Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2005. Том 46, № 6

УДК 517.983.51

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОР–ФУНКЦИИ ВЫРОЖДЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО–РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ С НЁТЕРОВЫМ ОПЕРАТОРОМ В ГЛАВНОЙ ЧАСТИ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М. В. Фалалеев, Е. Ю. Гражданцева

Аннотация: В продолжение исследований, начатых первым из авторов, строятся фундаментальные оператор-функции некоторых классов вырожденных дифференциальных (как обыкновенных, так и в частных производных) и дифференциально-разностных операторов с нётеровым оператором при старшей (по времени) производной в банаховых пространствах. Для достижения поставленной цели используются техника жордановых наборов нётеровых операторов и элементы теории обобщенных функций в банаховых пространствах.

Ключевые слова: обобщенные функции, нётеров оператор, банахово пространство, фундаментальная оператор-функция, жорданов набор, свертка.

Объектом исследования в работе являются дифференциальные и дифференциально-разностные уравнения с нётеровым оператором в главной части в банаховых пространствах. Редукцию к уравнениям такого типа допускают многочисленные начальные и краевые задачи математической физики, моделирующие реальные динамические процессы фильтрации, термоконвекции, деформации механических систем, электротехники, волновые процессы в электромагнитных анизотропных средах (волны в плазме, волны в ферромагнетиках во внешнем магнитном поле), волновые процессы в проводящих средах без дисперсии, колебания стратифицированной жидкости (модели Корпусова — Плетнера — Свешникова [1], Баренблатт — Желтова — Кочиной [2], Осколкова [3], Хоффа, Долесала [4], Буссинеска [5, 6] и многие другие).

Как хорошо известно [7], такие задачи разрешимы в классе непрерывных функций не при всех начальных данных и правых частях, поэтому естественно возникает проблема построения обобщенных решений, которую в полном объеме удается разрешить с помощью конструкции фундаментальных оператор-функций соответствующих дифференциальных операторов исходных уравнений. В работах [8] и [9] во фредгольмовом случае построены фундаментальные оператор-функции для дифференциальных операторов 1-го и 2-го порядков, некоторых классов дифференциальных операторов N-го порядка (как обыкновенных, так и в частных производных), интегральных и интегродифференциальных 1-го порядка. В настоящей работе полученные в [8] и [9] результаты распространяются на нётеровский случай для дифференциальных операторов

1-го порядка, неполные дифференциальные операторы 2-го и N-го порядков, а также дифференциально-разностные операторы 1-го и N-го порядков.

§ 1. Жордановы наборы нётеровых операторов

В этом параграфе приведены основные сведения о жордановых наборах нётеровых операторов из работы [10], необходимые в дальнейшем при изложении наших результатов.

Пусть A, B — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, $\overline{D(A)} = \overline{D(B)} = E_1$, $D(B) \subset D(A)$, $\dim N(B) = n$, $\dim N(B^*) = m$, φ_i, $i = 1, \dots, n$, — базис в $N(B)$, ψ_j — базис в $N(B^*)$, $\gamma_i \in E_1^*$, $i = 1, \dots, n$, $z_j \in E_2$, $j = 1, \dots, m$, — соответствующие биортогональные системы элементов, т. е. $\langle \varphi_i, \gamma_k \rangle = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \dots, n$, и $\langle z_k, \psi_j \rangle = \delta_{kj}$, $k, j = 1, \dots, m$.

Введем проекторы $\mathscr{P} = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i$ и $\mathscr{Q} = \sum\limits_{j=1}^{m} \langle \cdot, \psi_j \rangle z_j$. Фиксированным базисам $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_j\}$, $\{\gamma_i\}$, $\{z_j\}$ соответствует единственный [11] псевдообратный оператор, однозначно определяемый следующим набором своих свойств:

$$D(B^+) = R(B) \oplus \{z_1, \dots, z_m\}, \quad R(B^+) = N(\mathscr{P}) \cap D(B),$$

$$BB^+ = I - \mathscr{Q} \text{ на } D(B^+), \quad B^+B = I - \mathscr{P} \text{ на } D(B),$$

причем $N(B^+) = \{z_1, \dots, z_m\}$, $BB^+B = B$, $B^+BB^+ = B^+$.

Введем сопряженные проекторы $\mathscr{P}^* = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \varphi_i, \cdot \rangle \gamma_i$ и $\mathscr{Q}^* = \sum\limits_{j=1}^{m} \langle z_j, \cdot \rangle \psi_j$ и соответствующий им псевдообратный оператор B^{*+} так, что

$$D(B^{*+}) = R(B^*) \oplus \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}, \quad R(B^{*+}) = N(\mathscr{Q}^*) \cap D(B^*),$$

$$B^{*+}B^* = I - \mathscr{Q}^* \text{ на } D(B^*), \quad B^*B^{*+} = I - \mathscr{P}^* \text{ на } D(B^{*+}),$$

причем $N(B^{*+}) = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$, $B^*B^{*+}B^* = B^*$, $B^{*+}B^*B^{*+} = B^{*+}$ и $B^{*+} = B^{+*}$.

Далее будем предполагать, что оператор B нормально разрешим, т. е. $\overline{R(B)} = R(B)$. Тогда $D(B^*) \equiv E_2$, $D(B^{*+}) \equiv E_1^*$ и, значит, операторы B^+ и B^{*+} ограничены.

