*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2006. Том 47, № 1*

*УДК 512.55*

# КОСЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПЕРВИЧНЫХ КОЛЕЦ

**А. Фират**

**Аннотация:** Пусть $R$ — первичное кольцо. *Косым $g$-дифференцированием* для функции $g : R \to R$ называют аддитивное отображение $f : R \to R$, для которого при любых $x, y \in R$ выполнены соотношения $f(xy) = f(x)g(y) + xf(y) = f(x)y + g(x)f(y)$ и $f(g(x)) = g(f(x))$. Обобщены некоторые свойства первичных колец с дифференцированиями на класс первичных колец с косыми дифференцированиями.

**Ключевые слова:** косое дифференцирование, первичное кольцо, йорданово дифференцирование.

В статье через $R$ обозначается ассоциативное кольцо с центром $C(R)$, через $\mathbb{Z}$ — кольцо целых чисел. Напомним ряд понятий теории колец.

Говорят, что кольцо $R$ *без $n$-кручения*, если из равенства $nx = 0$, $x \in R$, следует, что $x = 0$. Кольцо $R$ *первичное*, если для любых $a, b \in R$ из равенства $aRb = 0$ вытекает, что $a = 0$ или $b = 0$. Через $[x, y]$ обозначается коммутатор $xy - yx$. Имеют место основные коммутаторные тождества $[xy, z] = [x, z]y + x[y, z]$, $[x, yz] = [x, y]z + y[x, z]$.

Аддитивное отображение $D$ из $R$ в $R$ называется *дифференцированием*, если при любых $x, y \in R$ выполняется равенство $D(xy) = D(x)y + xD(y)$.

Мы вводим понятие косого дифференцирования (semi-derivation), которое обобщает понятие дифференцирования, введенного в [1].

Определение. Аддитивное отображение $f : R \to R$ называется *$g$-дифференцированием* (*косым дифференцированием*) для функции $g : R \to R$, если при всех $x, y \in R$ справедливы соотношения

(i) $f(xy) = f(x)g(y) + xf(y) = f(x)y + g(x)f(y)$;
(ii) $f(g(x)) = g(f(x))$.

*Йордановым дифференцированием* называется аддитивное отображение $D$ из $R$ в $R$, для которого при любых $x \in R$ выполняется $D(x^2) = D(x)x + xD(x)$.

Отображение $F$ из $R$ в $R$ называем *коммутирующим на $R$*, если при любом $x \in R$ верно $[F(x), x] = 0$, и *централизующим*, если при любых $x \in R$ выполняется $[F(x), x] \in C(R)$.

В статье [2] доказано, что для любого натурального $n$ и некоммутативного первичного кольца $R$ без $(n+1)!$-кручения если йордановы дифференцирования $D, G : R \to R$ удовлетворяют тождеству $D(x)x^n - x^nG(x) = 0$ при любых $x \in R$, то $D = 0$ и $G = 0$. Там также показано, что если пара йордановых дифференцирований $D, G : R \to R$ удовлетворяет включению $D(x)x^n - x^nG(x) \in C(R)$ при любых $x \in R$, то $D = 0$ и $G = 0$. В данной работе будет доказано, что такие же утверждения выполнены для косых дифференцирований первичных колец при $n = 6$. Доказываем следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Пусть $R$ — некоммутативное первичное кольцо без 6-кручения, а $D$, $G$ — $g$-дифференцирования $R$ для сюръективного эндоморфизма $g : R \to R$.*

*Тогда если для любых $x \in R$ выполнены равенства $D(x)x^2 - x^2G(x) = 0$ и $[g(x), x^2] = 0$, то $D = 0$ и $G = 0$.*

**Теорема 2.** *Пусть $R$ — некоммутативное первичное кольцо без 6-кручения, а $D$, $G$ — $g$-дифференцирования $R$ для сюръективного эндоморфизма $g : R \to R$.*

*Тогда если для любых $x \in R$ выполнено равенство $D(x)x^2 - x^2G(x) \in C(R)$, то $D = 0$ и $G = 0$.*

Предварим доказательства теорем следующей леммой.

**Лемма.** *Пусть $R$ — некоммутативное первичное кольцо, а $D$ — косое дифференцирование $R$, для которого при любом $x \in R$ выполнено $D(x)x^2 = 0$. Тогда $D = 0$.*

Доказательство. Заменив $x$ на $x + ky$ в соотношении $D(x)x^2 = 0$, при любых целом $k$ и $x, y \in R$ получаем соотношение $0 = kP_1(x, y) + k^2P_2(x, y)$, в котором $P_1(x, y) = D(x)(xy + yx) + D(y)x^2$, а $P_2(x, y) = D(y)(xy + yx) + D(x)y^2$. Отсюда следует, что при любых $x, y \in R$

$$P_1(x, y) = D(x)(xy + yx) + D(y)x^2 = 0. \tag{1}$$

Подставим $yx$ вместо $y$ в уравнении (1). При любых $x, y \in R$ имеем равенство

$$0 = D(x)(xyx + yx^2) + D(y)x + g(y)D(x)x^2 = D(x)(xyx + yx^2) + D(y)x. \tag{2}$$

Умножаем справа равенство (1) на $x$ и вычитаем из равенства (2), получаем при любых $x, y \in R$

$$D(y)(x^3 - x) = 0. \tag{3}$$

Подставим $yr$ вместо $y$ в (3). При любых $r \in R$ приходим к равенству

$$D(y)r(x^3 - x) = 0. \tag{4}$$

В силу первичности $R$ выводим при любых $x, y \in R$ тождество $D(y) = 0$ или $x^3 - x = 0$.

