')(B/G')/(B/G') \simeq HB/B \simeq H/H \cap B$$

и тем самым $\mathrm{Exp}(K/G') = \mathrm{Exp}(H/H \cap B) \leq \mathrm{Exp}(H)$. В случае, когда $G' = 1$, можно положить $A = K$.

Пусть $G' \neq 1$. По первой теореме Прюфера (см., например, [10]) K/G' — прямое произведение некоторого множества $\mathscr{K}$ циклических подгрупп $\langle g\rangle G'/G'$. Если $\langle g\rangle \cap B = 1$, то положим $u = g$. Пусть $\langle g\rangle \cap B \neq 1$ (или, что равносильно, $\langle g\rangle \cap B = G'$). Так как $|\langle g\rangle/G'| \leq |B/G'|$, то $|\langle g\rangle| \leq |B|$. Пусть $b \in B$ и $|\langle b\rangle| = |\langle g\rangle|$. Если $|\langle b\rangle| < |B|$, то вследствие утверждения 1 леммы 6 подгруппа $\langle g\rangle\langle b\rangle$ абелева, а если $|\langle b\rangle| = |B|$, то $|\langle b\rangle| > 4$. Следовательно, $\langle g\rangle\langle b\rangle$ не группа кватернионов. Поэтому ввиду утверждения 5 леммы 8 для некоторого $\bar{a} \in \langle g\rangle$ выполняются (44) с заменой $\langle a\rangle$ на $\langle g\rangle$. Очевидно, $\langle \bar{a}\rangle = \langle g\rangle$. Положим $u = \bar{a}b$. Тогда $\langle u\rangle B = \langle g\rangle B$, $\langle u\rangle \cap B = \langle u\rangle \cap G' = 1$ и

$$|\langle g\rangle G'/G'| = |\langle u\rangle G'/G'| = |\langle u\rangle| \leq |B/G'| = \frac{|B|}{p}.$$

Пусть

$$\langle g_1\rangle G'/G', \ldots, \langle g_n\rangle G'/G' \tag{68}$$

— произвольное конечное подмножество из $\mathscr{K}$. Тогда

$$(\langle g_1\rangle G'/G') \ldots (\langle g_n\rangle G'/G') \cap B/G' = 1 \tag{69}$$

и, очевидно,

$$|(\langle u_1\rangle G'/G')\dots(\langle u_n\rangle G'/G')| \le |\langle u_1\rangle G'/G'|\dots|\langle u_n\rangle G'/G'| \\ = |\langle g_1\rangle G'/G'|\dots|\langle g_n\rangle G'/G'| = |(\langle g_1\rangle G'/G')\dots(\langle g_n\rangle G'/G')|, \quad (70)$$

$$((\langle u_1\rangle G'/G')\dots(\langle u_n\rangle G'/G'))(B/G') = ((\langle g_1\rangle G'/G')\dots(\langle g_n\rangle G'/G'))(B/G'). \quad (71)$$

Вследствие (69), (71) и (70)

$$(\langle u_1\rangle G'/G')\dots(\langle u_n\rangle G'/G') \cap B/G' = 1. \quad (72)$$

Ввиду (72), (71) и произвольности (68) для подгруппы A/G', порожденной подгруппами $\langle u\rangle G'/G'$, взятыми по всем $\langle g\rangle G'/G' \in \mathscr{K}$, имеем $G/G' = A/G' \times B/G'$ и вместе с тем выполняются (64). Так как $|\langle u\rangle| \le \frac{|B|}{p}$ для любого u и в случае, когда $p = 2$, будет $|B| \ge 8$, то ввиду леммы 7

$$\operatorname{Exp}(A) \le \frac{|B|}{p} = |B : G'|,$$

т. е. выполняются (65). Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть G — периодическая нильпотентная группа и B — ее полная абелева подгруппа. Тогда $B \subseteq Z(G)$.*

Доказательство индукцией по ступени нильпотентности группы G сводится к случаю, когда $BZ(G)/Z(G) \subseteq Z(G/Z(G))$. В этом случае $BZ(G)$ — абелева нормальная подгруппа группы G. Пусть A — подгруппа, порожденная всеми полными подгруппами группы $BZ(G)$. Тогда $B \subseteq A \trianglelefteq G$ и, очевидно, A полная. Вследствие леммы 3.13 из [11] $A \subseteq Z(G)$.

Лемма 11. *Пусть $G = AB$ — неабелева p-группа такая, что $G' \subseteq Z(G)$, A — подгруппа конечной экспоненты, B — циклическая или квазициклическая подгруппа, содержащая G', причем $\operatorname{Exp}(G) \ge 8$ в случае, когда $|G'| = \operatorname{Exp}(A) = 2$. Пусть $|B| \ge cd$ при $c = \operatorname{Exp}(AG'^p/G'^p)$ и $d = |G'|$. Тогда выполняются соотношения*

$$1 \ne S(G) \subseteq AV \ne G, \quad (73)$$

где V — подгруппа порядка $\frac{cd}{p}$ группы B.

Замечание 3. Так как в лемме 11 $\operatorname{Exp}(A) < \infty$, $G' \subseteq B$ и B локально циклическая, то, очевидно, коммутант A' — конечная циклическая подгруппа и в случае, когда подгруппа B циклическая, коммутант G' — конечная циклическая подгруппа. Далее, если B квазициклическая, то ввиду леммы 10 $B \subseteq Z(G)$, а потому $G' = A'$. Таким образом, в лемме 11 G' всегда конечная циклическая подгруппа.

Доказательство леммы 11. Так как $G' \ne 1$ и G' циклический, то G/G'^p неабелева. Тогда поскольку $G/G'^p = (AG'^p/G'^p)(B/G'^p)$ и B/G'^p абелева, то

$$c \ge p. \quad (74)$$

Следовательно, $|V| \ge d = |G'|$, а значит, с учетом примарности и локальной цикличности подгруппы B

$$G' \subseteq V. \quad (75)$$

Заметим, что в случае, когда $d = p$, будет $c = \operatorname{Exp}(A)$.

Ясно, что

$$|G'^p| = \frac{d}{p}. \tag{76}$$

Положим $l = \mathrm{Exp}((AG'^p/G'^p)(V/G'^p))$. С учетом (75), (76), как нетрудно видеть,

$$|V/G'^p| = c \tag{77}$$

и

$$\mathrm{Exp}(AV) \le l|G'^p| = \frac{ld}{p}. \tag{78}$$

Так как, очевидно, $(G/G'^p)' = G'/G'^p$, то $|(G/G'^p)'| = p$, а значит, $(G/G'^p)' \subseteq Z(G/G'^p)$.

Пусть $c \neq 2$. Поскольку $c = |V/G'^p|$ (см. (77)) и $c = \mathrm{Exp}(AG'^p/G'^p)$, то ввиду леммы 7

$$l = \mathrm{Exp}((AG'^p/G'^p)(V/G'^p)) = c. \tag{79}$$

Так как $|B| \ge cd$ (см. условия настоящей леммы), с учетом (78) и (79)

$$\mathrm{Exp}(AV) \le \frac{cd}{p} < |B|. \tag{80}$$

Пусть $c = 2$. Тогда $|V/G'^p| = 2$ (см. (77)). Следовательно, $V/G'^p \subseteq Z(G/G'^p)$. Тогда, очевидно, $l = c$ и, значит, с учетом (78) выполняются (80).