Введем системы элементов

$$\varphi_i^{(j)} = (B^*A)^{j-1} \varphi_i^{(1)}, \quad i = 1, \dots, n, \ j \geq 2, \quad \varphi_i^{(1)} = \varphi_i,$$

и функционалов

$$\psi_i^{(j)} = (B^{*+}A^*)^{j-1} \psi_i^{(1)}, \quad i = 1, \dots, m, \ j \geq 2, \quad \psi_i^{(1)} = \psi_i.$$

В силу свойств операторов B^* и B^{*+} имеем $\varphi_i^{(j)} \in N(\mathscr{P})$ и $\psi_i^{(j)} \in N(\mathscr{Q})$, $j \geq 2$, т. е.

$$\langle \varphi_i^{(j)}, \gamma_k \rangle = 0, \ i, k = 1, \dots, n, \ j \geq 2, \quad \left\langle z_k, \psi_i^{(j)} \right\rangle = 0, \ i, k = 1, \dots, m, \ j \geq 2.$$

Будем предполагать выполненным следующее условие:

(A) элементы $\varphi_i^{(j)}$ удовлетворяют системе уравнений и неравенств вида

$$B\varphi_i^{(j)} = A\varphi_i^{(j-1)}, \quad i = 1, \dots, n, \ j = 2, \dots, p_i,$$

$$B\varphi_i^{(p_i+1)} \neq A\varphi_i^{(p_i)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

причем
$$\operatorname{rang}\big\|\big\langle A\varphi_i^{(p_i)},\psi_k^{(1)}\big\rangle\big\|_{i=1,\dots,n,\,k=1,\dots,m}=\min(n,m)=l.$$

Условие (A) означает, что система элементов $\big\{\varphi_i^{(j)},\ i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,p_i\big\}$ образует полный A-жорданов набор [12].

Если выполнено условие (A), то, как показано в работе [13], системы $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_j\}$, $\{\gamma_i\}$, $\{z_j\}$ можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$\big\langle A\varphi_i^{(j)},\psi_k\big\rangle=\begin{cases}0, & j=1,\dots,p_i-1,\ i=1,\dots,n,\ k=1,\dots,m,\\ \delta_{ik}, & j=p_i,\ i,k=1,\dots,l,\end{cases}$$

$$\big\langle \varphi_i,A^*\psi_k^{(j)}\big\rangle=\begin{cases}0, & j=1,\dots,p_k-1,\ i=1,\dots,n,\ k=1,\dots,m,\\ \delta_{ik}, & j=p_k,\ i,k=1,\dots,l.\end{cases}$$

Поэтому при выполнении условия (A), не ограничивая общности, можно считать, что $z_i=A\varphi_i^{(p_i)}$, $\gamma_i=A^*\psi_k^{(p_k)}$, $i,k=1,\dots,l$. Из условия (A) также следует, что система элементов $\big\{\psi_k^{(j)},\ k=1,\dots,m,\ j=1,\dots,p_k\big\}$ образует полный A^*-жорданов набор. Прямоугольные матрицы $\big\|\big\langle A\varphi_i^{(p_i)},\psi_k^{(1)}\big\rangle\big\|$ и $\big\|\big\langle\varphi_i^{(1)},A^*\psi_k^{(p_k)}\big\rangle\big\|$, $i=1,\dots,n$, $k=1,\dots,m$, при выполнении условия (A) имеют одинаковые ранги l, а значит, обе они эквивалентны прямоугольной матрице с единичным главным ранговым минором l-порядка и нулями на остальных позициях. Приведем соответствующие преобразования базисов $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_j\}$. При $m<n$ матрица $\big\|\big\langle\varphi_i^{(1)},A^*\psi_k^{(p_k)}\big\rangle\big\|$ преобразованием

$$\tilde\varphi_i=\begin{cases}\varphi_i, & i=1,\dots,m,\\ \varphi_i-\sum\limits_{k=1}^{m}\big\langle\varphi_i,A^*\psi_k^{(p_k)}\big\rangle\varphi_k, & i=m+1,\dots,n,\end{cases}$$

приводится к требуемому виду, а при $m>n$ для матрицы $\big\|\big\langle A\varphi_i^{(p_i)},\psi_k^{(1)}\big\rangle\big\|$ искомым преобразованием, очевидно, является

$$\tilde\psi_k=\begin{cases}\psi_k, & k=1,\dots,n,\\ \psi_k-\sum\limits_{i=1}^{n}\big\langle A\varphi_i^{(p_i)},\psi_k\big\rangle\psi_i, & k=n+1,\dots,m.\end{cases}$$

В следующих параграфах при обращении к жордановым наборам будем считать, что такая перестройка базисов уже осуществлена, и будем опускать знак волны.

§ 2. Свертки распределений и обобщенных оператор-функций в банаховых пространствах

Пусть E — банахово пространство, E^* — сопряженное банахово пространство. Отнесем к множеству *основных функций* $K(\mathbb{R}^n;E^*)$ все финитные в $\mathbb{R}^n$ функции класса C^∞ со значениями в E^* и будем обозначать эти функции через $s(\bar x)$, $\bar x\in\mathbb{R}^n$. *Носителем* $\operatorname{supp}s(\bar x)$ основной функции $s(\bar x)$ назовем замыкание в $\mathbb{R}^n$ множества тех точек $\bar x$, для которых $s(\bar x)\neq 0$. Сходимость в $K(\mathbb{R}^n;E^*)$ определяется следующим образом.

Определение. Последовательность функций $s_k(\bar x)\in K(\mathbb{R}^n;E^*)$ *сходится* к функции $s(\bar x)\in K(\mathbb{R}^n;E^*)$, если

а) существует $R>0$ такое, что $\operatorname{supp}s_k(\bar x)\subset U_R$ $\forall k\in\mathbb{N}$, здесь U_R — шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле и радиусом R;

б) $\|D^\alpha s_k(\bar{x}) - D^\alpha s(\bar{x})\| \rightrightarrows 0$ равномерно по $\bar{x}$ при $k \to \infty$ для любого мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.

Обобщенной функцией (*распределением*) бесконечного порядка назовем всякий линейный непрерывный функционал на основном пространстве $K(\mathbb{R}^n; E^*)$. Всякая локально интегрируемая по Бохнеру функция $u(\bar{x})$ со значениями в E порождает по правилу

$$(u(\bar{x}), s(\bar{x})) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \langle u(\bar{x}), s(\bar{x})\rangle d\bar{x} \quad \forall\, s(\bar{x}) \in K(\mathbb{R}^n; E^*)$$

регулярную обобщенную функцию. Все остальные обобщенные функции называются *сингулярными.* Множество обобщенных функций будем обозначать через $K'(\mathbb{R}^n; E)$.

Если $E = E^* = \mathbb{R}^1$, то пространства $K(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^1)$ и $K'(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^1)$, следуя [14], будем обозначать через $D(\mathbb{R}^n)$ и $D'(\mathbb{R}^n)$ соответственно.