Поскольку $R$ — некоммутативное кольцо, отсюда следует, что $D(y) = 0$ при любом $y \in R$. Тем самым $D = 0$ и доказательство леммы завершается. □

Доказательство теоремы 1. Предполагаем, что при всех $x \in R$ выполняется

$$D(x)x^2 - x^2G(x) = 0. \tag{5}$$

Подставим $x + ny$ вместо $x$, где $n$ — целое число, $n \in \mathbb{Z}$, в (5). Получаем при $x, y \in R$ равенство

$$nP_1(x, y) + n^2P_2(x, y) = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{6}$$

здесь

$$P_1(x, y) = D(x)xy + D(x)yx + D(y)x^2 - xyG(x) - yxG(y) - x^2G(y),$$

$$P_2(x, y) = D(y)xy + D(y)yx + D(x)y^2 - xyG(y) - yxG(y) - y^2G(y).$$

По интерполяционной теореме (см. также [3, лемма 1]) выводим при любых $x, y \in R$ равенство

$$P_1(x, y) = 0. \tag{7}$$

Заменяем $y$ на $xy$ в (7) и получаем при любых $x, y \in R$ тождество

$$D(x)x[xy + yx] + D(xy)x^2 = x\{xyG(x) + yxG(x) + x^2G(x,y)\}.$$

Отсюда при любых $x, y \in R$ имеем

$$[D(x), x]xy + [D(x), x]yx + D(x)[g(y), x^2] = 0. \tag{8}$$

Выберем $y = x$ в (8). Из отсутствия 6-кручения в кольце $R$ при любых $x \in R$ вытекает соотношение

$$[D(x), x]x^2 = 0. \tag{9}$$

Заменив $x$ на $x + \lambda y$, $\lambda \in Z$, в (9), получим при $x, y \in R$ тождество

$$\lambda Q_1(x,y) + \lambda^2 Q_2(x,y) = 0, \tag{10}$$

в котором

$$Q_1(x,y) = [D(x), x](xy + yx) + \{[D(x), y] + [D(y), x]\}x^2.$$

Опять по теореме об интерполяции

$$Q_1(x,y) = 0. \tag{11}$$

Полагаем $yx$ вместо $y$ в (11). Имеем

$$[D(x), x](xyx + yx^2) + [D(x), y]x^3 + [D(y), x]x^3 + [g(y), x]D(x)x^2 = 0. \tag{12}$$

Умножим (11) справа на $x$, тогда при любых $x, y \in R$

$$[D(x), x](xyx + yx^2) + \{[D(x), y] + [D(y), x)]\}x^3 = 0. \tag{13}$$

Вычитая (13) из (12), при любых $x, y \in R$ приходим к соотношению

$$[g(y), x]D(x)x^2 = 0.$$

Используя сюръективность $g$ и подставляя $g(y) = z$, получаем при всех $x, z \in R$ соотношение

$$[z, x]D(x)x^2 = 0. \tag{14}$$

Рассмотрим внутреннее дифференцирование, определенное при данном $x \notin C(R)$ формулой $y \to [y, x]$. Из соотношений (14) и леммы 1 из [4], выводим, что $D(x)x^2 = 0$ при любом $x \in R$. Таким образом, $R$ представляется объединением центра $C(R)$ и множества $T = \{x \in R : D(x)x^2 = 0\}$.

Если $D \neq 0$, то по лемме 1 $R \neq T$ и $R \neq C(R)$ в силу некоммутативности $R$. Поэтому найдутся элементы $x, y \in R$, для которых $x \notin C(R)$ и $y \notin T$, значит, $x \in T$ и $y \in C(R)$.

Замечаем, что $D(y)y^2 \neq 0$ и $\lambda y \in C(R)$ для любого $\lambda \in Z$. Рассматриваем элемент $x + \lambda y \in R$ и выводим $x + \lambda y \in T$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 = D(x + \lambda y) + (x + \lambda y)^2 &= \lambda\{D(x)(xy + yx) + D(y)x^2\} \\ &+ \lambda^2\{D(x)y^2 + D(y)(xy + yx)\} + \lambda^3\{D(y)y^2\}, \quad \lambda \in Z. \end{aligned}$$

Поскольку $R$ без 3!-кручения, аналогичными рассуждениями получаем $D(y)y^2 = 0$. Это противоречит выбору $y$ с условием $D(y)y^2 \neq 0$. Заключаем, что $D = 0$. Равенство (5) превращается в тождество $x^2G(x) = 0$ при любых $x \in R$, значит, $x^n[G(x), x] = 0$ при $x \in R$.

