Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2006. Том 47, № 1

УДК 517.958

КАРЛЕМАНОВСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В. Г. Романов

Аннотация: В пространстве переменных $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ рассматривается линейное гиперболическое уравнение второго порядка с коэффициентами, зависящими лишь от x. Для области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, проекция которой на пространство переменной x является компактной областью Ω, рассматривается вопрос о построении оценки устойчивости решения задачи Коши с данными на боковой границе S области D. Известный метод получения такой оценки основан на карлемановских оценках с весовой функцией экспоненциального типа $\exp(2\tau\varphi(x,t))$, построение которой для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами встречает определенные трудности. Показано, что для области D, симметричной относительно плоскости $t=0$, в качестве функции $\varphi(x,t)$ может быть взята $\varphi(x,t) = s^2(x,x^0) - pt^2$, в которой $s(x,x^0)$ — расстояние между точками x и x^0 в римановой метрике, индуцированной дифференциальным уравнением, p — некоторое положительное число, меньшее единицы, а фиксированная точка x^0 может либо принадлежать области Ω, либо быть вне ее. Относительно метрики предполагается, что секционные кривизны соответствующего риманова пространства ограничены сверху некоторым числом $k_0 \geq 0$. Для случая пространства неположительной кривизны параметр p может быть взят сколь угодно близким к 1, в этом случае оценки устойчивости приводят в предельном случае $p \to 1$ к теореме единственности, точно описывающей область продолжения решения через поверхность S. Для пространства ограниченной положительной кривизны построение карлемановской оценки оказывается возможным лишь при выполнении некоторого условия малости произведения k_0 и $\sup\limits_{x\in\Omega} s^2(x,x^0)$.

Ключевые слова: карлемановские оценки, задача Коши, устойчивость, единственность.

§ 1. Введение

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{tt} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} = F(x,t), \quad x = (x_1,\dots,x_n), \quad (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}, \tag{1.1}$$

в котором коэффициенты $a_{ij} = a_{ji}$ удовлетворяют условию

$$\mu_0 \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \mu_{00} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2, \quad 0 < \mu_0 \leq \mu_{00} < \infty, \tag{1.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00171) и программы Рособразования «Университеты России» (код проекта УР 04.01.200).

с некоторыми постоянными μ_0, μ_{00}. Пусть $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — цилиндрическая область с образующими, параллельными оси t, симметричная относительно плоскости $t = 0$, и ее проекция на пространство x является компактной областью $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, имеющей кусочно гладкую границу $\partial\Omega$ класса $\mathbf{C}^1$. Боковую границу области D обозначим через S. Рассмотрим задачу: пусть решение уравнения (1.1) удовлетворяют на S условиям Коши

$$u|_S = f(x,t), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = g(x,t), \quad (x,t) \in S, \tag{1.3}$$

найти оценку устойчивости этого решения внутри D. Естественно, что для получения оценки во всей области D необходимо наложить определенные условия на ее верхнюю и нижнюю границы. Это будет сделано ниже.

Начиная с работы Карлемана [1], при исследовании вопросов устойчивости решения задачи (1.1), (1.3) и единственности его продолжения через поверхность S используется метод априорных оценок с весовой функцией $\exp(2\tau\varphi(x,t))$, содержащей большой положительный параметр τ. *Карлемановской оценкой* решения уравнения (1.1) называется оценка вида

$$\int\limits_{D_0} e^{2\tau\varphi(x,t)}\tau\big(u_t^2 + |\nabla u|^2 + \tau^2 u^2\big)\,dxdt \le C\Bigg(\int\limits_{D_0} e^{2\tau\varphi(x,t)}(Lu)^2\,dxdt \\ + \int\limits_{\partial D_0} e^{2\tau\varphi(x,t)}\tau\big(u_t^2 + |\nabla u|^2 + \tau^2 u^2\big)\,dS\Bigg) \tag{1.4}$$

для всех достаточно больших τ и $u \in \mathbf{H}^2(D_0)$, в которой $D_0 = \{(x,t) \mid x \in \Omega,\ \varphi(x,t) \ge \varphi_0\}$, ∂D_0 — граница D_0, а φ_0 — некоторая положительная постоянная. При этом семейство поверхностей уровня $\varphi(x,t) = \mathrm{const}$ должно быть псевдовыпукло в области D_0 относительно дифференциального оператора L. Мы не будем приводить здесь определение псевдовыпуклости, отсылая читателя к работам Л. Хёрмандера [2, 3], так как в дальнейшем это понятие в статье не используется. Современное состояние теории карлемановских оценок отражено в обзорной статье В. Исакова [4] и книге М. В. Клибанова, А. Тимонова [5]. В случае, когда оператор L совпадает с волновым: $Lu = u_{tt} - \Delta u$, в качестве функции $\varphi(x,t)$ может быть взята $\varphi(x,t) = |x - x^0|^2 - pt^2$, $p \in (0,1)$, где x^0 — некоторая фиксированная точка из $\mathbb{R}^n$ (см. [6, 7]). Если коэффициенты a_{ij} не являются постоянными, то карлемановские оценки построены в предположении существования функции $\varphi(x,t)$, поверхности уровня которой псевдовыпуклы в области D_0 (см. [4, 5] и библиографию в них). Псевдовыпуклость легко проверяется лишь для случая, когда коэффициенты $a_{ij}(x)$ достаточно близки в норме $\mathbf{C}^1$ к постоянным. В статьях [8, 9] условие псевдовыпуклости заменено предположением существования некоторой положительной функции $d(x)$, гессиан которой, вычисленный с учетом римановой метрики, ассоциированной с оператором L, равномерно положителен в Ω. При этом функция φ имеет вид $\varphi(x,t) = d(x) - pt^2$. Заметим, что условие положительной определенности гессиана функции $d(x)$ в области $\overline{\Omega}$ совпадает с условиями теоремы 8.4.2 в книге Л. Хёрмандера [2] на функцию $\varphi(x,t)$, если $p \in (0,1)$.

Основной результат настоящей работы состоит фактически в доказательстве того, что в качестве $d(x)$ может быть взята (при определенных условиях на кривизну риманова пространства) функция $s^2(x,x^0)$, представляющая собой квадрат риманова расстояния от некоторой фиксированной точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$ до точки $x \in \Omega$, и выяснении связи гессиана этой функции с секционными кривизнами риманова пространства. Таким образом, для оператора L, определяемого формулой (1.1), функция $\varphi(x,t) = s^2(x,x^0) - pt^2$ является естественным аналогом функции $\varphi(x,t) = |x - x^0|^2 - pt^2$, используемой в карлемановских оценках для волнового оператора.

Сформулируем один из результатов этой статьи. Пусть $G = (g_{ij}) = A^{-1}$ — матрица, обратная к симметрической матрице $A = (a_{ij})$. Определим риманову метрику формулой $ds^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, dx_i dx_j$, в которой ds — элемент длины. Пусть x^0 — произвольная фиксированная точка в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что ее можно соединить единственной геодезической $\Gamma(x,x^0)$ с любой точкой $x \in \overline{\Omega}$. Обозначим через $s(x,x^0)$ риманову длину этой геодезической и через $\Sigma(x^0,\Omega)$ — замыкание множества точек, принадлежащих всевозможным геодезическим $\Gamma(x,x^0)$, когда x пробегает область Ω. Пусть Σ_0 — любая открытая область, содержащая множество $\Sigma(x^0,\Omega)$.

Теорема 1.1. *Пусть $a_{ij}(x) \in \mathbf{C}^4(\Sigma_0)$, секционные кривизны не превосходят некоторого неотрицательного числа k_0 и выполнено условие*

$$m_0 \equiv 1 - \frac{k_0}{3}\mu_{00}^2 \sup_{x\in\Omega} s^2(x,x^0) > 0, \tag{1.5}$$

в котором μ_{00} — постоянная из условия (1.2). *Тогда для всех достаточно больших τ и $p \in (0,m_0)$ имеет место оценка* (1.4) *с функцией $\varphi(x,t) = s^2(x,x^0) - pt^2$.*

Теорема 1.1 является следствием основной теоремы 3.1, установленной в § 3. Условие (1.5) служит достаточным условием выполнения более тонкого и поэтому более трудно проверяемого условия (3.33), в котором участвуют усредненные вдоль $\Gamma(x,x^0)$ секционные кривизны. Для случая метрики неположительной кривизны $k_0 = 0$ и $m_0 = 1$. При этом параметр p может быть взят сколь угодно близким к 1.

Как видно из условия (1.5), оно зависит от точки x^0, выбор которой может диктоваться дополнительными соображениями. В связи с этим заметим, что область D_0 в оценке (1.4) также зависит от выбора x^0. Оптимальное условие (1.5) реализуется, если точка $x^0 \in \mathbb{R}^n$ выбрана так, что область Ω содержится внутри шара $B(x^0,\rho)$ радиусом $\rho = \inf\limits_{x^0\in\mathbb{R}^n} \sup\limits_{x\in\Omega} s(x,x^0)$ с центром в x^0.