Ввиду (80) $B \not\subseteq AV$ и вместе с тем $AV \neq G$.

Пусть $S(G) = 1$. Тогда G — неабелева дедекиндова p-группа и по теореме Бэра, отмеченной выше, $|G'| = 2$, $\mathrm{Exp}(G) = 4$ и вместе с тем $|B| < 8$ и $c = \mathrm{Exp}(A)$. Так как $|G'| = 2$, $\mathrm{Exp}(G) < 8$ и $\mathrm{Exp}(A) \neq 1$, то в силу условия настоящей леммы $\mathrm{Exp}(A) > 2$. Но тогда снова по условию настоящей леммы $|B| \ge cd \ge 8$; противоречие. Итак, $S(G) \neq 1$.

Заметим, что $|B| \ge 8$. Действительно, с учетом (74) ввиду условий настоящей леммы $p \le c$, $p \le |G'|$ и $|B| \ge c|G'| \ge p^2$. Поэтому если $|B| < 8$, то $|B| = 4$, а значит, $c = |G'| = 2 = \mathrm{Exp}(A)$. Из условий настоящей леммы следует, что $\mathrm{Exp}(G) \ge 8$. Но по лемме 7 $\mathrm{Exp}(G) = \max(\mathrm{Exp}(A), |B|) = 4$; противоречие.

Пусть $g \in G \setminus AV$. Тогда $g = ab$ для некоторых $a \in A$ и $b \in B \setminus V$. Так как B — циклическая или квазициклическая p-группа и $|V| = \frac{cd}{p}$, то $|\langle b\rangle| \ge cd$, а значит, $|\langle b^c\rangle| \ge d = |G'|$, и (с учетом того, что $G' \subseteq B$)

$$\langle b\rangle \supset \langle b^c\rangle \supseteq G'. \tag{81}$$

Ввиду утверждения 2 леммы 5 при $s = \frac{c(c-1)}{2}$

$$g^c = a^c b^c [a,b]^{-s}.$$

Ясно, что

$$a^c \in G'^p. \tag{82}$$

Если $[a,b]^{-s} \in G'^p$, то, поскольку $\langle b^c\rangle$ — p-группа и $\langle b^c\rangle \supseteq G'$ (см. (81)), с учетом (82) выполняются следующие соотношения:

$$\langle g\rangle \supset \langle g^c\rangle = \langle a^c b^c [a,b]^{-s}\rangle = \langle b^c\rangle \supseteq G'. \tag{83}$$

Так как $\langle g\rangle \supseteq G'$, то $\langle g\rangle \lhd G$.

Пусть $[a,b]^{-s} \notin G'^p$. Тогда $p \nmid s$. Поэтому, очевидно, $c = 2 = p$. В таком случае $a^2 \in G'^2 \subseteq B$, а значит, $[a^2, b] = 1$ и с учетом утверждения 2 леммы 5 $[a,b]^2 = 1$. Тем самым $|\langle [a,b]\rangle| = 2$.

Если $|\langle b\rangle| > 4$, то $|\langle b^c\rangle| > 4$, а потому $\langle [a,b]^{-s}\rangle \subset \langle b^c\rangle$ и снова выполняются (83).

Пусть $|\langle b\rangle| = 4$. Так как $\langle b\rangle \supset G'$ (см. (81)), то $G' = \langle b^2\rangle$. Следовательно,

$$d = 2. \tag{84}$$

Поскольку $|B| \geq 8$, то $|\langle b\rangle| < |B|$. Поэтому с учетом (84) вследствие утверждения 1 леммы 6 и леммы 10 $b \in Z(G)$. Тогда $[a,b]^{-s} = 1 \in G'^p$; противоречие.

Итак, $\langle g\rangle \lhd G$. Ввиду произвольности элемента g по лемме 2 $S(G) \subseteq AV$. Лемма доказана.

Лемма 12. *Пусть $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$ — группа, $a^* \in \langle a\rangle$. Тогда $\langle a^*b\rangle \trianglelefteq G$ в том и только в том случае, когда $G' \subseteq \langle a^*b\rangle$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\langle a^*b\rangle \trianglelefteq G$. Тогда, очевидно, $G = \langle a\rangle\langle a^*b\rangle$. Следовательно, $G/\langle a^*b\rangle \simeq \langle a\rangle/\langle a\rangle \cap \langle a^*b\rangle$, а значит, $G/\langle a^*b\rangle$ абелева, т. е. $\langle a^*b\rangle \supseteq G'$.

Достаточность очевидна.

Лемма 13. *Пусть $G = AB$ — нильпотентная группа, $A \leq G$, $\mathrm{Exp}(A) < \infty$, $B \leq G$ и B периодическая полная абелева. Тогда $B \subseteq Z(G)$, $A \trianglelefteq G$, $A' = G' \subseteq B$ и $\mathrm{Exp}(G/B) = \mathrm{Exp}(A/A \cap B) \leq \mathrm{Exp}(A) < \infty$.*

Доказательство индукцией по ступени нильпотентности группы G легко сводится к случаю, когда $BZ(G)/Z(G) \subseteq Z(G/Z(G))$ и вместе с тем $BZ(G) \trianglelefteq G$. Ввиду леммы С. Н. Черникова (см., например, [9, лемма 1.8]) $BZ(G) = B(BZ(G) \cap A)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathrm{Exp}(BZ(G)/B) &= \mathrm{Exp}(B(BZ(G) \cap A)/B)\\ &= \mathrm{Exp}((BZ(G) \cap A)/(B \cap A)) \leq \mathrm{Exp}(A) < \infty.\end{aligned}$$

Поэтому по первой теореме Прюфера (см., например, [10]) абелева группа $BZ(G)/B$ разложима в прямое произведение конечных циклических подгрупп. Тогда, очевидно, $J(BZ(G)/B) = 1$, а значит, с учетом полноты B будет $J(BZ(G)) = B$. Следовательно, ввиду $BZ(G) \trianglelefteq G$ имеем $B \trianglelefteq G$. Поскольку $G = AB$ и A, B периодические, G периодическая. Так как G — периодическая нильпотентная группа и B — ее полная абелева подгруппа, то по лемме 10 $B \subseteq Z(G)$. Тогда, очевидно, $A \trianglelefteq G$ и $A = G' \subseteq B$. Поскольку $G/B = AB/B \simeq A/A \cap B$, справедливо последнее заключение настоящей леммы.

Предложение 2. *Пусть $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$ — p-группа, причем $a \neq 1$, $\langle b\rangle \trianglelefteq G$; $|\langle b\rangle| = p^k$, $|\langle a\rangle : C_{\langle a\rangle}(\langle b\rangle)| = p^m$, $|\langle a\rangle : \langle a\rangle \cap G'^p| = p^n$; $R = \{g \in \langle b\rangle \mid |\langle g\rangle| < p^{m+n}\}$; $a^* \in \langle a\rangle$ и $b^* \in \langle b\rangle$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Найдутся $l \in \mathbb{N}$ и $t \in \mathbb{Z}^+$ такие, что $l < p$, $t < \max(k,1)$ и $b^a = b^{1+lp^{k-t}}$. Число t и при $t \neq 0$ число l единственны.*

Выполняются соотношения

$$G' = \langle [b,a]\rangle = \langle b^{p^{k-t}}\rangle, \tag{85}$$

$$|G'| = p^t \geq p^m. \tag{86}$$

Включение $G' \subseteq Z(G)$ имеет место в том и только в том случае, когда $k \geq 2t$. Если $G' \subseteq Z(G)$, то $|G'| = p^m$.