Из всего множества обобщенных функций $K'(\mathbb{R}^n; E)$ выделим некоторые специальные классы. Через $K'\big(R^n_+; E\big)$ будем обозначать множество обобщенных функций, носители которых находятся в первом «октанте» пространства $\mathbb{R}^n$. Таковыми будут, например, функции вида $u(\bar{x})g(\bar{x})$, где $u(\bar{x}) \in C^\infty(\mathbb{R}^n; E)$, $g(\bar{x}) \in D'\big(R^n_+\big)$ или $u(\bar{x}) \in C^\infty\big(R^n_+; E\big)$, $g(\bar{x}) \in D'(\mathbb{R}^n)$, действующие согласно определению по правилу

$$(u(\bar{x})g(\bar{x}), s(\bar{x})) = (g(\bar{x}), \langle u(\bar{x}), s(\bar{x})\rangle) \quad \forall\, s(\bar{x}) \in K(\mathbb{R}^n; E^*).$$

При $n = 1$ вместо $D'\big(R^1_+\big)$ принято [14] использовать обозначение D'_+.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства, $\mathscr{K}(\bar{x}) \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ — сильно непрерывная оператор-функция класса C^∞, причем $\mathscr{K}^*(\bar{x}) \in \mathscr{L}\big(E_2^*, E_1^*\big)$ существует при почти всех $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $f(\bar{x}) \in D'(\mathbb{R}^n)$. Тогда формальный символ $\mathscr{K}(\bar{x})f(\bar{x})$ назовем *обобщенной оператор-функцией. Сверткой* [8] обобщенной оператор-функции $\mathscr{K}(\bar{x})f(\bar{x})$ и обобщенной функции $v(\bar{x}) \in K'(\mathbb{R}^n; E_1)$ назовем обобщенную функцию $\mathscr{K}(\bar{x})f(\bar{x}) * v(\bar{x}) \in K'(\mathbb{R}^n; E_2)$ (если она существует), действующую по формуле

$$(\mathscr{K}(\bar{x})f(\bar{x}) * v(\bar{x}), s(\bar{x})) = (f(\bar{x}), (v(\bar{y}), \mathscr{K}^*(\bar{x})s(\bar{x}+\bar{y}))) \quad \forall s(\bar{x}) \in K(\mathbb{R}^n; E_2^*).$$

Поскольку функция $\mathscr{K}^*(\bar{x})s(\bar{x}+\bar{y})$ не финитна в $\mathbb{R}^{2n}$, сформулированное определение будет корректно лишь в том случае, когда носитель «прямого произведения» обобщенных функций $f(\bar{x})$ и $v(\bar{y})$, т. е. множество $\operatorname{supp} f(\bar{x}) \otimes \operatorname{supp} v(\bar{y})$, пересекается с носителем $\mathscr{K}^*(\bar{x})s(\bar{x}+\bar{y})$ по ограниченному в $\mathbb{R}^{2n}$ множеству. В этом случае $\mathscr{K}^*(\bar{x})s(\bar{x}+\bar{y})$ можно заменить финитной функцией $\psi(\bar{x}, \bar{y})$, совпадающей с $\mathscr{K}^*(\bar{x})s(\bar{x}+\bar{y})$ на пересечении $[\operatorname{supp} f(\bar{x}) \otimes \operatorname{supp} v(\bar{y})] \cap \operatorname{supp} \mathscr{K}^*(\bar{x})s(\bar{x}+\bar{y})$. Тогда значение $(f(\bar{x}), (v(\bar{y}), \psi(\bar{x}, \bar{y})))$ корректно определено и не зависит от выбора значений $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ вне пересечения $[\operatorname{supp} f(\bar{x}) \otimes \operatorname{supp} v(\bar{y})] \cap \operatorname{supp} \mathscr{K}^*(\bar{x})s(\bar{x}+\bar{y})$. Приведем достаточные условия, при которых свертка заведомо существует.

Пример 1. Если $n = 1$, $f(t) \in D'_+$, $v(t) \in K'\big(\mathbb{R}^1_+; E_1\big)$, то свертка $\mathscr{K}(t)f(t) * v(t)$ существует, причем если $A \in \mathscr{L}(E_2, E_3)$ и существует $A^* \in \mathscr{L}(E_3^*, E_2^*)$, то справедливо свойство ассоциативности

$$A\delta^{(k)}(t) * (\mathscr{K}(t)f(t) * v(t)) = (A\delta^{(k)}(t) * \mathscr{K}(t)f(t)) * v(t),$$

где $A\delta^{(k)}(t) * \mathscr{K}(t)f(t) = (A\mathscr{K}(t)f(t))^{(k)}$ по определению. Эти же утверждения справедливы и в случае $n > 1$, если $f(\bar{x}) \in D'\big(\mathbb{R}^n_+\big)$ и $v(\bar{x}) \in K'\big(\mathbb{R}^n_+; E_1\big)$. Для замкнутого оператора A приведенное здесь равенство будем считать выполненным по определению.

Пример 2. Если одна из функций $f(\bar{x})$ или $v(\bar{x})$ финитна, то свертка $\mathscr{K}(\bar{x})f(\bar{x}) * v(\bar{x})$ существует.

Утверждения из этих двух примеров доказываются такими же рассуждениями, как и соответствующие теоремы в [14, с. 130–141].

Пример 3. Если $v(t,\bar{x}) \in K'\big(\mathbb{R}^1_+ \otimes \mathbb{R}^n; E_1\big)$ (т. е. $\operatorname{supp} v(t,\bar{x}) \subset \mathbb{R}^1_+ \otimes \mathbb{R}^n \equiv \{t \geq 0\}$ — полупространство в $\mathbb{R}^{n+1}$), $\mathscr{K}(t,\bar{x})f(t,\bar{x}) = k(t)g(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1)$, $g(t) \in D'_+$, $\bar{y}_1$ — фиксированный вектор (т. е. $\operatorname{supp}\mathscr{K}(t,\bar{x})f(t,\bar{x}) \equiv \{t \geq 0,\ \bar{x} = \bar{y}_1\}$ — луч в $\mathbb{R}^{n+1}$), то

$$M \equiv \operatorname{supp}(k(t)g(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1)) \otimes \operatorname{supp} v(\tau,\bar{z}) \equiv \{(t,\tau,\bar{x},\bar{z}) \mid t \geq 0,\ \tau \geq 0,\ \bar{x} = \bar{y}_1,\ \bar{z} \in \mathbb{R}^n)\} \subset \mathbb{R}^{2n+2}.$$