Несколько слов о структуре статьи. В § 2 приводится элементарное доказательство основного дифференциального неравенства, аналогичного полученному ранее в работе [9]. Это доказательство отличается от приведенного в [9] и, как кажется автору, более прозрачно. В § 3 устанавливается связь гессиана функции $s^2(x,x^0)$ с секционными кривизнами риманова пространства и формулируется основная теорема. В § 4 дается доказательство теоремы 1.1, а в § 5 приводятся оценка условной устойчивости решения задачи (1.1), (1.3) и теорема единственности его продолжения с поверхности S.

§ 2. Основное неравенство

Введем функцию $v(x,t)$ равенством $u(x,t) = v(x,t)\exp(-\tau\varphi(x,t))$ и предположим, что u и φ являются дважды дифференцируемыми функциями. Тогда справедливы равенства

$$u_t = e^{-\tau\varphi}(v_t - \tau v\varphi_t),\ u_{x_i} = e^{-\tau\varphi}(v_{x_i} - \tau v\varphi_{x_i}),\ Lu = e^{-\tau\varphi}\left(Lv + \frac{1}{2}\tau lv + qv\right), \tag{2.1}$$

в которых дифференциальный оператор первого порядка l и функция q определены формулами

$$lv = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_{x_i} + \beta v_t + \gamma v, \quad \alpha_i = 4\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varphi_{x_j}, \quad \beta = -4\varphi_t, \tag{2.2}$$

$$q = \tau^2\left(\varphi_t^2 - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}\right) - \frac{1}{2}\tau(2L\varphi + \gamma), \tag{2.3}$$

содержащими некоторую гладкую функцию $\gamma = \gamma(x,t)$. Имеют место соотношения

$$e^{2\tau\varphi}(Lu)^2 \geq 2\tau e^{\tau\varphi}(lv)(Lu) - \tau^2(lv)^2 = 2\tau(lv)(Lv + qv). \tag{2.4}$$

С другой стороны, последнее выражение можно записать в виде

$$2\tau(lv)(Lv + qv) \equiv \frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div} Q + R, \quad Q = (Q_1, \dots, Q_n) \tag{2.5}$$

с некоторыми P, Q и R, представляющими собой квадратичные формы от v, v_t, v_{x_i}, $i = 1, \dots, n$, с коэффициентами, зависящими от x, t. В результате вычисления P, Q и R приходим к следующей лемме, устанавливающей основное неравенство, аналогичное неравенству (3.11) работы [9].

Лемма 2.1. *Пусть $u(x,t)$ и $\gamma(x,t)$ являются дважды, а $\varphi(x,t)$ трижды дифференцируемыми функциями. Тогда справедливо неравенство*

$$e^{2\tau\varphi}(Lu)^2 \geq \frac{\partial P}{\partial t} + \operatorname{div} Q + R, \tag{2.6}$$

в котором

$$P = \tau\left[2v_t(\nabla v \cdot \alpha) + \beta\left(v_t^2 + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} v_{x_j} v_{x_i}\right) + 2\gamma v v_t + (q\beta - \gamma_t)v^2\right], \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} Q_k = \tau\Bigg[&-\alpha_k v_t^2 - \sum_{i,j=1}^{n} v_{x_j} v_{x_i}(2\alpha_j a_{ik} - \alpha_k a_{ij}) \\ &- 2(\beta v_t + \gamma v)\sum_{i=1}^{n} a_{ik} v_{x_i} + v^2\left(\sum_{i=1}^{n} \gamma_{x_i} a_{ik} + q\alpha_k\right)\Bigg], \quad k = 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} R = \tau\Bigg\{&v_t^2(\operatorname{div}\alpha - \beta_t - 2\gamma) \\ &+ \sum_{i,j,k=1}^{n} v_{x_j} v_{x_i}\left[a_{ik}\frac{\partial \alpha_j}{\partial x_k} + a_{jk}\frac{\partial \alpha_i}{\partial x_k} - \alpha_k \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + a_{ij}(2\gamma - \beta_t - \operatorname{div}\alpha)\delta_{jk}\right] \\ &+ 2v_t\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\beta_{x_j} v_{x_i} - \nabla v \cdot \alpha_t\right) + v^2[L\gamma + 2q\gamma - (q\beta)_t - \operatorname{div}(q\alpha)]\Bigg\} \end{aligned} \tag{2.9}$$

и $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n)$, $\operatorname{div}\alpha = \partial\alpha_1/\partial x_1 + \dots + \partial\alpha_n/\partial x_n$.

Доказательство. Чтобы получить конкретные выражения для P, Q и R, достаточно воспользоваться следующими легко проверяемыми равенствами:

$$2(\alpha\cdot\nabla v)Lv = \frac{\partial}{\partial t}(2v_t\nabla v\cdot\alpha) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}\big(\alpha_k v_t^2\big) - \sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}[(2\alpha_j a_{ik}-\alpha_k a_{ij})v_{x_j}v_{x_i}] - 2v_t(\nabla v\cdot\alpha_t) + v_t^2\operatorname{div}\alpha + \sum_{i,j,k=1}^{n} v_{x_j}v_{x_i}\left[2a_{ik}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_k}(\alpha_k a_{ij})\right], \quad (2.10)$$

$$2(\beta v_t)Lv = \frac{\partial}{\partial t}\left[\beta\left(v_t^2+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}v_{x_j}v_{x_i}\right)\right] - 2\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(\beta a_{ik}v_t v_{x_i}) - \left(v_t^2+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}v_{x_j}v_{x_i}\right)\beta_t + 2v_t\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\beta_{x_j}v_{x_i}, \quad (2.11)$$

$$2(\gamma v)Lv = \frac{\partial}{\partial t}(2\gamma v v_t - \gamma_t v^2) - \sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_k}(2\gamma a_{ik}vv_{x_i} - \gamma_{x_i}a_{ik}v^2) + 2\gamma\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}v_{x_i}v_{x_j} - v_t^2\right) + v^2L\gamma, \quad (2.12)$$

$$2(lv)qv = \frac{\partial}{\partial t}(q\beta v^2) + \operatorname{div}(q\alpha v^2) + v^2[2q\gamma - (q\beta)_t - \operatorname{div}(q\alpha)]. \quad (2.13)$$

Суммируя эти равенства и умножая обе части получившегося равенства на τ, приходим к формулам (2.7)–(2.9). $\square$

Введем обозначения

$$R = v_t^2R_{00} + \sum_{i,j,k=1}^{n}v_{x_j}v_{x_i}R_{ij} + 2v_t\sum_{i,j=1}^{n}v_{x_i}R_i + v^2R_0, \quad (2.14)$$

$$R_{00} = \tau(\operatorname{div}\alpha - \beta_t - 2\gamma), \quad (2.15)$$

$$R_{ij} = \tau\left(\sum_{k=1}^{n}\left[a_{ik}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_k} + a_{jk}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_k} - \alpha_k\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + a_{ij}(2\gamma-\beta_t-\operatorname{div}\alpha)\delta_{jk}\right]\right), \quad (2.16)$$

$$R_i = \tau\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\beta_{x_j} - (\alpha_i)_t\right), \quad (2.17)$$

$$R_0 = \tau[L\gamma + 2q\gamma - (q\beta)_t - \operatorname{div}(q\alpha)]. \quad (2.18)$$

Пусть $G=(g_{ij})=A^{-1}$ — матрица, обратная к A. Для римановой метрики, элемент длины ds которой определяется формулой $ds^2=\sum\limits_{i,j=1}^{n}g_{ij}(x)\,dx_idx_j$, обозначим через Γ_{ij}^l связности,

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n}a_{lp}\left(\frac{\partial g_{jp}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ip}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_p}\right), \quad i,j,l=1,\dots,n,$$

и через $H(\varphi)=(h_{ij}(\varphi))$ — матрицу Гесса, элементы которой задаются формулой

$$h_{ij}(\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j} - \sum_{l=1}^{n}\Gamma_{ij}^l\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}, \quad i,j=1,\dots,n.$$

Лемма 2.2. *Имеет место равенство*

$$R_{ij} = \tau\big(8AH(\varphi)A + (2\gamma - \beta_t - \operatorname{div}\alpha)A\big)_{ij}. \tag{2.19}$$

Доказательство. Преобразуем выражение

$$R'_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\left(a_{ik}\frac{\partial\alpha_j}{\partial x_k} + a_{jk}\frac{\partial\alpha_i}{\partial x_k} - \alpha_k\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\right), \tag{2.20}$$

входящее в R_{ij}. Воспользуемся для этого формулами (2.2) для компонент вектора α и выразим производные элементов матрицы A через производные элементов матрицы G. Имеем

$$AG = I, \quad A_{x_k} = -AG_{x_k}A, \quad (a_{ij})_{x_k} = -\sum_{l,m=1}^{n} a_{il}a_{mj}(g_{lm})_{x_k}. \tag{2.21}$$