2. *В случае, когда* $G' \subseteq Z(G)$ *и* $|\langle b^* \rangle| \geq p^{m+n}$ *и при этом* G *не является группой диэдра порядка* 8, *будет* $\langle a^*b^* \rangle \trianglelefteq G$.

3. *Если выполняются следующие соотношения:*

$$\langle a \rangle \cap \langle b \rangle \subset G', \tag{87}$$

$$|\langle b^* \rangle| < p^{t+n}, \tag{88}$$

то $\langle ab^* \rangle \ntrianglelefteq G$.

4. *В случае, когда* $G' \subseteq Z(G)$, *выполняется* (87) *и при этом* G *не является группой диэдра порядка* 8, *выполнено равенство* $S(G) = R\langle a \rangle$. *Если* G — *группа диэдра порядка 8, то* $S(G) = G$.

5. $S(G) = 1$ *тогда и только тогда, когда* G *либо абелева, либо группа кватернионов.*

6. *Если выполняется* (87), *то* (10) *справедливы тогда и только тогда, когда* $k \geq 2t$, $|\langle b \rangle| \geq p^{m+n}$ *и* G *не является группой диэдра порядка* 8.

Замечание 4. Заметим в связи с утверждением 3, что если (87) не выполняется, то, например, при $b^* = 1$ будет $\langle ab^* \rangle \trianglelefteq G$.

Замечание 5. В связи с утверждением 4 отметим, что если $G' \nsubseteq Z(G)$, то в соответствии с леммой 1 из [3] $S(G) = G$, и если $G' = 1$ (а значит, автоматически не выполняется (87)), то $S(G) = 1$.

Доказательство предложения 2. 1. Существование и единственность чисел l и t очевидны. Так как $\langle b \rangle \trianglelefteq G = \langle a \rangle \langle b \rangle$, то $\langle [b,a] \rangle \trianglelefteq G$ и $G/\langle [b,a] \rangle$ абелева, а значит, $G' \subseteq \langle [b,a] \rangle$. Следовательно, $G' = \langle [b,a] \rangle$. Так как $[b,a] = b^{lp^{k-t}}$ и $l \in \mathbb{N}$, $l < p$, то $\langle [b,a] \rangle = \langle b^{p^{k-t}} \rangle$. Отсюда $|G'| = |\langle b^{p^{k-t}} \rangle| = p^t$.

Пусть $m \neq 0$. Для любых $\bar{a}, \tilde{a} \in \langle a \rangle$ таких, что $\bar{a}C_{\langle a \rangle}(\langle b \rangle) \neq \tilde{a}C_{\langle a \rangle}(\langle b \rangle)$, будет $[b,\bar{a}] \neq [b,\tilde{a}]$, а значит, $|G'| \geq |\langle a \rangle : C_{\langle a \rangle}(\langle b \rangle)| = p^m$.

С учетом (85) $G' \subseteq Z(G)$ тогда и только тогда, когда $[b^{p^{k-t}}, a] = 1$. Так как $\langle b \rangle \trianglelefteq G$, то вследствие утверждения 1 леммы 5 $[b^{p^{k-t}}, a] = [b,a]^{p^{k-t}}$, а значит, $[b^{p^{k-t}}, a] = b^{lp^{2k-2t}}$. Следовательно, $G' \subseteq Z(G)$ тогда и только тогда, когда $2k - 2t \geq k$, т. е. $k \geq 2t$.

Далее, $[b, a^{p^m}] = 1$. Пусть $G' \subseteq Z(G)$. Тогда ввиду утверждения 2 леммы 5 $[b, a^{p^m}] = [b,a]^{p^m}$. Так как $[b,a]^{p^m} = 1$, то с учетом (85) и (86) $|G'| = p^m$.

2. Пусть имеет место отмеченный случай. Ввиду утверждения 2 леммы 5 при $s = \frac{p^n(p^n-1)}{2}$

$$(a^*b^*)^{p^n} = a^{*p^n} b^{*p^n} [a^*, b^*]^{-s}. \tag{89}$$

Очевидно, что $a^{*p^n} \in G'^p$ и $|\langle b^{*p^n} \rangle| \geq p^m$, а значит, $|\langle b^{*p^n} \rangle| \geq |G'|$ (см. утверждение 1). Следовательно, с учетом того, что $\langle b^* \rangle$, $G' \subseteq \langle b \rangle$ и $\langle b \rangle$ — p-группа, будет $\langle b^{*p^n} \rangle \supseteq G'$. Поэтому в случае, когда $[a^*, b^*]^{-s} \in G'^p$, учитывая (89), имеем $\langle (a^*b^*)^{p^n} \rangle \supseteq G'$. Вместе с тем $\langle a^*b^* \rangle \trianglelefteq G$.

Предположим, что $[a^*, b^*]^{-s} \notin G'^p$. Тогда $p \nmid s$ и $[a^*, b^*] \neq 1$. Легко видеть, что $p^n = 2$, а значит, $s = 1$. Следовательно, $a^2 \in G'^2 \subseteq \langle b \rangle$. Поэтому $1 = [b, a^2] = [b,a]^2 = [b^2, a]$ (см. утверждение 2 леммы 5), а значит, $b^2 \in Z(G)$ и с учетом (85) $|G'| = 2$. Тогда $a^2 \in G'^2 = 1$ и тем самым $|\langle a \rangle| = 2$. Так как $|\langle a \rangle| = 2 = |G'|$ и $G = \langle a \rangle \langle b \rangle$ и при этом G не является группой диэдра порядка 8, то $\langle b^4 \rangle \supseteq G'$. Поскольку $[a^*, b^*] \neq 1$, то $b^* \notin Z(G)$, а значит, $\langle b^* \rangle = \langle b \rangle$ и $\langle b^{*4} \rangle = \langle b^4 \rangle \supseteq G'$. Ввиду утверждения 2 леммы 5

$$\langle (a^*b^*)^4 \rangle = \langle (b^{*2}[a^*, b^*]^{-1})^2 \rangle = \langle b^{*4}[a^*, b]^{-2} \rangle = \langle b^{*4} \rangle.$$

Следовательно, $\langle a^*b^*\rangle \supseteq G'$ и $\langle a^*b^*\rangle \trianglelefteq G$.