Пусть $s(t,\bar{x}) \in K(\mathbb{R}^{n+1}; E_2^*)$, тогда в силу финитности $s(t,\bar{x})$ существует $R > 0$ такое, что $\operatorname{supp} s(t,\bar{x}) \subset U_R \equiv \{(t,\bar{x}) \mid t^2 + (\bar{x},\bar{x}) \leq R^2\}$, поэтому носителем функции $s(t+\tau,\bar{x}+\bar{z})$ является «полоса» в $\mathbb{R}^{2n+2}$, описываемая неравенством $(t+\tau)^2 + (\bar{x}+\bar{z},\bar{x}+\bar{z}) \leq R^2$. Такая «полоса» пересекается с M по множеству $\{(t+\tau)^2 + (\bar{y}_1+\bar{z},\bar{y}_1+\bar{z}) \leq R^2,\ t \geq 0,\ \tau \geq 0,\ \bar{y}_1$ фиксирован$\}$, очевидно, ограниченному в $\mathbb{R}^{2n+2}$, а значит, свертка $k(t)g(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1) * v(t,\bar{x})$ при сделанных предположениях существует. Если $A \in \mathscr{L}(E_2,E_3)$ и $A^* \in \mathscr{L}(E_3^*,E_2^*)$, то справедливо свойство ассоциативности

$$A\delta^{(k)}(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_2) * (k(t)g(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1) * v(t,\bar{x})) = (A\delta^{(k)}(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_2) * k(t)g(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1)) * v(t,\bar{x}),$$

где согласно свойствам свертки обобщенных функций

$$A\delta^{(k)}(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_2) * k(t)g(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1) = (Ak(t)g(t))^{(k)}\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1-\bar{y}_2).$$

Действительно, введем обозначение $w(t,\bar{x}) = k(t)g(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1) * v(t,\bar{x})$. Тогда с учетом определения обобщенных функций для любой $s(t,\bar{x}) \in K(\mathbb{R}^{n+1}; E_2^*)$ имеем

$$(w(t,\bar{x}), s(t,\bar{x})) = ((g(t)\cdot\delta(\bar{z}-\bar{y}_1), (v(\tau,\bar{x}), k^*(t)s(t+\tau,\bar{x}+\bar{z}))) = (g(t), (v(\tau,\bar{x}), k^*(t)s(t+\tau,\bar{x}+\bar{y}_1))).$$

Отсюда для любой $s(t,\bar{x}) \in K(\mathbb{R}^{n+1}; E_3^*)$

$$\begin{aligned}(A\delta^{(k)}(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_2) * w(t,\bar{x}), s(t,\bar{x})) &= (\delta^{(k)}(\tau)\cdot\delta(\bar{z}-\bar{y}_2), (w(t,\bar{x}), A^*s(t+\tau,\bar{x}+\bar{z}))) \\ &= (-1)^k\big(w(t,\bar{x}), A^*s_t^{(k)}(t,\bar{x}+\bar{y}_2)\big) \\ &= (-1)^k(g(t), \big(v(\tau,\bar{x}), k^*(t)A^*s_t^{(k)}(t+\tau,\bar{x}+\bar{y}_2+\bar{y}_1))\big) \\ &= (-1)^k\big(Ak(t)g(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1-\bar{y}_2) * v(\tau,\bar{x}), s_t^{(k)}(t,\bar{x})\big) \\ &= ((Ak(t)g(t))^{(k)}\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1-\bar{y}_2) * v(\tau,\bar{x}), s(t,\bar{x})).\end{aligned}$$

§ 3. Фундаментальные оператор-функции дифференциальных операторов с нётеровым оператором в главной части

Рассмотрим дифференциальный оператор вида

$$\mathscr{L}(\mathscr{D}) = \sum_{|\alpha|=0}^{N} A_\alpha \mathscr{D}^\alpha = \sum_{|\alpha|=0}^{N} A_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

где A_α — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $\overline{\bigcap\limits_{|\alpha|=0}^{N} D(A_\alpha)} = E_1$, и соответствующую ему обобщенную оператор-функцию

$$\mathscr{L}(\delta(\bar{x})) = \sum_{|\alpha|=0}^{N} A_\alpha \delta^{(\alpha_1)}(x_1) \cdot \ldots \cdot \delta^{(\alpha_n)}(x_n).$$

Фундаментальной оператор-функцией дифференциального оператора $\mathscr{L}(\mathscr{D})$ на классе $K'(\mathbb{R}^n; E_2)$ называется такая обобщенная оператор-функция $\mathscr{E}(\bar{x})$, что для любой $u(\bar{x}) \in K'(\mathbb{R}^n; E_2)$ на основном пространстве $K(\mathbb{R}^n; E_2^*)$ справедливо равенство

$$\mathscr{L}(\delta(\bar{x})) * \mathscr{E}(\bar{x}) * u(\bar{x}) = u(\bar{x}).$$

Таким образом, если существует свертка $\mathscr{E}(\bar{x}) * g(\bar{x})$, то она является решением уравнения $\mathscr{L}(\delta(\bar{x})) * u(\bar{x}) = g(\bar{x})$, что, в свою очередь, позволяет строить обобщенные (и классические) решения дифференциального уравнения $\mathscr{L}(\mathscr{D})u(\bar{x}) = f(\bar{x})$ [14, 8].

Теорема 1. *Пусть A, B — замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $\overline{R(B)} = R(B)$, $D(B) \subset D(A)$, $\overline{D(B)} = \overline{D(A)} = E_1$, $n = \dim N(B)$, $m = \dim N(B^*)$, $n > m$, существуют полные жордановы наборы $\{\varphi_i^{(j)}, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, p_i\}$ и $\{\psi_i^{(j)}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, p_i\}$. Тогда дифференциальный оператор первого порядка $(B\delta'(t) - A\delta(t))$ на классе $K'(\mathbb{R}^1_+; E_2)$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathscr{E}_1(t) = B^+ e^{AB^+ t}\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot, \psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t) - \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot, \psi_i^{(j)}\rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\delta^{(k)}(t)\right],$$

где $\psi_i^{(j)}$ при $i = m+1, \ldots, n$, $j = 2, \ldots, p_i$ являются произвольными функционалами из E_2^* и $\psi_i^{(1)} = 0$, $i = m+1, \ldots, n$.