Тогда

$$\begin{aligned} R'_{ij} &= 4\tau\sum_{s,k=1}^{n}(a_{ik}(a_{sj}\varphi_{x_s})_{x_k} + a_{jk}(a_{si}\varphi_{x_s})_{x_k} - (a_{ij})_{x_k}a_{sk}\varphi_{x_s}) \\ &= 4\tau\sum_{s,k=1}^{n}((a_{ik}a_{sj} + a_{jk}a_{si})\varphi_{x_s x_k} + [a_{ik}(a_{sj})_{x_k} + a_{jk}(a_{si})_{x_k} - (a_{ij})_{x_k}a_{sk}]\varphi_{x_s}) \\ &= 4\tau\sum_{k,s,l,m=1}^{n} a_{ik}a_{sj}(2\varphi_{x_s x_k}\delta_{kl}\delta_{sm} - \varphi_{x_m}a_{ml}[(g_{sl})_{x_k} + (g_{kl})_{x_s} - (g_{sk})_{x_l}]) \\ &= 8\tau\sum_{k,s=1}^{n} a_{ik}a_{sj}h_{ks}(\varphi) = 8\tau(AH(\varphi)A)_{ij}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Отсюда следует равенство (2.19). □

Дальнейшие оценки квадратичной формы R связаны с конкретным выбором функций $\varphi(x,t)$ и $\gamma(x,t)$.

§ 3. Основные результаты

Пусть x^0 — произвольная точка в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что ее можно соединить единственной геодезической $\Gamma(x,x^0)$ с любой точкой $x \in \overline{\Omega}$. Обозначим через $s(x,x^0)$ риманову длину этой геодезической, через $\Sigma(x^0,\Omega)$ — замыкание множества точек, принадлежащих всевозможным геодезическим $\Gamma(x,x^0)$, когда x пробегает область Ω, а через Σ_0 — любую открытую область, содержащую в себе множество $\Sigma(x^0,\Omega)$. Пусть $a_{ij} \in \mathbf{C}^4(\Sigma_0)$. Тогда $s^2(x,x^0) \in \mathbf{C}^4(\Sigma_0)$. Известно, что функция $s(x,x^0)$ является решением уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}s_{x_i}s_{x_j} = 1 \tag{3.1}$$

при условии, что $s(x,x^0) = O(|x-x^0|)$, когда $|x-x^0| \to 0$.

Определим функции $\varphi(x,t)$ и $\gamma(x,t)$ равенствами

$$\varphi(x,t) = s^2(x,x^0) - pt^2, \quad 2\gamma = \operatorname{div}\alpha - 8m = 4\left(\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}\varphi_{x_j})_{x_i} - 2m\right), \tag{3.2}$$

в которых p и m — постоянные, удовлетворяющие условиям $0 < p < m \le 1$. Постоянная m определена ниже формулой (3.33), а постоянная $p \in (0, m)$ остается произвольной. Заметим, что гладкость коэффициентов $a_{ij}(x)$ определяется выбором функции $\gamma(x,t)$ в виде (3.3) и, вероятно, может быть ослаблена при другом ее подборе. При сделанном выборе $q = 4\tau^2(p^2t^2 - s^2(x,x^0)) + 2\tau(m+p)$,

$$R_i = 0,\ i = 1,\dots,n, \quad R_{00} = 8\tau(m-p) \tag{3.3}$$

и R_0 допускает оценку

$$\begin{aligned} R_0 = \tau[L\gamma + 2q(\gamma + 2L\varphi) - \beta q_t - \alpha\cdot\nabla q] \\ = \tau[L\gamma - 8q(m+p) + 64\tau^2(s^2(x,x^0) - p^3t^2)] \\ = \tau\{32\tau^2[(m+p)(s^2(x,x^0) - p^2t^2) + 2(s^2(x,x^0) - p^3t^2)] + L\gamma - 16\tau(m+p)^2\} \\ = \tau\{32\tau^2[(2+m+p)\varphi + p(1-p)(2+m+3p)t^2] + L\gamma - 16\tau(m+p)^2\} \\ \ge 64\tau^3\varphi_0 + \tau(L\gamma - 16\tau(m+p)^2) \end{aligned} \tag{3.4}$$

в области $\varphi(x,t) \ge \varphi_0 > 0$.

Для R_{ij} получаем равенство

$$R_{ij} = 8\tau(AH(\varphi)A - (m+p)A)_{ij}. \tag{3.5}$$

При этом $H(\varphi) = H(s^2(x,x^0))$, так как $H(\varphi)$ выражается только через производные от φ по переменным x_i, $i = 1,\dots,n$. По соображениям удобства записи мы сохраним за этой матрицей прежнее обозначение $H(\varphi)$, хотя она и не зависит от переменной t. Займемся вопросом о положительной определенности матрицы $H(\varphi)$ в области Ω. Конечно, нельзя ожидать, что для произвольных гладких коэффициентов a_{ij} матрица $H(s^2(x,x^0))$ будет обладать этим свойством.

Рассмотрим в качестве примера случай изотропной сферически-симметричной среды, когда коэффициенты a_{ij} задаются равенствами $a_{ij} = c^2(r)\delta_{ij}$, $i,j = 1,\dots,n$, в которых $r = |x|$, δ_{ij} — символ Кронекера, а $c(r)$ — непрерывно-дифференцируемая положительная функция, имеющая физический смысл скорости распространения возмущений. Положим $x^0 = 0$. Тогда

$$s(x,x^0) \equiv s(r) = \int_0^r [c(z)]^{-1}\,dz,$$

а коэффициенты связности Γ_{ij}^l и вторые производные функции $s^2(x,x_0)$ вычисляются по формулам

$$\Gamma_{ij}^l = -[rc(r)]^{-1}c'(r)(x_j\delta_{il} + x_i\delta_{jl} - x_l\delta_{ij}),$$
$$\frac{\partial^2 s^2(r)}{\partial x_i\partial x_j} = \frac{2x_ix_j}{[rc(r)]^2} + 2s(r)\left(\frac{\delta_{ij}}{rc(r)} - \frac{x_ix_j(rc(r))'}{r[rc(r)]^2}\right).$$

Нетрудно найти, что элементы матрицы $H(\varphi)$ определяются равенствами

$$h_{ij}(\varphi) = \frac{2x_ix_j}{[rc(r)]^2} + q'(r)\frac{2s(r)}{r^3}(r^2\delta_{ij} - x_ix_j), \quad i,j = 1,\dots,n,$$

в которых $q(r) = r/c(r)$ и через $q'(r) = 1/c(r) - rc'(r)/c^2(r)$ обозначена производная функции $q(r)$ по ее аргументу. Гессиан, отвечающий матрице $H(\varphi)$ и ненулевому вектору $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$, находится по формуле

$$\sum_{i,j=1}^n h_{ij}(\varphi)\xi_i\xi_j = \frac{2(x\cdot\xi)^2}{[rc(r)]^2} + q'(r)\frac{2s(r)}{r^3}(r^2|\xi|^2 - (x\cdot\xi)^2), \quad i,j = 1,\dots,n,$$

в которой через $x \cdot \xi$ обозначено скалярное произведение соответствующих векторов.

Очевидно, что гессиан положителен для всех ненулевых векторов ξ в области Ω тогда и только тогда, когда $q'(r) > 0$ в Ω. В связи с этим заметим, что $q'(r) > 0$ в окрестности начала координат, так как $q'(0) = 1/c(0) > 0$ и функция $q'(r)$ непрерывна. Следовательно, функция $q(r)$ монотонно возрастает по крайней мере для малых значений r. Если же она в целом не является монотонной, то существуют точки, в которых ее производная $q'(r)$ обращается в нуль. Обозначим в этом случае через r_0 наименьший нуль функции $q'(r)$. Тогда матрица $H(\varphi)$ равномерно положительно определена в любой компактной области Ω, лежащей строго внутри шара радиусом r_0 с центром в начале координат, и не является равномерно положительно определенной в Ω, если Ω содержит какой-либо кусок сферы $r = r_0$. Связано это обстоятельство с тем, что геодезические линии, касающиеся сферы $S(r_0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r = r_0\}$, лежат на ней целиком и являются дугами ее больших сечений. При этом точки геодезической оказываются на одинаковом расстоянии от начала координат, в связи с чем величина $s^2(x, x^0)$ постоянна на геодезической. Так как гессиан функции $s^2(x, x^0)$, вычисленный на векторе ξ, направленном в точке $x \in S(r_0)$ по касательной к геодезической, лежащей на сфере, пропорционален второму дифференциалу этой функции, суженной на соответствующую геодезическую, то он равен нулю.

Приведенное выше объяснение на частном примере имеет глубокую геометрическую аналогию и в общем случае. А именно, если в какой-либо точке $x \in \Omega$ риманова сфера $s(x, x^0) = \mathrm{const}$ имеет второй порядок касания с какой-либо геодезической, то матрица $H(s^2(x, x^0))$ заведомо не является положительно определенной в этой точке. Заметим, что переход к другой точке x^0 может кардинально изменить ситуацию.