Аналогичными рассуждениями выводим $G = 0$. Это завершает доказательство. □

Из теоремы 1 вытекает

**Следствие 1.** *Пусть $R$ — некоммутативное первичное кольцо без 6-кручения, а $D$ — $g$-дифференцирование $R$, в котором $g : R \to R$ — сюръективный эндоморфизм. Тогда если при любых $x \in R$ выполнено $[D(x), x^2] = 0$, то $D = 0$.*

Доказательство теоремы 2. Предположим, что при любых $x, z \in R$ справедливо условие

$$[D(x)x^2 - x^2G(x), z] = 0. \tag{15}$$

Подставив $x + ny$ вместо $x$, где $n \in Z$, в (15), выводим, что

$$nP_1(x, y) + n^2P_2(x, y) = 0, \quad n \in Z,\ x, y, z \in R, \tag{16}$$

здесь

$$P_1(x, y) = [D(x)(xy + yx) + D(y)x^2 - (xy + yx)G(x) - x^2G(y), z],$$
$$P_2(x, y) = [D(y)(xy + yx) + D(x)y^2 - (xy + yx)G(y) - y^2G(x), z].$$

По теореме об интерполяции (см также [4, лемма 1]) заключаем, что $P_1(x, y) = 0$ при всех $x, y \in R$. Отсюда

$$D(x)(xy + yx) + D(y)x^2 - (xy + yx)G(x) - x^2G(y) \in C(R). \tag{17}$$

Вначале предположим, что найдется ненулевой элемент $c$ в $C(R)$, для которого $g(c) \in C(R)$. Выберем $y = c$ в (17) и при любом $x \in R$ выводим, что

$$c(2D(x)x - 2xG(x)) + D(c)x^2 - x^2G(c) \in C(R). \tag{18}$$

Полагаем $y = c^2$ в (17). Тогда при любых $x \in R$

$$c^2(2D(x)x - 2xG(x)) + cD(c)x^2 + g(c)D(c)x^2 - cx^2G(c) - x^2g(c)G(c) \in C(R). \tag{19}$$

По [5, теорема 1] и [4, теорема 4] $D = G = 0$. Умножаем (18) слева на $c$ и при любом $x \in R$ получаем

$$c^2(2D(x)x - 2xG(x) + cD(c)x^2 - cx^2G(c) \in C(R). \tag{20}$$

Вычитая (20) из (19), приходим к соотношению $g(c)[D(c)x^2 - x^2G(c)] \in C(R)$ при любых $x \in R$.

Поскольку элемент $g(c) \in C(R)$ ненулевой, а $R$ — первичное кольцо, при $x \in R$ заключаем, что

$$D(c)x^2 - x^2G(c) \in C(R). \tag{21}$$

По (12) и (15) получаем $c(2D(x)x - 2xG(x) \in C(R)$ при $x \in R$. Также $2(D(x)x - xG(x)) \in C(R)$ при $x \in R$

Поскольку кольцо $R$ не имеет 3!-кручения, имеем $D(x)x - xG(x) \in C(R)$. Продолжая рассуждения, при $x \in R$ выводим, что

$$D(x) - G(x) \in C(R). \tag{22}$$

По [4, теорема 4] при всех $x \in R$ имеем

$$D(x) - G(x) = 0. \tag{23}$$

Таким образом, если $C(R) \neq \{0\}$, то из предположений и (23) следует, что $[D(x), x^2] \in C(R)$ при любых $x \in R$. Тогда $D(x)x^2 - x^2G(x) = 0$ при любых $x \in R$.

По теореме 1 $D = G = 0$.

В случае $C(R) = \{0\}$ будет $D = G = 0$ по [5, теорема 1] и [4, теорема 4]. Это завершает доказательство теоремы. □

Если выбрать дифференцирования $D, G$ равными, то получаем

**Следствие 2.** *Пусть $R$ — некоммутативное первичное кольцо без 6-кручения а $D$ — $g$-дифференцирование $R$, в котором эндоморфизм $g : R \to R$ сюръективен. Тогда если $[D(x), x^2] \in C(R)$ при любых $x \in R$, то $D = 0$.*

### ЛИТЕРАТУРА


1. *Bergen J.* Derivations in prime rings // Canad. Math. Bull. 1983. V. 26. P. 267–270.
2. *Chang I.-S., Jun K. W., Jung Y.-S.* On derivations in Banach algebras // Bull. Korean Math. Soc. 2002. V. 39, N 4. P. 635–643.
3. *Bell H. E., Deng Q.* On ring endomorphisms with centralizing conditions // Chinese J. Math. 1995. V. 23, N 1. P. 67–68.
4. *Chang J.-C.* On semi-derivations on prime rings // Chinese J. Math. 1984. V. 12. P. 255–262.
5. *Deng Q., Bell H. E.* On derivations and commutativity in semi prime rings // Comm. Algebra. 1995. V. 23, N 10. P. 3705–3713.


*Статья поступила 17 февраля 2005 г.*

*Alev Firat (Алев Фират)*
*Ege University, Science Faculty Mathematics Department, Bornova Izmir/TURKEY*
firat@sci.ege.edu.tr