Доказательство. В соответствии с определением необходимо проверить справедливость равенства

$$(B\delta'(t) - A\delta(t)) * \mathscr{E}_1(t) * u(t) = u(t)$$

на основном пространстве $K(\mathbb{R}^1; E_2^*)$. Подставим в левую часть этого равенства выражение для $\mathscr{E}_1(t)$:

$$\begin{aligned}(B\delta'(t) - A\delta(t)) * \mathscr{E}_1(t) * u(t) &= \Biggl((I - \mathscr{Q})AB^+ e^{AB^+ t}\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot, \psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t)\\ &\quad + (I - \mathscr{Q})\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot, \psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\delta(t)\\ &\quad - \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot, \psi_i^{(j)}\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\delta^{(k+1)}(t)\right]\end{aligned}$$

$$
- AB^{+} e^{AB^{+}t}\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t)
+ \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\delta^{(k)}(t)\right]\Bigg) * u(t).
$$

Поскольку $B\varphi_i^{(1)} = 0$, имеем

$$
\begin{aligned}
&(B\delta'(t) - A\delta(t)) * \mathscr{E}_1(t) * u(t) \\
&= \Bigg(I\delta(t) - \frac{d}{dt}\Bigg(\mathscr{Q} e^{AB^{+}t}\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t)\Bigg) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-2}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k-1}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle B\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\delta^{(k+1)}(t)\right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\delta^{(k)}(t)\right]\Bigg) * u(t) \\
&= \Bigg(I\delta(t) - \frac{d}{dt}\Bigg(\mathscr{Q} e^{AB^{+}t}\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t)\Bigg) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\big(B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)} - A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\big)\right\}\delta^{(k)}(t)\right]\Bigg) * u(t).
\end{aligned}
$$

Но $B\varphi_i^{(j+1)} = A\varphi_i^{(j)}$, поэтому теорема будет доказана, если показать, что

$$
\mathscr{Q} e^{AB^{+}t}\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right] = 0
$$

или

$$
\sum_{\nu=1}^{m}\langle e^{AB^{+}t}\cdot,\psi_\nu\rangle z_\nu\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right] = 0.
$$

Покажем, что при каждом $\nu = 1,\dots,m$ соответствующее слагаемое обращается в нуль. Действительно,

$$
\begin{aligned}
&\langle e^{AB^{+}t}\cdot,\psi_\nu\rangle z_\nu\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right] \\
&= \left\langle\cdot,\psi_\nu^{(1)} + \psi_\nu^{(2)}\cdot\frac{t}{1!} + \psi_\nu^{(3)}\cdot\frac{t^2}{2!} + \dots\psi_\nu^{(p_\nu)}\cdot\frac{t^{p_\nu-1}}{(p_\nu-1)!}\right\rangle z_\nu \\
&\times\left[I - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} - \sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right] \\
&= -\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle z_\nu\Bigg\langle\varphi_i^{(1)}, A^*(B^{+*}A^*)^{p_i-j} \\
&\quad\times\left(\psi_\nu^{(1)} + \psi_\nu^{(2)}\cdot\frac{t}{1!} + \psi_\nu^{(3)}\cdot\frac{t^2}{2!} + \dots\psi_\nu^{(p_\nu)}\cdot\frac{t^{p_\nu-1}}{(p_\nu-1)!}\right)\Bigg\rangle = 0.
\end{aligned}
$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если в условиях теоремы 1 $n < m$, то обобщенная оператор-функция $\mathscr{E}_1(t)$ является фундаментальной для дифференциального оператора $(B\delta'(t) - A\delta(t))$ на подклассе обобщенных функций из $K'\big(\mathbb{R}^1_+; E_2\big)$, удовлетворяющих условиям*

$$\big\langle e^{AB^+t}\cdot, \psi_\nu\big\rangle z_\nu \theta(t) * u(t) = 0, \quad \nu = n+1, \dots, m.$$

Доказательство. Повторяя рассуждения из доказательства теоремы 1, получим равенство

$$(B\delta'(t) - A\delta(t)) * \mathscr{E}_1(t) * u(t) = I\delta(t) * u(t) \\ - \frac{d}{dt}\left(\mathscr{Q}e^{AB^+t}\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\big\langle\cdot, \psi_i^{(j)}\big\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t)\right) * u(t).$$

Но

$$\mathscr{Q}e^{AB^+t}\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\big\langle\cdot, \psi_i^{(j)}\big\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t) * u(t) \\ = \sum_{\nu=n+1}^{m}\langle e^{AB^+t}\cdot, \psi_\nu\rangle z_\nu\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\big\langle\cdot, \psi_i^{(j)}\big\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t) * u(t) \\ = \sum_{\nu=n+1}^{m}\left[\langle e^{AB^+t}\cdot, \psi_\nu\rangle - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\big\langle\cdot, \psi_i^{(j)}\big\rangle\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\big\langle A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_\nu\big\rangle\right] z_\nu\theta(t) * u(t) \\ = \sum_{\nu=n+1}^{m}\langle e^{AB^+t}\cdot, \psi_\nu\rangle z_\nu\theta(t) * u(t).$$

Теорема 2 доказана.

Теоремы 1 и 2 допускают следующие обобщения.