Нашей целью является установление достаточных условий положительной определенности матрицы $H(\varphi)$ в области Ω. Для этого преобразуем вначале выражение (3.5) к другому виду. Введем уравнение геодезических линий (бихарактеристик уравнения (3.1)), выходящих из точки x^0, как решение задачи Коши

$$\begin{gathered}\frac{dx_k}{ds} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} y_j, \quad \frac{dy_k}{ds} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} y_j y_j, \quad k = 1, \dots, n, \\ x|_{s=0} = x^0, \quad y|_{s=0} = \xi\end{gathered} \tag{3.6}$$

для векторов $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, нормированных условием $\xi G(x^0) \xi^* = 1$. Здесь и далее символ $*$, написанный вверху, означает транспонирование вектора или матрицы. В силу сделанного выше предположения каждой точке $x \in \Omega$ соответствует единственный вектор $\xi = \xi(x)$. Отметим еще, что переменная $y = (y_1, \dots, y_n)$ в системе (3.6) связана с функцией $s(x, x^0)$ равенством $y = \nabla s(x, x^0)$, а ее значение при $s = 0$, как это видно из первого уравнения (3.6), определяет направление касательной к геодезической $\Gamma(x, x^0)$ в точке x^0.

Введем римановы координаты $(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = \zeta$ точки x относительно точки x^0. Как известно [10], они определяются равенствами

$$\zeta = s(x, x^0)\zeta^0, \quad \zeta^0 = \frac{dx}{ds}\bigg|_{s=0} = \xi(x) A(x^0).$$

При этом геодезической $\Gamma(x, x^0)$ соответствует отрезок прямой $\zeta = s\zeta^0$, $s \in [0, s(x, x^0)]$. Между точками $x \in \Omega$ и векторами ζ существует взаимно однозначное дифференцируемое соответствие $x = x(\zeta)$, $\zeta = \zeta(x)$, причем для матрицы Якоби $(\partial\zeta/\partial x)$ существует обратная $(\partial x/\partial\zeta)$. Риманова длина вычисляется через римановы координаты по формуле

$$s^2(x, x^0) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x^0)\zeta_i\zeta_j.$$

Обозначим через $\widehat{\Omega}$ образ области Ω при отображении $\zeta = \zeta(x)$. В дальнейшем $\zeta \in \widehat{\Omega}$. Определим симметрические матрицы $\widehat{A}$, $\widehat{G}$ и T равенствами

$$\widehat{A}(x) = (\hat{a}_{ij}) = \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) A(x) \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^*, \tag{3.7}$$

$$\widehat{G}(\zeta) = (\hat{g}_{ij}) = \widehat{A}^{-1}(x(\zeta)) = \left(\frac{\partial x}{\partial\zeta}\right)^* G(x(\zeta)) \left(\frac{\partial x}{\partial\zeta}\right), \tag{3.8}$$

$$T(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \widehat{G}_{\zeta_k}(\zeta). \tag{3.9}$$

Лемма 3.1. *Пусть $a_{ij} \in \mathbf{C}^4(\Sigma_0)$. Тогда имеет место равенство*

$$H(\varphi) = 2G(x) + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^* T(\zeta(x)) \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^* (2\widehat{G}(\zeta(x)) + T(\zeta(x)) \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right). \tag{3.10}$$

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму $\sum\limits_{i,j=1}^{n} R'_{ij} v_{x_i} v_{x_j}$ и перейдем в ней от переменных $x_1, \ldots, x_n$ к переменным $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Тогда получим

$$\sum_{i,j=1}^{n} R'_{ij} v_{x_i} v_{x_j} = \sum_{l,m=1}^{n} R''_{lm} v_{\zeta_l} v_{\zeta_m}, \quad R''_{lm} = \sum_{i,j=1}^{n} R'_{ij} (\zeta_l)_{x_i} (\zeta_m)_{x_j}, \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} R''_{lm} &= 4\tau \sum_{i,j,p,q=1}^{n} (2a_{iq}(a_{pj}\varphi_{x_p})_{x_q} - (a_{ij})_{x_q} a_{pq}\varphi_{x_p})(\zeta_l)_{x_i}(\zeta_m)_{x_j} \\ &= 4\tau \sum_{i,j,p,q=1}^{n} (2a_{iq}(\zeta_l)_{x_i}[a_{pj}(\zeta_m)_{x_j}\varphi_{x_p}]_{x_q} - [a_{ij}(\zeta_l)_{x_i}(\zeta_m)_{x_j}]_{x_q} a_{pq}\varphi_{x_p} \\ &- 2a_{iq}(\zeta_l)_{x_i}(\zeta_m)_{x_j x_q} a_{pj}\varphi_{x_p} + a_{ij}[(\zeta_l)_{x_i x_q}(\zeta_m)_{x_j} + (\zeta_l)_{x_i}(\zeta_m)_{x_j x_q}] a_{pq}\varphi_{x_p}). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Воспользуемся формулами

$$\sum_{p,j=1}^{n} a_{pj}(\zeta_m)_{x_j}\varphi_{x_p} = 2s \sum_{p,j=1}^{n} a_{pj} s_{x_p}(\zeta_m)_{x_j} = 2s\frac{d\zeta_m}{ds} = 2\zeta_m, \tag{3.13}$$

$$\sum_{i,j,p,q=1}^{n} a_{iq}(\zeta_l)_{x_i}(\zeta_m)_{x_j x_q} a_{pj}\varphi_{x_p} = \sum_{i,j,p,q=1}^{n} a_{ij}(\zeta_l)_{x_i}(\zeta_m)_{x_j x_q} a_{pq}\varphi_{x_p}, \tag{3.14}$$

в которых $s = s(x, x^0)$. Формула (3.13) является следствием первого из равенств (3.6), определяющих уравнение геодезической, и соотношений $s_{x_p} = y_p$,

$p = 1, \dots, n$, вдоль нее, которые мы уже отмечали выше, (3.14) получается заменой местами индексов суммирования j и q. С помощью этих формул равенство (3.12) преобразуется к виду

$$R''_{lm} = 4\tau\Biggl\{4\sum_{i,q=1}^{n} a_{iq}(\zeta_l)_{x_i}(\zeta_m)_{x_q} - 2s\sum_{p,q=1}^{n}\Biggl(\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\zeta_l)_{x_i}(\zeta_m)_{x_j}\Biggr)_{x_q} a_{pq}s_{x_p}$$
$$- \sum_{i,j,p,q=1}^{n}([(\zeta_l)_{x_i}(\zeta_m)_{x_j x_q} - (\zeta_l)_{x_i x_q}(\zeta_m)_{x_j}]a_{ij}a_{pq}\varphi_{x_p})\Biggr\}. \quad (3.15)$$

Левая часть этого равенства и первые два слагаемых в его правой части симметричны по индексам l, m, а последнее слагаемое антисимметрично по ним, поэтому оно равно нулю. Замечая, что согласно принятым выше обозначениям имеют место равенства

$$\sum_{i,q=1}^{n} a_{iq}(\zeta_l)_{x_i}(\zeta_m)_{x_q} = \hat{a}_{lm}, \qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\zeta_l)_{x_i}(\zeta_m)_{x_j} = \hat{a}_{lm}$$

и второе слагаемое в (3.15) представляет собой полную производную по s вдоль $\Gamma(x, x^0)$, находим, что

$$R''_{lm} = 8\tau[2\hat{a}_{lm} - s(\hat{a}_{lm})_s]. \quad (3.16)$$

Следовательно,

$$\sum_{i,j=1}^{n} R'_{ij}v_{x_i}v_{x_j} = 8\tau(\nabla_\zeta v)(2\widehat{A} - s\widehat{A}_s)(\nabla_\zeta v)^*$$
$$= 8\tau(\nabla_x v)\biggl(\frac{\partial x}{\partial\zeta}\biggr)(2\widehat{A} - s\widehat{A}_s)\biggl(\frac{\partial x}{\partial\zeta}\biggr)^*(\nabla_x v)^*$$
$$= 8\tau(\nabla_x v)\biggl(2A - s\biggl(\frac{\partial x}{\partial\zeta}\biggr)\widehat{A}_s\biggl(\frac{\partial x}{\partial\zeta}\biggr)^*\biggr)(\nabla_x v)^*. \quad (3.17)$$

Выразим производную по s матрицы $\widehat{A}$ через производную обратной матрицы $\widehat{A}^{-1} = \widehat{G}$. Проводя вычисления, находим, что

$$\widehat{A}\widehat{G} = I, \quad \widehat{A}_s\widehat{G} + \widehat{A}\widehat{G}_s = 0, \quad -\widehat{A}_s = \widehat{A}\widehat{G}_s\widehat{A},$$
$$-s\widehat{A}_s = \widehat{A}\Biggl(\sum_{k=1}^{n}\zeta_k\widehat{G}_{\zeta_k}\Biggr)\widehat{A} = \widehat{A}T\widehat{A}.$$