3. Пусть выполняются (87), (88), но $\langle ab^*\rangle \trianglelefteq G$. В силу (87) $G' \neq 1$. Так как $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$ и $\langle b\rangle \trianglelefteq G$, то, очевидно, $G = \langle ab^*\rangle\langle b\rangle$ и $G' \subseteq \langle ab^*\rangle \cap \langle b\rangle \subseteq Z(G)$. Поэтому ввиду утверждения 2 леммы 5

$$(ab^*)^{p^n} = a^{p^n} b^{*p^n}[a, b^*]^{-s} \tag{90}$$

с $s = \frac{p^n(p^n-1)}{2}$ и при $r = \frac{p^{n-1}(p^{n-1}-1)}{2}$

$$(ab^*)^{p^{n-1}} = a^{p^{n-1}} b^{*p^{n-1}}[a, b^*]^{-r}. \tag{91}$$

Так как $p^n = |\langle a\rangle : \langle a\rangle \cap G'^p|$ и с учетом (87), очевидно,

$$\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a\rangle \cap G'^p,$$

то $a^{p^{n-1}} \notin \langle b\rangle$ и $a^{p^n} \in G'^p$. Поэтому, принимая во внимание (91) и включение $b^{*p^{n-1}}[a, b^*]^{-r} \in \langle b\rangle$, получаем $(ab^*)^{p^{n-1}} \notin \langle b\rangle$. Ввиду (88), (86) имеем $|\langle b^{*p^n}\rangle| < p^t = |G'|$. Следовательно, $\langle b^{*p^n}\rangle \subseteq G'^p$. Поэтому если $[a, b^*]^{-s} \in G'^p$, то с учетом (90) $(ab^*)^{p^n} \in G'^p$. Так как $(ab^*)^{p^{n-1}} \notin \langle b\rangle$ и $(ab^*)^{p^n} \in G'^p (\subseteq \langle b\rangle)$, то $\langle ab^*\rangle \cap \langle b\rangle \subseteq G'^p$, а значит, $G' \nsubseteq \langle ab^*\rangle$ и по лемме 12 $\langle ab^*\rangle \ntrianglelefteq G$; противоречие.

Поскольку $[a, b^*]^{-s} \notin G'^p$, очевидно, $[a, b^*] \neq 1$, $p = 2$ и $n = 1$. Поэтому $a^2 \in G'^2 \subseteq \langle b\rangle$. Следовательно, $|G'| = 2$ и $t = 1$, $b^* \notin \langle b^2\rangle \subseteq Z(G)$ и $\langle b^*\rangle = \langle b\rangle$. Но тогда с учетом (88) $|\langle b\rangle| = 2$, а вместе с тем $\langle b\rangle \subseteq Z(G)$ и группа $G = \langle a\rangle\langle b\rangle$ абелева; противоречие.

Итак, утверждение 3 справедливо.

4. В отмеченном случае $t = m$ (см. утверждение 1) и для любого $g \in R$ ввиду утверждения 3 $\langle ag\rangle \ntrianglelefteq G$. Так как $\langle a\rangle, \langle ag\rangle \in S(G)$, то $g \in S(G)$. Следовательно, $R\langle a\rangle \subseteq S(G)$. Пусть $a^*b^* \in G \setminus R\langle a\rangle$. Тогда $|\langle b^*\rangle| \geq p^{m+n}$, а значит, по утверждению 2 $\langle a^*b^*\rangle \trianglelefteq G$. В силу леммы 3 и произвольности элемента a^*b^* все ненормальные подгруппы группы G принадлежат $R\langle a\rangle$. Следовательно, $S(G) \subseteq R\langle a\rangle$.

Пусть G — группа диэдра порядка 8. Тогда $G = \langle a, ab\rangle$ и $\langle a\rangle$, $\langle ab\rangle \ntrianglelefteq G$, т. е. $a, ab \in S(G)$, а значит, $a, b \in S(G)$ и $S(G) = G$.

5. Пусть $S(G) = 1$ и G неабелева. Ввиду отмеченной выше теоремы Дедекинда G — прямое произведение группы кватернионов и элементарной абелевой группы. Поэтому $\mathrm{Exp}(G) = 4$, а значит, $|\langle a\rangle|, |\langle b\rangle| \leq 4$. Тогда поскольку G неабелева и $\langle a\rangle, \langle b\rangle \trianglelefteq G = \langle a\rangle\langle b\rangle$, то, очевидно, $|\langle a\rangle| = |\langle b\rangle| = 4$, $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = 2$ и тем самым $|G| = 8$. Следовательно, G — группа кватернионов.

6. Пусть выполняется (87). Тогда G неабелева.

Предположим, что справедливы (10). Тогда G не является группой диэдра порядка 8. Ввиду леммы 1 из [3] $G' \subseteq Z(G)$. Поэтому в силу утверждения 1 $k \geq 2m = 2t$. Согласно утверждению 4 $S(G) = R\langle a\rangle$. Так как $G \neq S(G)$, то $R \neq \langle b\rangle$, а значит, $|\langle b\rangle| \geq p^{m+n}$.

Пусть $k \geq 2t$, $|\langle b\rangle| \geq p^{m+n}$ и G не является группой диэдра порядка 8. В силу утверждения 1 $G' \subseteq Z(G)$ и $|G'| = p^m$. Ввиду утверждения 4 $S(G) = R\langle a\rangle \neq 1$. Так как $|G'| = p^m$ и, очевидно, $|R| = p^{m+n-1}$, то $G' \subseteq R$. Поэтому с учетом (87) $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle a\rangle \cap R$. Следовательно,

$$|G| = \frac{|\langle a\rangle||\langle b\rangle|}{|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle|} = \frac{|\langle a\rangle|p^k}{|\langle a\rangle \cap R|}$$

и

$$|S(G)| = \frac{|\langle a\rangle||R|}{|\langle a\rangle \cap R|} = \frac{|\langle a\rangle|p^{m+n-1}}{|\langle a\rangle \cap R|} < \frac{|\langle a\rangle|p^{k}}{|\langle a\rangle \cap R|} = |G|,$$

т. е. $S(G) \neq G$. Предложение доказано.

Доказательство теоремы 1. Пусть выполняются (1). Ввиду следствия [3, с. 311] F — прямое произведение своих q-подгрупп F_q по разным $q \in \mathbb{P}$, причем $1 \neq S(F_p) \neq F_p$ для некоторого p и F_q при каждом $q \neq p$ дедекиндова. Пусть $G = F_p$ и $D = \underset{q\neq p}{\times} F_q$. Тогда $F = G \times D$ и выполняются (10). Используя отмеченную теорему Бэра [2], нетрудно убедиться в том, что D дедекиндова.

Ввиду [3, с. 314, следствие] G' — циклическая подгруппа.

Согласно лемме 1 из [3] $F' \subseteq Z(F)$. В частности,

$$G' \subseteq Z(G). \tag{92}$$

В силу следствия 1 настоящей работы $\mathrm{Exp}(G) \geq p^2$. Поэтому с учетом леммы 7 из [3]

$$\mathrm{Exp}(G) \geq 8. \tag{93}$$

Пусть $H = S(G)$. По теореме 2 из [3]

$$G' \subseteq H, \tag{94}$$

$$\mathrm{Exp}(H) < \infty \tag{95}$$

и в G можно подобрать циклическую или квазициклическую подгруппу B такую, что

$$G = HB, \tag{96}$$

$$G' \subset B \lhd G, \tag{97}$$

$$|B : G'| \geq \mathrm{Exp}(H/G'^p)(\neq 1). \tag{98}$$

С учетом (94)–(98) вследствие леммы 9 в G/G'^p найдется подгруппа A/G'^p такая, что

$$\begin{gathered} G/G'^p = (A/G'^p)(B/G'^p), \quad A/G'^p \cap B/G'^p = G'/G'^p, \\ |B/G'^p : G'/G'^p| \geq \mathrm{Exp}(A/G'^p) < \infty. \end{gathered} \tag{99}$$

Ввиду (99) выполняются соотношения (2),

$$A \cap B = G', \tag{100}$$

$$|B : G'| \geq \mathrm{Exp}(A/G'^p) < \infty$$

и вместе с тем

$$|B| \geq |G'|\mathrm{Exp}(A/G'^p). \tag{101}$$

Так как $|G'^p| < \infty$ и $\mathrm{Exp}(A/G'^p) < \infty$, то $\mathrm{Exp}(A) < \infty$.