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы 1, то*

(a) *дифференциальный оператор $(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t))$ на классе $K'\big(\mathbb{R}^1_+; E_2\big)$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathscr{E}_N(t) = B^+\mathscr{U}_N(AB^+t)\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\big\langle\cdot, \psi_i^{(j)}\big\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t) \\ - \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\big\langle\cdot, \psi_i^{(j)}\big\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\delta^{(N\cdot k)}(t)\right],$$

где

$$\mathscr{U}_N(AB^+t) = \sum_{i=1}^{\infty}(AB^+)^{i-1}\frac{t^{i\cdot N-1}}{(i\cdot N-1)!};$$

(б) *дифференциальный оператор $(B\delta^{(N)}(x)\cdot\delta^{(N)}(y) - A\delta(x)\cdot\delta(y))$ на классе $K'\big(\mathbb{R}^2_+; E_2\big)$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathscr{E}_N(x, y) = B^+\mathscr{V}_N(AB^+)(x, y)\left[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\big\langle\cdot, \psi_i^{(j)}\big\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(x, y) \\ - \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\big\langle\cdot, \psi_i^{(j)}\big\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\delta^{(N\cdot k)}(x)\cdot\delta^{(N\cdot k)}(y)\right],$$

где

$$\mathscr{V}_N(AB^+)(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}(AB^+)^{i-1}\frac{x^{i\cdot N-1}}{(i\cdot N-1)!}\cdot\frac{y^{i\cdot N-1}}{(i\cdot N-1)!},$$

здесь $\psi_i^{(j)}$ *при* $i=m+1,\dots,n$, $j=1,\dots,p_i$ *те же, что и в теореме* 1.

Теорема 4. *Если выполнены условия теоремы* 2, *то*

(а) *обобщенная оператор-функция* $\mathscr{E}_N(t)$ *является фундаментальной для дифференциального оператора* $(B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t))$ *на подклассе обобщенных функций из* $K'(\mathbb{R}^1_+;E_2)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\langle\mathscr{U}_N(AB^+t)\cdot,\psi_\nu\rangle z_\nu\theta(t)*u(t)=0,\quad \nu=n+1,\dots,m;$$

(б) *обобщенная оператор-функция* $\mathscr{E}_N(x,y)$ *является фундаментальной для дифференциального оператора* $(B\delta^{(N)}(x)\cdot\delta^{(N)}(y)-A\delta(x)\cdot\delta(y))$ *на подклассе обобщенных функций из* $K'(\mathbb{R}^2_+;E_2)$, *удовлетворяющих условиям*

$$\langle\mathscr{V}_N(AB^+)(x,y)\cdot,\psi_\nu\rangle z_\nu\theta(x,y)*u(x,y)=0,\quad \nu=n+1,\dots,m.$$

Замечание 1. Очевидно, при $N=2$ имеем $\mathscr{U}_2(AB^+t)=\frac{\sinh(\sqrt{AB^+}t)}{\sqrt{AB^+}}$, здесь $\sqrt{AB^+}$ — формальный символ.

Замечание 2. Если $n=m$, т. е. оператор B фредгольмов, то $B^+=\Gamma$ — оператор Шмидта и теоремы 1 и 3(а) оказываются теоремами 1 и 3 из работы [8].

Рассмотрим для пары операторов A и B в предположении выполнения условий теоремы 1 задачу Коши вида

$$B\dot{x}(t)=Ax(t)+f(t),\quad x(0)=x_0,$$

$x_0\in D(B)$, $f(t)$ — достаточно гладкая функция со значениями в E_2.

Функция $x(t)\in C^1(t\geq 0)$, являющаяся решением этой задачи, будучи продолженная нулем при $t<0$, т. е. $\tilde{x}(t)=x(t)\theta(t)\in K'(\mathbb{R}^1_+;E_1)$, удовлетворяет в обобщенном смысле [15] равенству

$$B\dot{\tilde{x}}=A\tilde{x}+f(t)\theta(t)+Bx_0\delta(t),$$

здесь $f(t)\theta(t)+Bx_0\delta(t)\in K'(\mathbb{R}^1_+;E_2)$. Задачу о построении решения такого уравнения принято называть *обобщенной задачей Коши.* В соответствии с теоремой 1 искомое обобщенное решение (класса $K'(\mathbb{R}^1_+;E_1)$) имеет вид

$$\tilde{x}(t)=\mathscr{E}_1(t)*(Bx_0\delta(t)+f(t)\theta(t))$$

или, в развернутой форме,

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t)=&-\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{p_i-1}\left\{\sum_{j=1}^{k}c_{ij}\varphi_i^{(k+1-j)}\right\}\delta^{(p_i-1-k)}(t)\right]\\&+\left(x_0+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p_i}c_{ij}\varphi_i^{(p_i+1-j)}+\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}c_{ij}B^+e^{AB^+t}A\varphi_i^{(p_i-j)}\right.\\&+\int_0^t B^+e^{AB^+(t-s)}[I-\widetilde{\mathscr{Q}}]\left(Ax_0+f(s)+\sum_{k=m+1}^{n}\xi_{k1}(s)A\varphi_k^{(1)}\right)ds\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p_i}\xi_{ij}(t)\varphi_i^{(j)}+\sum_{k=m+1}^{n}\xi_{k1}(t)\varphi_k^{(1)}\Bigg)\theta(t).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\widetilde{\mathscr{Q}}=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i}\big\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\big\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)},\quad l=\min(m,n);$$

при $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,p_i$

$$c_{ij}=-\big\langle Ax_0+f(0),\psi_i^{(j)}\big\rangle-\big\langle f'(0),\psi_i^{(j-1)}\big\rangle-\dots-\big\langle f^{(j-1)}(0),\psi_i^{(1)}\big\rangle,$$

$$\xi_{ij}(t)=-\sum_{k=0}^{p_i-j}\big\langle f^{(k)}(t)-f^{(k)}(0),\psi_i^{(p_i-k+1-j)}\big\rangle;$$

при $i=m+1,\dots,n$, $j=1,\dots,p_i-1$

$$c_{ij}=-\big\langle Bx_0,\psi_i^{(j+1)}\big\rangle-\big\langle f(0),\psi_i^{(j)}\big\rangle-\dots-\big\langle f^{(j-2)}(0),\psi_i^{(2)}\big\rangle,$$

$$c_{ip_i}=-\big\langle x_0,\gamma_i\big\rangle-\big\langle f(0),\psi_i^{(p_i)}\big\rangle-\dots-\big\langle f^{(p_i-2)}(0),\psi_i^{(2)}\big\rangle,$$

$$\xi_{i1}(t)=-\sum_{k=0}^{p_i-1}\big\langle f^{(k)}(t)-f^{(k)}(0),\psi_i^{(p_i-k)}\big\rangle.$$

В силу произвольности функционалов $\psi_i^{(j)}$ при $i=m+1,\dots,n$, $j=2,\dots,p_i$ соответствующие им коэффициенты c_{ij} оказываются свободными параметрами, а функции $\xi_{i1}(t)$, $i=m+1,\dots,n$, произвольными, т. е. обобщенное решение $\tilde{x}(t)$ является многопараметрической функцией. Отсюда получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Если выполнены условия теоремы* 1, *в выражении для обобщенного решения* $\tilde{x}(t)$ *задачи Коши свободные параметры* c_{ij}, $i=m+1,\dots,n$, $j=1,\dots,p_i$, *положить равными нулю, а начальные условия* x_0 *и функцию* $f(t)$ *выбрать такими, чтобы* $c_{ij}=0$, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,p_i$, *то обобщенное решение окажется классическим* (*непрерывным*).