Поэтому

$$\sum_{i,j=1}^{n} R'_{ij}v_{x_i}v_{x_j} = 8\tau(\nabla_x v)\biggl(2A + \biggl(\frac{\partial x}{\partial\zeta}\biggr)\hat{A}T\widehat{A}\biggl(\frac{\partial x}{\partial\zeta}\biggr)^*\biggr)(\nabla_x v)^*$$
$$= 8\tau(\nabla_x v)\biggl(2A + A\biggl(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\biggr)^* T\biggl(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\biggr)A\biggr)(\nabla_x v)^*$$
$$= 8\tau(\nabla_x v)A\biggl(2G + \biggl(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\biggr)^* T\biggl(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\biggr)\biggr)A(\nabla_x v)^*. \quad (3.18)$$

Сравнивая это равенство с полученным ранее соотношением (2.22), устанавливаем искомое равенство (3.10). $\square$

Лемма 3.2. *Для матрицы T справедливо равенство*

$$\zeta T(\zeta) = 0. \tag{3.19}$$

Доказательство. Воспользуемся известным свойством (см. [10, с. 566]) метрического тензора, записанного в римановых координатах:

$$\zeta \widehat{G}(\zeta) = \zeta \widehat{G}(0), \quad \sum_{k=1}^{n} \hat{g}_{ik}(\zeta)\zeta_k = \sum_{k=1}^{n} \hat{g}_{ik}(0)\zeta_k. \tag{3.20}$$

Дифференцируя последнее соотношение по переменной ζ_p, получаем равенство

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \hat{g}_{ik}}{\partial \zeta_p}\zeta_k + \hat{g}_{ip}(\zeta) = \hat{g}_{ip}(0).$$

Умножая его на ζ_p и суммируя по p, находим, что

$$\sum_{p,k=1}^{n} \frac{\partial \hat{g}_{ik}}{\partial \zeta_p}\zeta_p\zeta_k + \sum_{p=1}^{n} \hat{g}_{ip}(\zeta)\zeta_p = \sum_{p=1}^{n} \hat{g}_{ip}(0)\zeta_p.$$

В силу (3.20) и определения (3.9) отсюда получаем искомое равенство (3.19). □

Пусть η — произвольный единичный вектор, ортогональный вектору ζ: $|\eta| = 1$, $\eta \cdot \zeta = 0$. Введем обозначение

$$\psi(\zeta, \eta) = -|\zeta|^2 K(\zeta, \eta) + \frac{1}{4}\eta T(\zeta)\widehat{A}(x(\zeta))T(\zeta)\eta^*, \tag{3.21}$$

в котором $K(\zeta, \eta)$ — секционная кривизна, отвечающая двумерной плоскости, натянутой на векторы ζ и η. Заметим, что последнее слагаемое формулы (3.21) неотрицательно.

Лемма 3.3. *Для матрицы T справедливо равенство*

$$\kappa(\zeta, \eta) \equiv \eta T(\zeta)\eta^* = 2\int_0^1 \psi(z\zeta, \eta)\, dz. \tag{3.22}$$

Доказательство. Пусть

$$\hat{s}(\zeta) = s(x(\zeta), x^0) = \left(\sum_{i,j=1}^{n} \hat{g}_{ij}(0)\zeta_i\zeta_j\right)^{1/2}, \quad \zeta = \hat{s}(\zeta)\zeta^0. \tag{3.23}$$

Напомним, что вектор ζ^0 постоянен вдоль $\Gamma(x, x^0)$. С учетом этого факта получаем равенство

$$\begin{aligned}
\kappa(\zeta, \eta) &= \frac{1}{\hat{s}(\zeta)} \int_0^{\hat{s}(\zeta)} \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{d}{ds}\left\{\left[s^2 \frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial \zeta_k}\zeta_k^0\eta_i\eta_j\right]_{\zeta=s\zeta^0}\right\} ds \\
&= \frac{1}{\hat{s}(\zeta)} \int_0^{\hat{s}(\zeta)} \sum_{i,j,k=1}^{n} \left[\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 \hat{g}_{ij}}{\partial \zeta_k \partial \zeta_l}\zeta_k\zeta_l\eta_i\eta_j + 2\frac{\partial \hat{g}_{ij}}{\partial \zeta_k}\zeta_k\eta_i\eta_j\right]_{\zeta=s\zeta^0} ds.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Выразим подынтегральную функцию через $\psi(\zeta,\eta)$. Воспользуемся следующим свойством метрики, записанной в римановых координатах (см. [10, с. 563]):

$$\sum_{k,j=1}^{n} \widehat{\Gamma}^{l}_{jk}(\zeta)\zeta_k\zeta_j = 0.$$

Здесь $\widehat{\Gamma}^{p}_{kj}$ — связности, вычисленные для метрики, определяемой тензором $\hat{g}_{ij}(\zeta)$. Используя это свойство, представим формулу для секционной кривизны $K(\zeta,\eta)$ в виде

$$2|\zeta|^2K(\zeta,\eta) = 2\sum_{i,j,k,l=1}^{n} R_{kilj}\zeta_k\zeta_l\eta_i\eta_j = 2\sum_{p,q,i,j,k,l=1}^{n} \hat{g}_{pq}\widehat{\Gamma}^{p}_{kj}\widehat{\Gamma}^{q}_{il}\zeta_k\zeta_l\eta_i\eta_j$$
$$+\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\hat{g}_{kj}}{\partial\zeta_i\partial\zeta_l} - \frac{\partial^2\hat{g}_{kl}}{\partial\zeta_i\partial\zeta_j} - \frac{\partial^2\hat{g}_{ij}}{\partial\zeta_k\partial\zeta_l} + \frac{\partial^2\hat{g}_{il}}{\partial\zeta_k\partial\zeta_j}\right]\zeta_k\zeta_l\eta_i\eta_j. \quad (3.25)$$

В этой формуле R_{kilj} — компоненты тензора кривизны риманова пространства, определяемого метрикой $d\hat{s}^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \hat{g}_{ij}(\zeta)\,d\zeta_i d\zeta_j$. Преобразуем выражения, стоящие внутри квадратных скобок, используя следующие элементарные равенства:

$$\frac{\partial^2\hat{g}_{kj}}{\partial\zeta_i\partial\zeta_l}\zeta_k\zeta_l = \frac{\partial}{\partial\zeta_i}\left[\frac{\partial\hat{g}_{kj}}{\partial\zeta_l}\zeta_k\zeta_l\right] - \frac{\partial\hat{g}_{kj}}{\partial\zeta_l}(\zeta_k\delta_{il}+\zeta_l\delta_{ik}),$$

$$\frac{\partial^2\hat{g}_{il}}{\partial\zeta_k\partial\zeta_j}\zeta_k\zeta_l = \frac{\partial}{\partial\zeta_j}\left[\frac{\partial\hat{g}_{il}}{\partial\zeta_k}\zeta_k\zeta_l\right] - \frac{\partial\hat{g}_{il}}{\partial\zeta_k}(\zeta_k\delta_{jl}+\zeta_l\delta_{jk}),$$

$$-\frac{\partial^2\hat{g}_{kl}}{\partial\zeta_i\partial\zeta_j}\zeta_k\zeta_l = -\zeta_l\frac{\partial^2}{\partial\zeta_i\partial\zeta_j}[\hat{g}_{kl}\zeta_k] + \frac{\partial\hat{g}_{kl}}{\partial\zeta_i}\zeta_l\delta_{jk} + \frac{\partial\hat{g}_{kl}}{\partial\zeta_j}\zeta_l\delta_{ik}.$$

Так как справедливы соотношения

$$\sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial\hat{g}_{kj}}{\partial\zeta_l}\zeta_k\zeta_l = 0, \quad \sum_{k,l=1}^{n}\frac{\partial\hat{g}_{il}}{\partial\zeta_k}\zeta_k\zeta_l = 0, \quad \sum_{k=1}^{n}\hat{g}_{kl}(\zeta)\zeta_k = \sum_{k=1}^{n}\hat{g}_{kl}(0)\zeta_k,$$

отсюда находим, что

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\frac{\partial^2\hat{g}_{kj}}{\partial\zeta_i\partial\zeta_l}\zeta_k\zeta_l\eta_i\eta_j = -\sum_{i,j,l=1}^{n}\left[\frac{\partial\hat{g}_{jl}}{\partial\zeta_i} + \frac{\partial\hat{g}_{ij}}{\partial\zeta_l}\right]\zeta_l\eta_i\eta_j,$$