В силу (92), (100)

$$G' = A \cap B \subseteq Z(G). \tag{102}$$

С учетом (102) выполняются (3). Поскольку G неабелева и $G = AB$, то в случае, когда $B \subseteq Z(G)$, будет $A' = G'$, а значит, $A' \neq 1$. Итак, условия 1 выполнены.

Покажем, что выполняются условия 2. Пусть $B \nsubseteq Z(G)$. Так как G нильпотентная (см. (92)) и периодическая, ввиду леммы 10 B не квазициклическая.

Тогда для некоторых $b \in B$ и $k \in \mathbb{N}$ справедливы (5). Очевидно, что $A/C_A(B)$ абелева.

Пусть $g \in A \setminus C_A(B)$. Тогда найдутся $r, n \in \mathbb{N}$ такие, что $r < p$, $n < k$ и $b^g = b^{1+rp^{k-n}}$. Поскольку $G' \subseteq Z(G)$ (см. (92)), то, как легко убедиться (например, используя утверждение 2 леммы 5), $|\langle g\rangle : C_{\langle g\rangle}(B)| = p^n$. Очевидно также, что $[b, g, g] = 1$, т. е. $[b^{rp^{k-n}}, g] = 1$. Поэтому с учетом утверждения 1 или 2 леммы 5

$$1 = [b^{rp^{k-n}}, g] = (b^{rp^{k-n}})^{rp^{k-n}} = b^{r^2p^{2k-2n}}.$$

Следовательно, $2k - 2n \geq k$, т. е. $k \geq 2n$.

Предположим, что $g^p \in C_A(B)$. Тогда $n = 1$ и $b^g = b^{1+rp^{k-1}}$. Пусть $h \in A \setminus C_A(B)$ и $h^p \in C_A(B)$. В силу доказанного $b^h = b^{1+sp^{k-1}}$, $s \in \mathbb{N}$, $s < p$. Поскольку $r, s < p$, найдется $t \in \mathbb{N}$ такое, что $t < p$ и $s \equiv tr(\operatorname{mod} p)$. Тем самым с учетом утверждения 2 леммы 5

$$[g^t h^{-1}, b] = [g, b]^t [h, b]^{-1} = b^{-trp^{k-1}} b^{sp^{k-1}} = b^{(s-rt)p^{k-1}} = 1.$$

Поэтому

$$g^t C_A(B) = (gC_A(B))^t = hC_A(B). \tag{103}$$

Ввиду (103) и произвольности h подгруппа группы $A/C_A(B)$, порожденная элементом $gC_A(B)$, — единственная ее подгруппа порядка p. Так как $A/C_A(B)$ конечная абелева, она является прямым произведением некоторых циклических подгрупп (см., например, [10, гл. 3, § 2, теорема 2]). Тогда поскольку в $A/C_A(B)$ единственная подгруппа порядка p, то $A/C_A(B)$ циклическая. Таким образом, для некоторого $a \in A$ справедливо первое равенство из (6).

Пусть $|\langle a\rangle : C_{\langle a\rangle}(B)| = p^m$. Очевидно, ввиду первого равенства из (6) выполняется второе равенство из (6). Как показано выше, верны второе соотношение из (4) и при некотором $l \in \mathbb{N}$ — первое неравенство из (4) и третье равенство из (6).

Покажем, что выполняется третье неравенство из (4), т. е. что $|B| > 4$. Ввиду второго неравенства из (4) $|B| \geq p^2$, а значит, $|B| \geq 9$ при $p \neq 2$.

Пусть $p = 2$. Предположим, что $|B| = 4$. Так как $G = AB$ — 2-группа и $B \lhd G$, $B \nsubseteq Z(G)$, то, очевидно, $|[B, A]| = 2$ и с учетом (2) и (3) $|A'| \leq 2$ и $G' = A' \cup [B, A] \subseteq B$. Следовательно, $G' = [B, A]$ и

$$|G'| = |B : G'| = 2. \tag{104}$$

Далее,

$$|B : G'| \geq \operatorname{Exp}(A/G'^2) \tag{105}$$

(см. выше) и ясно, что

$$\operatorname{Exp}(A/G'^2) \geq 2. \tag{106}$$

Ввиду (104)–(106) $G'^2 = 1$, $G' \subseteq Z(G)$, $\operatorname{Exp}(A) = 2$.

Пусть $M = A \cup B$. В силу леммы 7 $\operatorname{Exp}(G) = \max\limits_{g \in M}(|\langle g\rangle|) = 4$; противоречие (см. (93)). Таким образом, $|B| > 4$. Вместе с тем выполняются все неравенства (4).

Поскольку $G = AB$, $[B, A] \subseteq G' \subseteq B$ (см. (97)) и B — циклическая p-подгруппа, то, очевидно, либо $G' = A' \supseteq [B, A]$, либо $G' = [B, A] \supset A'$.

Так как $l \in \mathbb{N}$ и $l < p$ (см. (4)), вследствие третьего из равенств (6) $\langle [b,a] \rangle = \langle b^{p^{k-m}} \rangle$. Поскольку $[b,a] \in \langle b \rangle \trianglelefteq G = AB$, то $\langle [b,a] \rangle \trianglelefteq G$ и с учетом первого из равенств (6) в $G/\langle [b,a] \rangle$ подгруппы $A\langle [b,a] \rangle/\langle [b,a] \rangle$ и $B/\langle [b,a] \rangle$ поэлементно перестановочны. Следовательно, $[B,A] \subseteq \langle [b,a] \rangle$, а потому $[B,A] = \langle [b,a] \rangle$. Таким образом, выполняются (13). Очевидно, что (14) — следствия (13).

Далее, напомним, что

$$|B| = p^k, \tag{107}$$

$$G' = B \cap A \tag{108}$$

(см. (5), (100)). Так как или $G' = A'$, или $G' = [B,A]$ и выполняются (14), то в случаях, когда $|A'| \geq p^m$ и $|A'| \leq p^m$, соответственно

$$G' = A' \tag{109}$$

и

$$|G'| = p^m, \quad |G'^p| = p^{m-1}. \tag{110}$$

Тогда в первом случае с учетом (107) и (109) соотношение (101) превращается в (7). Во втором случае ввиду (108) и первого равенства из (110) $|G'| = |B \cap A| = p^m$, а значит, $|T| = p^{m-1}$. Так как $T, G'^p \subseteq B \cap A$, $B \cap A$ — циклическая p-подгруппа и с учетом второго равенства из (110) $|T| = |G'^p|$, то $T = G'^p$. Следовательно, в этом случае (101) превращается в (8).

Таким образом, в отмеченных случаях выполняются соответственно (7) и (8). Справедливость условий 2 доказана.

В случае, когда $B \subseteq Z(G)$, имеем $G' = A'$ и (101) превращается в (9), и, значит, условие 3 справедливо.

Итак, выполняются (11) и условия 1–3.

Пусть $F = G \times D$, G и D — p- и дедекиндова p'-подгруппы соответственно.

Предположим, что выполняются (1). Тогда ввиду леммы 4 $S(G) \neq 1$ и $S(F) = S(G) \times D$. Поскольку

$$S(G) \times D \neq F = G \times D, \tag{111}$$

то $S(G) \neq G$. Таким образом, приходим к (10).