Если $m>n$, то в соответствии с теоремой 2 функция $\tilde{x}(t)=\mathscr{E}_1(t)*(Bx_0\delta(t)+f(t)\theta(t))$ будет являться обобщенным решением задачи Коши, если для функции $Bx_0\delta(t)+f(t)\theta(t)$ при $\nu=n+1,\dots,m$ будут выполняться условия

$$\langle e^{AB^+t}\cdot,\psi_\nu\rangle z_\nu\theta(t)*(Bx_0\delta(t)+f(t)\theta(t))=0$$

или

$$\int_0^t\langle e^{AB^+(t-s)}(Ax_0+f(s)),\psi_\nu\rangle\,ds=0,$$

причем свободных параметров и произвольных функций в обобщенном решении $\tilde{x}(t)$ в этом случае нет. Итак, справедливо

Следствие 2. *Если выполнены условия теоремы 2, начальные данные x_0 и функцию $f(t)$ выбрать таким образом, чтобы $c_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p_i$, и при $\nu = n+1, \dots, m$*

$$\int_0^t \langle e^{AB^+(t-s)}(Ax_0 + f(s)), \psi_\nu \rangle \, ds = 0,$$

то обобщенное решение $\tilde{x}(t)$ окажется классическим (непрерывным).

Замечание 3. Если вспомнить, что при $n < m$ была осуществлена перестройка базиса $\{\psi_k\}$ для $k = n+1, \dots, m$ по правилу

$$\tilde{\psi_k} = \psi_k - \sum_{i=1}^n \bigl\langle A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_k \bigr\rangle \psi_i,$$

то, вводя для $j = 1, \dots, m$ обозначения

$$b_j(t) = \int_0^t \langle e^{AB^+(t-s)}(Ax_0 + f(s)), \psi_j \rangle \, ds,$$

условия

$$\int_0^t \langle e^{AB^+(t-s)}(Ax_0 + f(s)), \tilde{\psi}_\nu \rangle \, ds = 0, \quad \nu = n+1, \dots, m,$$

можно переписать в виде

$$b_\nu(t) = \sum_{i=1}^n \bigl\langle A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_\nu \bigr\rangle b_i(t).$$

Соответственно при $i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, p_i$, $l = \min(n, m)$ коэффициенты c_{ij} можно вычислять по правилу $c_{ij} = -b_i^{(j)}(0)$, а функции ξ_{ij} — по правилу $\xi_{ij}(t) = b_i^{(p_i-j+1)}(t) - b_i^{(p_i-j+1)}(0)$. Именно таким образом в работах [7, 16] конструировались непрерывные решения рассматриваемой задачи Коши. При нашем подходе теоремы из [7] и [16] получаются как следствия из теорем 1 и 2, аналогичные следствия можно получить и из теорем 3 и 4.

§ 4. Фундаментальные оператор-функции дифференциально-разностных операторов с нётеровым оператором при производной

Теорема 5. *Если выполнены условия теоремы 1, то дифференциально-разностный оператор $(B\delta'(t) \cdot \delta(\bar{x}) - A\delta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x})))$ имеет на классе $K'\bigl(\mathbb{R}^1_+ \otimes \mathbb{R}^n; E_2\bigr)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathscr{E}_1(t, \bar{x}) = B^+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(AB^+t)^k}{k!} \left[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} \bigl\langle \cdot, \psi_i^{(j)} \bigr\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \theta(t)$$
$$\times (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))^k + \sum_{i=1}^n \left[\sum_{k=0}^{p_i-1} (-1)^k \left\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} \bigl\langle \cdot, \psi_i^{(j)} \bigr\rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \right\} \delta^{(k)}(t) \cdot \mathscr{B}_{k+1}(\bar{x}) \right],$$

здесь, как и в теореме 1, $\psi_i^{(1)} = 0$, $\psi_i^{(j)}$ — *произвольные функционалы из* E_2^* *при* $i = m+1, \dots, n$, $j = 2, \dots, p_i$ *и введены обозначения*

$$(\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))^k = \underbrace{(\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x})) * \dots * (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))}_{k}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu C_k^\nu \delta(\bar{x} - \nu\bar{\mu}),$$

$$\mathscr{B}_{k+1}(\bar{x}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} C_{k+\nu}^k \delta(\bar{x} - \nu\bar{\mu}), \quad (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))^0 = \mathscr{B}_0(\bar{x}) = \delta(\bar{x}).$$

Доказательство. Обобщенные функции $\mathscr{B}_{k+1}(\bar{x})$ удовлетворяют следующим равенствам:

$$(\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x})) * \mathscr{B}_{k+1}(\bar{x}) = -\mathscr{B}_k(\bar{x}) \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

проверяемым непосредственно, поэтому если $k > l$, то

$$(\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))^k * \mathscr{B}_l(\bar{x}) = (-1)^l (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))^{k-l}.$$

Осуществляя выкладки, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы 1, и используя при этом приведенные здесь соотношения, для любой $u(t, \bar{x}) \in K'(\mathbb{R}_+^1 \otimes \mathbb{R}^n; E_2)$ получим равенство

$$\begin{aligned}
&(B\delta'(t) \cdot \delta(\bar{x}) - A\delta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))) * \mathscr{E}_1(t, \bar{x}) * u(t, \bar{x}) \\
&= \Bigg(I\delta(t) \cdot \delta(\bar{x}) - \frac{\partial}{\partial t} \mathscr{Q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(AB^+ t)^k}{k!} \left[I - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)} \right] \\
&\qquad \times \theta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))^k - \sum_{i=1}^{n} \Bigg[\sum_{k=1}^{p_i - 1} (-1)^k \\
&\times \left\{ \sum_{j=1}^{p_i - k} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle \big(B\varphi_i^{(p_i - k + 2 - j)} - A\varphi_i^{(p_i - k + 1 - j)} \big) \right\} \delta^{(k)}(t) \cdot \mathscr{B}_k(\bar{x}) \Bigg] \Bigg) * u(t, \bar{x}).
\end{aligned}$$

Доказательство завершается так же, как в теореме 1.