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\frac{\partial^2\hat{g}_{il}}{\partial\zeta_k\partial\zeta_j}\zeta_k\zeta_l\eta_i\eta_j = -\sum_{i,j,l=1}^{n}\left[\frac{\partial\hat{g}_{ij}}{\partial\zeta_l} + \frac{\partial\hat{g}_{jl}}{\partial\zeta_i}\right]\zeta_l\eta_i\eta_j,$$

$$-\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\frac{\partial^2\hat{g}_{kl}}{\partial\zeta_i\partial\zeta_j}\zeta_k\zeta_l\eta_i\eta_j = 2\sum_{i,j,l=1}^{n}\frac{\partial\hat{g}_{jl}}{\partial\zeta_i}\zeta_l\eta_i\eta_j.$$

Поэтому

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\left[\frac{\partial^2\hat{g}_{kj}}{\partial\zeta_i\partial\zeta_l} + \frac{\partial^2\hat{g}_{il}}{\partial\zeta_k\partial\zeta_j} - \frac{\partial^2\hat{g}_{kl}}{\partial\zeta_i\partial\zeta_j}\right]\zeta_k\zeta_l\eta_i\eta_j = -2\sum_{i,j,l=1}^{n}\frac{\partial\hat{g}_{ij}}{\partial\zeta_l}\zeta_l\eta_i\eta_j.$$

Тогда из формулы (3.25) вытекает равенство

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\frac{\partial^2\hat g_{ij}}{\partial\zeta_k\partial\zeta_l}\zeta_k\zeta_l\eta_i\eta_j+2\sum_{i,j,l=1}^{n}\frac{\partial\hat g_{ij}}{\partial\zeta_l}\zeta_l\eta_i\eta_j=2\biggl(-|\zeta|^2K(\zeta,\eta)+\sum_{p,q=1}^{n}\hat g_{pq}\chi_p\chi_q\biggr),\tag{3.26}$$

в котором $\chi_p=\sum\limits_{k,j=1}^{n}\Gamma_{kj}^{p}\zeta_k\eta_j$, $p=1,\dots,n$. Преобразуем последнее слагаемое, стоящее в правой части этого равенства. Дифференцируя соотношения

$$\sum_{k=1}^{n}\hat g_{lk}(\zeta)\zeta_k=\sum_{k=1}^{n}\hat g_{lk}(0)\zeta_k,$$

получаем, что верны равенства

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\hat g_{lk}}{\partial\zeta_j}\zeta_k=\hat g_{lj}(0)-\hat g_{lj}(\zeta),\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\hat g_{kj}}{\partial\zeta_l}\zeta_k=\hat g_{lj}(0)-\hat g_{lj}(\zeta).$$

Поэтому

$$\chi_p=\sum_{j,k=1}^{n}\widehat\Gamma_{kj}^{p}\zeta_k\eta_j=\frac12\sum_{j,k,l=1}^{n}\hat a_{lp}\biggl(\frac{\partial\hat g_{lk}}{\partial\zeta_j}+\frac{\partial\hat g_{lj}}{\partial\zeta_k}-\frac{\partial\hat g_{kj}}{\partial\zeta_l}\biggr)\zeta_k\eta_j$$
$$=\frac12\sum_{j,k,l=1}^{n}\hat a_{lp}\frac{\partial\hat g_{lj}}{\partial\zeta_k}\zeta_k\eta_j=\frac12(\eta T(\zeta)\widehat A)_p.$$

Используя эту формулу, в результате находим, что

$$\sum_{p,q=1}^{n}\hat g_{pq}\chi_p\chi_q=\frac14\eta T(\zeta)\widehat A(x(\zeta))T(\zeta)\eta^*.$$

В связи с этим равенство (3.26) приводится к такому:

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{n}\frac{\partial^2\hat g_{ij}}{\partial\zeta_k\partial\zeta_l}\zeta_k\zeta_l\eta_i\eta_j+2\sum_{i,j,l=1}^{n}\frac{\partial\hat g_{ij}}{\partial\zeta_l}\zeta_l\eta_i\eta_j=2\psi(\zeta,\eta).$$

Следовательно, формулу (3.24) можно записать в виде

$$\kappa(\zeta,\eta)=\frac{2}{\hat s(\zeta)}\int_0^{\hat s(\zeta)}\psi(s\zeta^0,\eta)\,ds.\tag{3.27}$$

Выполняя в интеграле замену переменной $s=\hat s(\zeta)z$ и используя равенство $\hat s(\zeta)\zeta^0=\zeta$, приходим к формуле (3.22). $\square$

Введем множества

$$\mathscr N=\{(x,\xi)\mid x\in\Omega,\ \xi G(x)\xi^*=1\},\quad \mathscr M=\{(\zeta,\eta)\mid\zeta\in\widehat\Omega,\ |\eta|=1,\ \eta\cdot\zeta=0\},$$
$$\mathscr M'=\{(\zeta,\eta,\mu)\mid(\zeta,\eta)\in\mathscr M,-\mu_*(\zeta,\eta)\le\mu\le\mu_*(\zeta,\eta)\}$$

и при фиксированных $(\zeta,\eta)\in\mathscr M$ определим $\mu_*(\zeta,\eta)$ формулами

$$\mu_*(\zeta,\eta)=\frac{\sqrt a}{\sqrt{ac-b^2}},\quad a=\zeta\widehat G(\zeta)\zeta^*,\quad b=\zeta\widehat G(\zeta)\eta^*,\quad c=\eta\widehat G(\zeta)\eta^*.\tag{3.28}$$

Лемма 3.4. *Для матрицы Гесса $H(\varphi)$ справедлива формула*

$$\inf_{(x,\xi)\in\mathscr{N}}(\xi H(\varphi)\xi^*) = 2 - 2\sup_{(\zeta,\eta)\in\mathscr{M}}\big[\mu_*^2(\zeta,\eta)\kappa^+(\zeta,\eta)\big], \tag{3.29}$$

в которой функция $\kappa^+(\zeta,\eta)$ определена равенством

$$\kappa^+(\zeta,\eta) = \max\left[0, -\int_0^1 \psi(z\zeta,\eta)\,dz\right], \tag{3.30}$$

а функция $\psi(\zeta,\eta)$ — формулой (3.21).

Доказательство. Обозначим $\hat{\xi} = \xi(\partial\zeta/\partial x)^*$. Очевидно, что $\hat{\xi}$ удовлетворяет условию $\hat{\xi}\widehat{G}(\zeta)\hat{\xi}^* = 1$, если $(x,\xi)\in\mathscr{N}$. При этом в силу равенства (3.10)

$$\xi H(\varphi)\xi^* = 2 + \hat{\xi}T(\zeta)\hat{\xi}^*. \tag{3.31}$$

Представим вектор $\hat{\xi}$ в виде

$$\hat{\xi} = \lambda\zeta + \mu\eta. \tag{3.32}$$

Из условия $\hat{\xi}\widehat{G}(\zeta)\hat{\xi}^* = 1$ вытекает, что при фиксированных ζ, η точка плоскости, определяемая координатами λ, μ, пробегает эллипс:

$$a\lambda^2 + 2b\lambda\mu + c\mu^2 = 1, \quad a = \zeta\widehat{G}(\zeta)\zeta^*, \quad b = \zeta\widehat{G}(\zeta)\eta^*, \quad c = \eta\widehat{G}(\zeta)\eta^*.$$

Переменная μ изменяется при этом на отрезке $[-\mu_*(\zeta,\eta),\mu_*(\zeta,\eta)]$, причем значение $\mu_*(\zeta,\eta)$ вычисляется по формуле (3.28). Заметим, что прямые $\mu = \pm\mu_*(\zeta,\eta)$ на плоскости переменных λ, μ являются касательными к эллипсу. Именно это обстоятельство и определяет величину $\mu_*(\zeta,\eta)$. Используя представление (3.32) и свойство (3.19), находим, что

$$\hat{\xi}T(\zeta)\hat{\xi}^* = \mu^2\eta T(\zeta)\eta^* = \mu^2\kappa(\zeta,\eta).$$

Из этой формулы и равенства (3.31) следует выполнение соотношений

$$\inf_{(x,\xi)\in\mathscr{N}}(\xi H(\varphi)\xi^*) = 2 + \inf_{(\zeta,\eta,\mu)\in\mathscr{M}'}[\mu^2\kappa(\zeta,\eta)] = 2 - 2\sup_{(\zeta,\eta)\in\mathscr{M}}\big[\mu_*^2(\zeta,\eta)\kappa^+(\zeta,\eta)\big],$$

которые завершают доказательство леммы. □

Практически следствием установленных выше лемм является основная

Теорема 3.1. *Пусть $a_{ij}(x)\in\mathbf{C}^4(\Sigma_0)$ и выполнено условие*

$$m \equiv 1 - \sup_{(\zeta,\eta)\in\mathscr{M}}\big[\mu_*^2(\zeta,\eta)\kappa^+(\zeta,\eta)\big] > 0, \tag{3.33}$$

в котором $\mu_*^2(\zeta,\eta)$ и $\kappa^+(\zeta,\eta)$ определены формулами (3.28) и (3.30) соответственно. Пусть $\varphi(x,t) = s^2(x,x^0) - pt^2$ и φ_0 — некоторая положительная постоянная. Тогда в области $D_0 = \{(x,t)\in\Omega\times\mathbb{R} \mid \varphi(x,t)\ge\varphi_0\}$ для всех достаточно больших τ и $p < m$ справедливо неравенство (2.6) и для P, Q и R имеют место оценки

$$|P| \le C_1 e^{2\tau\varphi}\tau\big(u_t^2 + |\nabla u|^2 + \tau^2u^2\big), \quad |Q| \le C_1 e^{2\tau\varphi}\tau\big(u_t^2 + |\nabla u|^2 + \tau^2u^2\big), \tag{3.34}$$

$$R \ge C_2 e^{2\tau\varphi}\tau\big(u_t^2 + |\nabla u|^2 + \tau^2u^2\big) \tag{3.35}$$

с некоторыми положительными постоянными C_1 *и* C_2*, зависящими от* m, p, φ_0, μ_0 *и* $\mathbf{C}^4(\Sigma_0)$*-нормы коэффициентов матрицы* A.