Предположим, что верны неравенства (10). Тогда, очевидно, имеют место (111) и $1 \neq S(G) \subseteq S(F)$, т. е. $S(F) \neq 1$. Ввиду леммы 4 $S(F) = S(G) \times D$. Следовательно, $S(F) \neq F$.

Таким образом, (1) выполняются тогда и только тогда, когда выполняются (10), и если выполняются (1), то справедливо утверждение 1.

Ввиду следствия [3, с. 314] (1) влекут утверждение 2.

Пусть для некоторых подгрупп A и B выполняются условия 1–3.

Так как

$$B \lhd G = AB \tag{112}$$

и $A' \subseteq B$ (см. условия 1), то $G' \subseteq B$. В таком случае поскольку B — примарная циклическая или квазициклическая подгруппа (см. условия 1), то, очевидно, справедливо утверждение 3.

Пусть $B \nsubseteq Z(G)$. Тогда выполняются условия 2 и вместе с тем $B = \langle b \rangle$ и $|B| = p^k$, $k \in \mathbb{N}$, $A = \langle a \rangle C_A(B)$ и $b^a = b^{1+lp^{k-m}}$, $l, m \in \mathbb{N}$, $l < p$, $m < k$ (см. (4)–(6)). Так как выполняются (112), $A = \langle a \rangle C_A(B)$ и B циклическая, то $\langle [b,a] \rangle \lhd G$ и в $G/\langle [b,a] \rangle$ подгруппы $A\langle [b,a] \rangle/\langle [b,a] \rangle$ и $B/\langle [b,a] \rangle$ поэлементно перестановочны. Следовательно, $[B,A] \subseteq \langle [b,a] \rangle$. Поэтому $[B,A] = \langle [b,a] \rangle$.

Поскольку $b^a = b^{1+lp^{k-m}}$ и $l \in \mathbb{N}$, $l < p$, то, очевидно, $\langle [b,a] \rangle = \langle b^{p^{k-m}} \rangle$. Таким образом, справедливы (13). Ясно, что (14) — следствия соотношений (13). Так как $b^a = b^{1+lp^{k-m}}$, где $l \in \mathbb{N}$ и $l < p$ (см. (6), (4)), то, очевидно, $[b^{p^{m-1}}, a] = [b,a]^{p^{m-1}} = (b^{lp^{k-m}})^{p^{m-1}} = b^{lp^{k-1}} \neq 1$, а значит, $b^{p^{m-1}} \notin Z(G)$. Тогда, поскольку $B \cap A \subseteq Z(G)$ (см. (3)), то $|\langle b \rangle : B \cap A| \geq p^m$ и тем самым $|\langle b \rangle| \geq p^m |B \cap A|$.

Итак, утверждение 4 справедливо.

Если $G' = A'$, то ввиду (3)

$$G' \subseteq Z(G) \cap B. \tag{113}$$

Так как $G = AB$, то в случае, когда $B \subseteq Z(G)$, имеем $G' = A'$, а значит, выполняется (113).

Пусть $G' \neq A'$ и вместе с тем $B \not\subseteq Z(G)$. Тогда $B = \langle b \rangle$, $|\langle b \rangle| = p^k$ и ввиду утверждений 3 и 4 $G' = \langle [b,a] \rangle$. Поскольку $B \lhd G$ и B абелева (см. условия 1), то

$$G' \subseteq B, \quad [[b,a], B] = 1$$

и с учетом третьего из равенств (6) и второго из (4) в силу утверждения 1 леммы 5

$$[[b,a],a] = [b^{lp^{k-m}}, a] = [b,a]^{lp^{k-m}} = b^{l^2 p^{2k-2m}} = (b^{p^k})^{l^2 p^{k-2m}} = 1.$$

Так как $A = \langle a \rangle C_A(B)$ (см. (6)) и $[[b,a],a] = 1$, то $[[b,a],A] = 1$. Поскольку $G = AB$ и

$$[[b,a], B] = [[b,a], A] = 1,$$

то $[b,a] \in Z(G)$. Вместе с тем $G' \subseteq Z(G)$ и выполняется (113).

Итак, соотношение (113) всегда справедливо.

Далее, если $B \not\subseteq Z(G)$, то ввиду условий 2 (см. (4)) $\mathrm{Exp}(G) \geq 8$. Пусть $B \subseteq Z(G)$. Тогда $G' = A' \neq 1$ (см. условия 1). Так как $A' \neq 1$, $\mathrm{Exp}(A) < \infty$, $A' \subseteq B$ и B — циклическая или квазициклическая p-подгруппа (см. условия 1), то $A' \neq A'^p$. Следовательно, A/A'^p неабелева, и $\mathrm{Exp}(A/A'^p) \geq p$. Поэтому с учетом условия 3

$$|B| \geq |A'| \mathrm{Exp}(A/A'^p) \geq p^2. \tag{114}$$

Предположим, что $|B| < 8$. Тогда с учетом (114), очевидно, $p = 2$, $|B| = 4$, $|A'| = \mathrm{Exp}(A/A'^p) = 2$. Следовательно, $A'^2 = 1$ и $\mathrm{Exp}(A) = 2$. В таком случае A абелева; противоречие. Итак, $|B| \geq 8$, и, значит, $\mathrm{Exp}(G) \geq 8$.

Таким образом, всегда $\mathrm{Exp}(G) \geq 8$.

Покажем, что справедливо утверждение 5.

Пусть $c = \mathrm{Exp}(AG'^p/G'^p)$, $d = |G'|$. Если $B \subseteq Z(G)$, то ввиду (2) и (9) $G' = A'$ и $|B| \geq cd$. Если $B \not\subseteq Z(G)$, то в силу условия 2 (нормальная в G) подгруппа B циклическая и $p^k = |B|$ (см. (5)). Вследствие утверждений 3, 4 в случаях, когда $|A'| \geq p^m$; $|A'| \leq p^m$ и $|T| = p^{m-1}$; $|A'| \leq p^m$ и $|T| = |B \cap A|$, соответственно $G' = A'$, $d = |A'|$ и $A/A'^p = AG'^p/G'^p$; $G' = [B,A]$, $d = p^m$, $T = G'^p \subseteq B \cap A$ и $A/T = AG'^p/G'^p$; $G' = [B,A]$, $d = p^m$ и $T = B \cap A \subseteq G'^p$, а значит, $\mathrm{Exp}(A/T) \geq c$. Поэтому с учетом (7) и (8) $|B| \geq cd$.

Таким образом, $|B| \geq cd$.

Итак, все условия леммы 11 выполняются, поэтому ввиду этой леммы справедливы (15). Так как $S(G) \neq 1$, то в силу леммы 4 $S(F) = S(G) \times D$. Тем самым с учетом (15) приходим к (16).

Ввиду (16) выполняются (1), и, таким образом, условия 1–3 влекут (1). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $L = (K/S) \setminus \{(a,1)S \mid a \in A\}$, M — множество элементов такое, что $|M| = |L|$ и $M \cap A = M \cap (K/S) = \varnothing$, φ — взаимно однозначное отображение L на M; $H^* = \{(1,g) \mid g \in H\}$. Заменим в K/S все элементы $g \in L$ и $(a,1)S$ соответственно на g^φ и a. Полученные после этой замены вместо K/S и H^*S/S группу и ее подгруппу обозначим соответственно через G и B. Понятно, что $B = \langle b \rangle$ для $b = ((1,h)S)^\varphi$. Существование группы F очевидно. Нетрудно убедиться в том, что выполняются условия 1 и 2 настоящей теоремы, условия 1 и 2 теоремы 1, а значит, и условие 3 настоящей теоремы. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3 повторяет доказательство теоремы 2 с заменой ссылки на условие 2 теоремы 2 ссылкой на условие 2* теоремы 3, ссылки на условие 2 теоремы 1 ссылкой на ее условие 3 и с исключением из текста предложения: «Понятно, что $B = \langle b \rangle$ для $\ldots$ ».