Теорема 6. *Если в условиях теоремы* 5 $n < m$, *то обобщенная оператор-функция* $\mathscr{E}_1(t, \bar{x})$ *является фундаментальной для дифференциально-разностного оператора* $(B\delta'(t) \cdot \delta(\bar{x}) - A\delta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x})))$ *на подклассе обобщенных функций из* $K'(\mathbb{R}_+^1 \otimes \mathbb{R}^n; E_2)$, *удовлетворяющих при* $\nu = n+1, \dots, m$ *условиям*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\langle \frac{(AB^+ t)^k}{k!} \cdot, \psi_\nu \right\rangle z_\nu \theta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))^k * u(t, \bar{x}) = 0.$$

Как и теоремы предыдущего параграфа, эти утверждения допускают обобщения на дифференциально-разностные операторы высокого порядка.

Теорема 7. (a) *При выполнении условий теоремы* 1 *дифференциально-разностный оператор* $(B\delta^{(N)}(t) \cdot \delta(\bar{x}) - A\delta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x})))$ *имеет на классе* $K'(\mathbb{R}_+^1 \otimes \mathbb{R}^n; E_2)$ *фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathscr{E}_N(t, \bar{x}) = B^+ \sum_{k=1}^{\infty} (AB^+)^{k-1} \frac{t^{N \cdot k - 1}}{(N \cdot k - 1)!}$$

$$\times\left[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\right]\theta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^k$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{k=0}^{p_i-1}(-1)^k\left\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\right\}\delta^{(k\cdot N)}(t)\cdot\mathscr{B}_{k+1}(\bar{x})\right].$$

(б) *Если в условиях теоремы 1 $n<m$, то обобщенная оператор-функция $\mathscr{E}_N(t,\bar{x})$ является фундаментальной для дифференциально-разностного оператора $B\delta^{(N)}(t)\cdot\delta(\bar{x})-A\delta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))$ на подклассе обобщенных функций из $K'\big(\mathbb{R}^1_+\otimes\mathbb{R}^n;E_2\big)$, удовлетворяющих при $\nu=n+1,\dots,m$ условиям*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle(AB^+)^{k-1}\frac{(t)^{N\cdot k-1}}{(N\cdot k-1)!}\cdot,\psi_\nu\right\rangle z_\nu\theta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^k*u(t,\bar{x})=0.$$

Замечание 4. Для пары операторов A и B, удовлетворяющих условиям теоремы 5, обобщенное решение задачи Коши

$$B\frac{\partial u}{\partial t}=A(u(t,\bar{x}-\bar{\mu})-u(t,\bar{x}))+f(t,\bar{x}),\quad u(0,\bar{x})=u_0(\bar{x}),$$

где $u_0(\bar{x})$ и $f(t,\bar{x})$ быстро убывающие [14] по $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$, $u_0(\bar{x})\in D(B)$, представимо в виде

$$\tilde{u}(t,\bar{x})=\mathscr{E}_1(t,\bar{x})*(Bu_0(\bar{x})\delta(t)+f(t,\bar{x})\theta(t)).$$

Из этого представления, как и при выводе следствий из теорем 1 и 2, при необходимости можно получить теоремы о непрерывных решениях данной задачи Коши.

В заключение авторы считают своим приятным долгом сердечно поблагодарить профессора Н. А. Сидорова за полезные обсуждения представленных здесь результатов и конструктивные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д., Свешников А. Г.* О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1999. Т. 39, № 6. С. 1006–1022; 2000. Т. 40, № 8. С. 1237–1249; 2003. Т. 43, № 12. С. 1835–1869.
2. *Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24, № 5. С. 58–73.
3. *Осколков А. П.* Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина — Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1988. Т. 179. С. 126–164.
4. *Dolezal V.* Dynamics of linear systems. Goningen; Prague: P. Noordhoff Acad., 1967.
5. *Кожанов А. И.* Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Мат. заметки. 1999. Т. 65, № 1. С. 70–75.
6. *Свиридюк Г. А.* К общей теории полугрупп операторов // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49, № 4. С. 47–74.
7. *Сидоров Н. А., Романова О. А.* О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 9. С. 1516–1626.
8. *Фалалеев М. В.* Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 5. С. 1167–1182.
9. *Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M.* Lyapunov–Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002.

10. *Сидоров Н. А., Романова О. А., Благодатская Е. Б.* Уравнения с частными производными с оператором конечного индекса при главной части. Иркутск, 1992. 30 с. (Препринт/ИрВЦ СО РАН; № 3).
11. *Nashed M. Z.* Generalized inverses and applications. New York: Acad. Press, 1976.
12. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
13. *Русак Ю. Б.* Некоторые соотношения между жордановыми наборами оператор-функций и сопряженной к ней // Изв. АН УзССР. Сер. мат. наук. 1978. № 2. С. 15–19.
14. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.
15. *Сидоров Н. А., Фалалеев М. В.* Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной // Дифференц. уравнения. 1987. Т. 23, № 4. С. 726–728.
16. *Сидоров Н. А., Романова О. А., Благодатская Е. Б.* Уравнения с частными производными с оператором конечного индекса при главной части // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 30, № 4. С. 729–731.

Статья поступила 1 марта 2004 г.

Фалалеев Михаил Валентинович, Гражданцева Елена Юрьевна
Институт математики, экономики и информатики,
Иркутский гос. университет, ул. К. Маркса, 1, Иркутск 664003
mihail@ic.isu.ru, geu@math.isu.ru