Доказательство. Из равенства (3.29) и условия (3.33) следует, что

$$\xi(H(\varphi)-2mG(x))\xi^* = \xi H(\varphi)\xi^* - 2m \\ = \xi H(\varphi)\xi^* - \inf_{(x,\xi)\in\mathscr{N}}(\xi H(\varphi)\xi^*) \geq 0 \quad \forall (x,\xi)\in\mathscr{N}.$$

Это означает, что

$$H(\varphi)-2mG(x)\geq 0, \quad x\in\Omega. \tag{3.36}$$

Тогда из равенства (3.5) и условия (1.2) вытекают оценки

$$\sum_{i,j=1}^{n} R_{ij}v_{x_i}v_{x_j} \geq 8(m-p)\tau(\nabla v)A(x)(\nabla v)^* \geq 8(m-p)\mu_0\tau|\nabla v|^2. \tag{3.37}$$

С учетом ранее полученных соотношений (3.3), (3.4) заключаем, что существуют положительные постоянные τ_0 и C_0, C_2, зависящие от m, p, φ_0, μ_0 и $\mathbf{C}^4(\Sigma_0)$-нормы коэффициентов матрицы A, такие, что при всех $\tau>\tau_0$ в области D_0 справедлива оценка

$$R \geq C_0\tau\big(v_t^2+|\nabla v|^2+\tau^2v^2\big) \geq C_2e^{2\tau\varphi}\tau\big(u_t^2+|\nabla u|^2+\tau^2u^2\big). \tag{3.38}$$

Из формул (2.1), (2.7), (2.8) для всех достаточно больших τ следуют оценки выражений P и Q, входящих в формулу (2.5), вида

$$|P| \leq C_1e^{2\tau\varphi}\tau\big(u_t^2+|\nabla u|^2+\tau^2u^2\big), \quad |Q| \leq C_1e^{2\tau\varphi}\tau\big(u_t^2+|\nabla u|^2+\tau^2u^2\big) \tag{3.39}$$

с некоторой постоянной $C_1>0$. □

Следствием теоремы 3.1 является теорема о справедливости для оператора L карлемановской оценки.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 3.1 *и решение уравнения* (1.1) $u(x,t)$ *принадлежит* $\mathbf{H}^2(D_0)$*. Тогда для всех достаточно больших* τ *и* $p<m$ *имеет место оценка* (1.4).

Доказательство проводится по стандартной схеме. Интегрируя равенство (2.5) по области D_0, используя формулу Гаусса — Остроградского и неравенства (2.6), (3.34), (3.35), приходим к оценке вида (1.4). □

§ 4. Доказательство теоремы 1.1

Установим вначале справедливость следующей леммы.

Лемма 4.1. *Имеют место оценки*

$$\mu_*^2(\zeta,\eta) \leq \frac{1}{\lambda_1(\zeta)} \leq \mu_{00}, \tag{4.1}$$

в которых $\lambda_1(\zeta)$ *— минимальное собственное число матрицы* $\widehat{G}(\zeta)$*, а постоянная* μ_{00} *определена формулой* (1.2).

Доказательство. Фиксируем ζ и рассмотрим преобразование, осуществляемое ортогональной матрицей $U(\zeta)$ и приводящее $\widehat{G}(\zeta)$ к диагональному виду:

$$\widehat{G} = U\Lambda U^{-1}, \quad U^{-1}U = I, \quad (U^{-1})^* = U,$$

$$\Lambda(\zeta) = \mathrm{diag}(\lambda_1(\zeta), \dots, \lambda_n(\zeta)), \quad \lambda_1(\zeta) \le \lambda_2(\zeta) \le \dots \le \lambda_n(\zeta).$$

Пусть $\alpha = \zeta U/|\zeta|$, $\beta = \eta U$. Тогда $\alpha \cdot \beta = 0$, $|\alpha| = 1$, $|\beta| = 1$. Представим векторы α и β в виде

$$\alpha = e^{(1)} \cos\theta + e^{(2)} \sin\theta, \quad \beta = -e^{(1)} \sin\theta + e^{(2)} \cos\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

в котором $e^{(1)} \cdot e^{(2)} = 0$ и, кроме того,

$$e^{(1)} = (1, 0, \dots, 0), \quad e^{(2)} = (0, e_{22}, \dots, e_{2n}), \quad e_{22}^2 + \dots + e_{2n}^2 = 1.$$

Тогда

$$\mu_*^2(\zeta, \eta) = \frac{\alpha\Lambda(\zeta)\alpha^*}{(\alpha\Lambda(\zeta)\alpha^*)(\beta\Lambda(\zeta)\beta^*) - (\alpha\Lambda(\zeta)\beta^*)^2}.$$

Обозначим

$$\hat{a} = e^{(1)}\Lambda(\zeta)(e^{(1)})^*, \quad \hat{c} = e^{(2)}\Lambda(\zeta)(e^{(2)})^*.$$

При нашем выборе векторов $e^{(1)}$ и $e^{(2)}$ справедливы соотношения

$$e^{(1)}\Lambda(\zeta)(e^{(2)})^* = 0, \quad \hat{a} = \lambda_1, \quad \hat{c} = \lambda_2 e_{22}^2 + \dots + \lambda_n e_{2n}^2 \ge \lambda_2 \ge \lambda_1.$$

С учетом сделанных обозначений находим

$$\alpha\Lambda(\zeta)\alpha^* = \hat{a}\cos^2\theta + \hat{c}\sin^2\theta,$$

$$\begin{aligned}\alpha\Lambda(\zeta)\alpha^*\beta\Lambda(\zeta)\beta^* - (\alpha\Lambda(\zeta)\beta^*)^2 = (\hat{a}\cos^2\theta + \hat{c}\sin^2\theta)(\hat{a}\sin^2\theta + \hat{c}\cos^2\theta) \\ - (\hat{c} - \hat{a})^2 \sin^2\theta\cos^2\theta = \hat{a}\hat{c}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$\mu_*^2(\zeta, \eta) \le \sup_{0 \le \theta \le 2\pi} \left[\frac{\cos^2\theta}{\hat{c}} + \frac{\sin^2\theta}{\hat{a}}\right] \le \frac{1}{\lambda_1(\zeta)}.$$

С другой стороны, минимальное собственное число $\lambda_1(\zeta)$ матрицы $\widehat{G}(\zeta)$ является также минимальным собственным числом матрицы $G(x)$ в соответствующей точке $x = x(\zeta)$, а $\lambda_1^{-1}(\zeta)$ совпадает с максимальным собственным числом матрицы $A(x)$ в точке $x = x(\zeta)$. Последнее в силу условия (1.2) не превосходит числа μ_{00}. $\square$

Замечание. Из леммы 4.1 следует, что для числа m верна следующая оценка снизу:

$$m \ge 1 - \mu_{00} \sup_{(\zeta,\eta) \in \mathscr{M}} \kappa^+(\zeta, \eta).$$

Поэтому выполнение неравенства

$$1 - \mu_{00} \sup_{(\zeta,\eta) \in \mathscr{M}} \kappa^+(\zeta, \eta) > 0 \tag{4.2}$$

гарантирует выполнение условия (3.33).