Доказательство теоремы 4. 1. Так как выполняется (87) и G не является группой диэдра порядка 8, то утверждение 1 справедливо ввиду утверждения 6 предложения 2, поскольку в случае, когда $2t \le k$, вследствие утверждения 1 этого предложения $t = m$ и, значит, $t + n \le k$ тогда и только тогда, когда $|\langle b \rangle| \ge p^{m+n}$.

2. Если $2t \le k$, то в силу утверждения 1 предложения 2 выполняются (19), а значит, ввиду его утверждения 4 справедливо (20).

Доказательство теоремы 5. Согласно теореме 1 (см. ее условия 1 и 2) утверждение 1 настоящей теоремы влечет существование неабелевой подгруппы A с $\mathrm{Exp}(A) < \infty$ и квазициклической подгруппы $B \subseteq Z(G)$, для которых выполняются (21). Очевидно, $A \lhd G$. Таким образом, из утверждения 1 следует утверждение 2.

Пусть справедливо утверждение 2. Поскольку $\mathrm{Exp}(A) < \infty$, $A' \subseteq B$ (см. (21)) и B квазициклическая, то A' циклическая, а потому, как нетрудно убедиться, A нильпотентна. Тогда с учетом (21) и того, что $A, B \trianglelefteq G$, ввиду теоремы Фиттинга (см., например, [10]) G нильпотентна, а значит, справедливо утверждение 3.

Если справедливо утверждение 3, то ввиду леммы 13 $B \subseteq Z(G)$ и выполняются (22), а значит, справедливо утверждение 4.

Если справедливо последнее, то $G' \subseteq B \subseteq Z(G)$, а значит, G нильпотентна и вместе с тем справедливо утверждение 5.

Пусть справедливо утверждение 5. Так как G периодическая нильпотентная, ввиду леммы 10 $B \subseteq Z(G)$. Следовательно, справедливо утверждение 4.

Пусть справедливо утверждение 4, $n = \mathrm{Exp}(G/B)$, $T < B$ и $|T| = n$. Так как $G' \subseteq B \subseteq Z(G)$, то G нильпотентна. Поскольку $g^n \in B$ для любого $g \in G$, ввиду утверждения 2 леммы 5 при произвольных $g, h \in G$ будет $[g,h]^n = [g^n, h] = 1$. Следовательно, $G' \subseteq T$, и, значит, $|G'| \le n$. Так как B/G' полная, то вследствие, например, теоремы 2 из [10, гл. 3, § 3] для некоторой подгруппы A/G' имеем $G/G' = (A/G') \times (B/G')$. Тогда $\mathrm{Exp}(A) < \infty$ и, очевидно, $G = AB$ и A неабелева, а значит, справедливо утверждение 3.

Пусть справедливо утверждение 3. Тогда ввиду леммы 13 $A, B \trianglelefteq G$ и выполняются (21). Таким образом, справедливо утверждение 2.

Пусть справедливо утверждение 2. Тогда G нильпотентна (см. выше) и ввиду леммы 10 $B \subseteq Z(G)$. Очевидно, для подгрупп A и B выполняются условия 1–3 теоремы 1. Поэтому ввиду теоремы 1 справедливо утверждение 1 настоящей теоремы.

Пусть справедливо утверждение 2 или 3. Выше показано, что 2 и 3 равносильны. Вследствие утверждения 3 G нильпотентна. Поэтому в силу леммы 10 $B \subseteq Z(G)$, а значит, $G' = A'$. Далее, нетрудно убедиться в том, что для подгрупп A и B выполняются условия 1–3 теоремы 1. Следовательно, по теореме 1 (см. ее утверждение 5) получаем (15).

Из теоремы 3 непосредственно вытекает

Предложение 3. *Для любых $p \in \mathbb{P}$, неабелевой p-группы A конечной экспоненты с центральным циклическим коммутантом и локально циклической p-группы H, порядок (мощность) которой не меньше произведения порядка коммутанта A' на экспоненту фактор-группы A/A'^p, существует p-группа G, содержащая A в качестве нормальной подгруппы, такая, что выполняются* (10) *и $G = AB$ и $A \cap B = A'$ для некоторой ее центральной подгруппы B, изоморфной H.*

Легко видеть, что для группы G из предложения 3 $G' = A'$ и G' — ее центральная циклическая подгруппа и что в случае, когда группа H конечна, экспонента группы G конечна и совпадает с порядком H, а в случае, когда H бесконечна, экспонента группы G бесконечна.

Приведем еще следующее

Утверждение. *Пусть G — группа наименьшего порядка, для которой выполняются* (10). *Тогда $|G| = 16$ и G представима в виде $G = \langle b \rangle \leftthreetimes \langle a \rangle$, где $|\langle b \rangle| = 8$, $|\langle a \rangle| = 2$ и $b^a = b^5$.*

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что для группы $G = \langle b \rangle \leftthreetimes \langle a \rangle$, приведенной выше, $S(G) = \langle b^4 \rangle \times \langle a \rangle$, а значит, выполняются (10), и что для любой группы G с $|G| < 16$ (10) не выполняются. (Последнее вытекает также из лемм 1, 7 в [3], в силу которых для G, удовлетворяющей (10), $G' \subseteq Z(G)$ и $\mathrm{Exp}(G) \neq 4$.) Пусть H — группа такая, что $|H| = 16$ и $1 \neq S(H) \neq H$. Так как H неабелева и ввиду леммы 7 из [3] $\mathrm{Exp}(H) \neq 4$, то понятно, что H содержит некоторую подгруппу $\langle \bar{b} \rangle$ с $|\langle \bar{b} \rangle| = 8$. Очевидно, $\langle \bar{b} \rangle \lhd H$. Пусть $g \in H \setminus \langle \bar{b} \rangle$, $b^*, \tilde{b} \in \langle \bar{b} \rangle$ и $b^{*2} = g^{-2}$, $\tilde{b}^2 = [b^*, g]$; $\bar{a} = \tilde{b} b^* g$. Тогда $H = \langle \bar{b} \rangle \langle \bar{a} \rangle$. Поскольку $H' \subseteq Z(H)$ (лемма 1 в [3]), то, как легко видеть, $|H'| = 2$ и $\tilde{b} \in Z(H)$. С учетом этого непосредственная проверка показывает, что $|\langle \bar{a} \rangle| = 2$. Тогда $H = \langle \bar{b} \rangle \leftthreetimes \langle \bar{a} \rangle$. Легко видеть, что $\bar{b}^{\bar{a}} = \bar{b}^5$.

Заметим также, что из теоремы 1 вытекает

Предложение 4. *Следующие утверждения равносильны.*

1. *Группа G является p-группой бесконечной экспоненты, и $1 \neq S(G) \neq G$.*
2. *Для некоторых неабелевой p-подгруппы A конечной экспоненты и центральной квазициклической p-подгруппы B группы G будет $G = AB$ и $A' = B \cap A$.*
3. *Для некоторых p-подгруппы A и квазициклической p-подгруппы B группы G имеют место соотношения $G = AB$, $\mathrm{Exp}(A) < \infty$, $1 \neq A' \subseteq B \subseteq Z(G)$.*

Лемма 14. *Пусть $G = AB$ и $G^* = A^* B^*$ — группы, $A \leq G$, $A^* \leq G^*$ и $B \trianglelefteq G$, $B^* \trianglelefteq G^*$. Пусть существуют изоморфизмы ψ и χ соответственно A на A^* и B на B^* такие, что выполняются следующие условия:*

1) *$A^* \cap B^* = (A \cap B)^\psi$ или $A^* \cap B^* = (A \cap B)^\chi$;*
2) *$g^\psi = g^\chi$ для любого $g \in A \cap B$;*
3) *$(b^a)^\chi = (b^\chi)^{a^\psi}$ для любых $a \in A$, $b \in B$.*

Для произвольных $a \in A$ и $b \in B$ положим $(ab)^\varphi = a^\psi b^\chi$. Тогда φ — изоморфизм G на G^*.

Доказательство. Пусть $h \in G^*$. Тогда для некоторых $a^* \in A^*$, $b^* \in B^*$ и $a \in A$, $b \in B$ имеем $h = a^*b^*$ и $a^* = a^\psi$, $b^* = b^\chi$, а значит, $h = a^\psi b^\chi = (ab)^\varphi$.

Пусть $a, a_1 \in A$, $b, b_1 \in B$ и $ab = a_1b_1$. Тогда, очевидно, для некоторого $u \in A \cap B$ будет $a_1 = au$ и $b_1 = u^{-1}b$. В таком случае $u^\psi(u^{-1})^\chi = 1$ (см. условие 2) и

$$(a_1b_1)^\varphi = a_1^\psi b_1^\chi = (au)^\psi(u^{-1}b)^\chi = a^\psi u^\psi(u^{-1})^\chi b^\chi = a^\psi b^\chi = (ab)^\varphi.$$

Ввиду доказанного φ — отображение G на G^*.

Для произвольных $a, a_1 \in A$ и $b, b_1 \in B$

$$(ab)^\varphi(a_1b_1)^\varphi = a^\psi b^\chi a_1^\psi b_1^\chi = a^\psi a_1^\psi (b^\chi)^{a_1^\psi} b_1^\chi$$

и с учетом условия 3

$$(aba_1b_1)^\varphi = (aa_1b^{a_1}b_1)^\varphi = (aa_1)^\psi(b^{a_1}b_1)^\chi = a^\psi a_1^\psi(b^{a_1})^\chi b_1^\chi = a^\psi a_1^\psi(b^\chi)^{a_1^\psi} b_1^\chi.$$

Таким образом, $(ab)^\varphi(a_1b_1)^\varphi = (aba_1b_1)^\varphi$, и, следовательно, φ — гомоморфизм G на G^*.

Далее, пусть, например, $A^* \cap B^* = (A \cap B)^\psi$ (см. условие 1). Если $(ab)^\varphi = 1$ для некоторых $a \in A$ и $b \in B$, то $a^\psi = (b^{-1})^\chi \in A^* \cap B^*$. Поэтому с учетом условия 1 $a \in A \cap B$. Следовательно, с учетом условия 2

$$1 = (ab)^\varphi = a^\psi b^\chi = a^\chi b^\chi = (ab)^\chi.$$

В таком случае $ab = 1$, поскольку χ — изоморфизм B на B^*. Итак, $\operatorname{Ker}\varphi = 1$. Лемма доказана.

Пусть B и B^* — изоморфные квазициклические группы или изоморфные конечные циклические группы, $N \leq B$, ξ — изоморфизм N в B^*. Тогда, очевидно, ξ продолжается до некоторого изоморфизма B на B^*.

Следующее предложение непосредственно вытекает из леммы 14.

Следствие 5. *Пусть $G = AB$ и $G^* = A^*B^*$ — группы, D и $D^* \simeq D$ — группы, ζ — изоморфизм D на D^*, причем $A \leq G$, $A \simeq A^* \leq G^*$ и $B \trianglelefteq G$, $B \simeq B^* \trianglelefteq G^*$, B — квазициклическая или конечная циклическая группа и существует изоморфизм ψ группы A на A^* такой, что $(A \cap B)^\psi = A^* \cap B^*$ и $C_A(B)^\psi = C_{A^*}(B^*)$; χ — изоморфизм B на B^*, такой, что $g^\psi = g^\chi$ для любого $g \in A \cap B$. Пусть в случае, когда B квазициклическая, $B \subseteq Z(G)$ и $B^* \subseteq Z(G^*)$, и в случае, когда B циклическая, для некоторых $a \in A$, $n \in \mathbb{Z}$ и образующих b и b^* соответственно подгрупп B и B^* выполняются соотношения*

$$A = \langle a \rangle C_A(B), \quad b^a = b^n, \quad b^{*a^\psi} = b^{*n}.$$

Положим $(g_1g_2g)^\varphi = g_1^\psi g_2^\chi g^\zeta$ для произвольных $g_1 \in A$, $g_2 \in B$ и $g \in D$. Тогда φ — изоморфизм группы $G \times D$ на группу $G^* \times D^*$.

Замечание 6. Ввиду теорем 2, 3 и следствия 5, если в теореме 1 выполняются условия 1–3, то группа F действительно существует, причем при фиксированных A, B, D и $\langle a \rangle$, $C_A(B)$, l, m, k (в случае, когда $B \not\subseteq Z(G)$) одна с точностью до изоморфизма.

Авторы выражают благодарность профессору А. В. Ройтеру за постановку задачи и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dedekind R.* Über Gruppen, deren sämmtliche Teiler Normalteiler sind // Math. Ann. 1897. Bd 48. S. 548–561.

2. *Baer R.* Situation der Untergruppen und Struktur der Gruppe // S.-B. Heidelberg Acad. Math.-Nat. Klasse. 1933. Bd 2. S. 12–17.

3. *Cappitt D.* Generalized Dedekind groups // J. Algebra. 1971. V. 17, N 3. P. 310–316.

4. *Баранник А. Ф.* Обобщение метагамильтоновых групп // Исследование групп по заданным свойствам подгрупп. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1974. С. 167–198.

5. *Кузенний М. Ф., Семко М. М.* Метагамільтонові групи та їх узагальнення. Київ: Інститут математики НАН України, 1996.

6. *Chernikov N. S., Dovzhenko S. A.* A generalization of Dedekind groups // 4-th Intern. algebraic conf. in Ukraine (August 4–9, 2003, Lviv). Abstracts. Lviv: Ivan Franko National Univ. of Lviv, 2003. P. 57.

7. *Huppert B.* Endliche Gruppen. Berlin etc.: Springer-Verl., 1967. Bd I.

8. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups. Amsterdam; London: North–Holland Publ. Co., 1973.

9. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп. Киев: Наук. думка, 1987.

10. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1972.

11. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions and generalized soluble groups. Berlin etc.: Springer-Verl., 1972. V. 1.

Статья поступила 8 июля 2004 г.

Черников Николай Сергеевич,   Довженко Светлана Алексеевна
Институт математики НАН Украины,
ул. Терещенковская, 3, Киев 01601, Украина
chern@imath.kiev.ua