Перейдем к доказательству теоремы 1.1. Пусть $K(\zeta, \eta) \le k_0$, $k_0 \ge 0$. Тогда из формул (3.21), (3.22) следует оценка

$$\kappa^+(\zeta, \eta) \le k_0|\zeta|^2 \int_0^1 z^2\, dz = \frac{k_0}{3}|\zeta|^2.$$

Из формул (3.33), (4.1) находим, что

$$m \geq 1 - \frac{k_0}{3} \sup_{(\zeta,\eta)\in\mathscr{M}} \bigl[|\zeta|^2 \mu_*^2(\zeta,\eta)\bigr] \geq 1 - \frac{k_0}{3} \sup_{\zeta\in\widehat{\Omega}} (|\zeta|^2 \lambda^{-1}(\zeta)).$$

В то же время из соотношений

$$\hat{s}^2(\zeta) = \zeta \widehat{G}(\zeta)\zeta^* \geq |\zeta|^2 \lambda_1(\zeta)$$

оценивается величина $|\zeta|^2$. В результате получаем оценку

$$m \geq 1 - \frac{k_0}{3} \sup_{\zeta\in\widehat{\Omega}} \bigl(\hat{s}^2(\zeta)\lambda_1^{-2}(\zeta)\bigr) \geq 1 - \frac{k_0}{3}\mu_{00}^2 \sup_{x\in\Omega} s^2(x,x^0) \equiv m_0 > 0, \tag{4.3}$$

в которой число m_0 определено формулой (1.5). Из неравенств (1.5) и (4.3) следует выполнение условия (3.33). Таким образом, при выполнении условий теоремы 1.1 условия теоремы 3.1 оказываются также выполнены. Следовательно, теорема 1.1 верна. □

§ 5. Оценки условной устойчивости решения задачи Коши

Содержание этого параграфа связано с хорошо известной техникой вывода оценок решения задачи (1.1), (1.3) из карлемановской оценки (1.4) (см. более подробно изложение, например, в работах [4–7]) и приводится здесь лишь для удобства читателя.

Обозначим

$$\sup_{x\in\Omega} s^2(x,x^0) = \varphi_*.$$

Тогда $\varphi(x,t) \leq \varphi_*$ в области D_0 при любом $p \in (0,m)$. Для любого числа $\varepsilon \in (\varphi_0,\varphi_*)$ обозначим $D_\varepsilon = \{(x,t) \mid x\in\Omega, \varphi(x,t) \geq \varepsilon\}$. Очевидно, что множество D_ε непусто.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1, $u(x,t) \in \mathbf{H}^2(D_0)$ *и, кроме того, существует положительная постоянная* M *такая, что решение* $u(x,t)$ *задачи* (1.1), (1.3) *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\Sigma(\varphi_0)} (u^2 + u_t^2 + |\nabla u|^2)\, dS \leq M^2, \tag{5.1}$$

в котором $\Sigma(\varphi_0) = \{(x,t) \mid x\in\Omega, \varphi(x,t) = \varphi_0\}$, dS *— элемент площади и* φ_0 *— некоторое положительное число. Тогда найдется положительное число* C *такое, что для любого* $\varepsilon \in (\varphi_0,\varphi_*)$ *и любого* $\gamma \in (0, (\varepsilon-\varphi_0)/(\varphi_*-\varphi_0))$ *справедлива оценка*

$$\|u\|_{\mathbf{H}^1(D_\varepsilon)} \leq C M^{1-\gamma}\delta^\gamma, \tag{5.2}$$

в которой

$$\delta = \bigl(\|F\|^2_{\mathbf{L}^2(D_0)} + \|f\|^2_{\mathbf{H}^1(S_0)} + \|g\|^2_{\mathbf{L}^2(S_0)}\bigr)^{1/2}$$

и $S_0 = \{(x,t) \mid x\in\partial\Omega, \varphi(x,t) \geq \varphi_0\}$.

Доказательство. Воспользуемся оценкой (1.4) и заменим в ее левой части область интегрирования D_0 на суженную область D_ε. Тогда получим неравенство

$$\int\limits_{D_\varepsilon} e^{2\tau\varphi(x,t)}\tau\bigl(u_t^2 + |\nabla u|^2 + \tau^2 u^2\bigr)\, dxdt \leq C\biggl(\int\limits_{D_0} e^{2\tau\varphi(x,t)} F^2(x,t)\, dxdt$$
$$+ \int\limits_{\partial D_0} e^{2\tau\varphi(x,t)}\tau\bigl(u_t^2 + |\nabla u|^2 + \tau^2 u^2\bigr)\, dS\biggr), \tag{5.3}$$

справедливое при всех достаточно больших τ, пусть для определенности при $\tau \geq \tau_0 \geq 1$. Интеграл по ∂D_0 распадается на две части: по множеству $\Sigma(\varphi_0)$, где функция $\varphi(x,t)$ постоянна, а функция $u(x,t)$ удовлетворяет условию (5.1), и по множеству S_0, на котором заданы данные Коши (1.2). Из неравенства (5.3) при $\tau \geq \tau_0$ следует оценка

$$e^{2\tau\varepsilon}\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(D_\varepsilon)} \leq C\tau^2(\delta^2 e^{2\tau\varphi_*} + M^2 e^{2\tau\varphi_0}), \tag{5.4}$$

из которой находим, что

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(D_\varepsilon)} \leq C\tau^2(\delta^2 e^{2\tau(\varphi_* - \varepsilon)} + M^2 e^{2\tau(\varphi_0 - \varepsilon)}). \tag{5.5}$$

Пусть числа τ_* и γ_* определены формулами

$$\tau_* = \frac{1}{\varphi_* - \varphi_0}\ln\frac{M}{\delta}, \quad \gamma_* = \frac{\varepsilon - \varphi_0}{\varphi_* - \varphi_0}.$$

Для достаточно малых δ (а именно для них и представляет интерес неравенство (5.2)) $\tau_* \geq \tau_0$. В этом случае неравенство (5.5) эквивалентно следующему:

$$\|u\|_{\mathbf{H}^1(D_\varepsilon)} \leq \sqrt{2C}\tau_* M\left(\frac{M}{\delta}\right)^{-\gamma_*}. \tag{5.6}$$

Заменяя в этом неравенстве γ_* на $\gamma \in (0,\gamma_*)$ и используя, что $\rho^{(\gamma-\gamma_*)}\ln\rho \to 0$ при $\rho \to \infty$, приходим к неравенству (5.2) с некоторой новой постоянной C. $\square$

В качестве следствия из доказанной теоремы вытекает теорема единственности решения задачи Коши (1.1), (1.3).

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1 *и решение* $u(x,t)$ *задачи Коши* (1.1), (1.3) *с данными на*

$$S = \{(x,t) \mid x \in \partial\Omega,\ s^2(x,x^0) - mt^2 \geq 0\}$$

ограничено вместе с частными производными первого порядка в области

$$K_m = \{(x,t) \mid x \in \Omega,\ s^2(x,x^0) - mt^2 \geq 0\},$$

где постоянная m *определена формулой* (3.33). *Тогда задача* (1.1), (1.3) *имеет в области* K_m *не более одного решения.*

Доказательство. Рассмотрим однородную задачу Коши, положив $F = 0$, $f = 0$, $g = 0$. В этом случае из оценки (5.2) в силу произвольности $\varphi_0 > 0$ следует, что $u(x,t) = 0$ в области $K_p = \{(x,t) \mid x \in \Omega,\ s^2(x,x^0) - pt^2 \geq 0\}$ для любого $p \in (0,m)$. Поэтому $u(x,t) = 0$ и в области K_m. Отсюда в силу линейности задачи вытекает справедливость теоремы 5.2. $\square$

Заметим, что при $m = 1$ (это равенство справедливо для пространств неположительной кривизны) теорема 5.2 дает точную область единственности решения задачи Коши. Более общие результаты, связанные с единственностью ее решения, содержатся в работах Татару [11, 12].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Carleman T.* Sur un problème d'unicité pourles systèmes d'équetions aux dérivées partielles à deux variables indépendentes // Ark. Mat. Ser. B. Astr. Fys. 1939. V. 26, N 17. P. 1–9.
2. *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965.

3. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальные операторов с частными производными. М.: Мир, 1988. Т. 4.

4. *Isakov V.* Carleman estimates and their applications // New analytic and geometric methods in inverse problems. Berlin: Springer-Verl., 2004. P. 93–127.

5. *Klibanov M. V., Timonov A.* Carleman estimates for coefficient inverse problems and numerical applications. Utrecht (The Netherlands): VSP, 2004.

6. *Шишатский С. П.* Априорные оценки в задаче о продолжении волнового поля с цилиндрической времениподобной поверхности // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213, № 1. С. 49–50.

7. *Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики. М.: Наука, 1980.

8. *Lasiecka I., Triggiani R., Yao P. F.* Inverse/observability estimates for second order hyperbolic equations with variable coefficient principal part and first-order terms // J. Math. Anal. Appl. 1999. V. 235. P. 13–57.

9. *Triggiani R., Yao P. F.* Carleman estimates with no lower-order terms for general Riemann wave equations. Global uniqueness and observability in one shot // Appl. Math. Optim. 2002. V. 46, N 2/3. P. 334–375.

10. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1964.

11. *Tataru D.* Unique continuation for solutions to PDE's; between Hörmander's theorem and Holmgren's theorem // Comm. Partial Differential Equations. 1995. V. 20, N 5&6. P. 855–884.

12. *Tataru D.* Carleman estimates and unique continuation for solutions to boundary value problems // J. Math. Pure Appl. 1996. V. 75. P. 367–408.

Статья поступила 25 июля 2005 г.

Романов Владимир Гаврилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru