Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2005. Том 46, № 6

УДК 517.518

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА, НА СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ РАНГА 1

С. С. Платонов

Аннотация: Для функций на некомпактных римановых симметрических пространствах ранга один доказан аналог классической теоремы Е. Титчмарша об описании образа при преобразовании Фурье множества функций, удовлетворяющих условию Липшица в L^2.

Ключевые слова: симметрические пространства, преобразование Фурье, условие Липшица.

§ 1. Введение и формулировка основных результатов

Римановы симметрические пространства образуют замечательный класс римановых многообразий, на котором активно изучаются различные задачи геометрии, теории функций и математической физики (см., например, [1–4] и цитированную там литературу). Так, на компактных симметрических пространствах определены ряды Фурье (точнее говоря, их аналоги), на некомпактных симметрических пространствах определено преобразование Фурье и для многих задач классического гармонического анализа существуют их естественные аналоги для симметрических пространств. Среди всех римановых симметрических пространств особо выделяется класс римановых симметрических пространств ранга 1. Такие многообразия обладают хорошими геометрическими свойствами, в частности, они являются двухточечными однородными пространствами (см. [5, гл. 8]), а на компактных симметрических пространствах ранга 1 все геодезические замкнуты и имеют одинаковую длину (см. [6]). К классу римановых симметрических пространств ранга 1 принадлежат n-мерная сфера S^n и n-мерное пространство Лобачевского. В дальнейшем под симметрическим пространством ранга 1 мы будем понимать риманово симметрическое пространство ранга 1 некомпактного типа.

В настоящей работе для симметрических пространств ранга 1 получен аналог одной классической теоремы Е. Титчмарша об описании образа при преобразовании Фурье класса функций, удовлетворяющих условию Липшица в L^2. Приведем точную формулировку этой теоремы.

Пусть $f(x)$ — функция из пространства $L^2(\mathbb{R})$ (все рассматриваемые функции комплекснозначные), $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R})}$ — норма в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, α — произвольное число из интервала $(0, 1)$.

Определение 1. Функция $f(x)$ *принадлежит классу Липшица* $\mathrm{Lip}(\alpha, 2)$, если

$$\|f(x+t) - f(x)\|_{L^2(\mathbb{R})} = O(t^\alpha)$$

при $t \to 0$.

Теорема 1 [7, теорема 85]. *Если $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$, а $\hat{f}(\lambda)$ — ее преобразование Фурье, то условия*

$$f \in \mathrm{Lip}(\alpha, 2), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1.1}$$

и

$$\int\limits_{|\lambda| \geq r} |\hat{f}(\lambda)|^2 \, d\lambda = O(r^{-2\alpha}) \tag{1.2}$$

при $r \to \infty$ эквивалентны.

Приведем необходимые сведения о преобразовании Фурье на симметрических пространствах (см. [2, 3]). Необходимые сведения из теории полупростых групп Ли и симметрических пространств имеются, например, в [1]. Произвольное риманово симметрическое пространство X некомпактного типа можно реализовать как фактор-пространство G/K, где G — связная некомпактная полупростая группа Ли с конечным центром, K — максимальная компактная подгруппа в G. Группа G транзитивно действует на множестве $X = G/K$ левыми сдвигами, подгруппа K совпадает со стационарной подгруппой точки $o = eK$ (e — единичный элемент в группе G). Пусть $G = NAK$ — разложение Ивасавы группы G. Через $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{a}$ и $\mathfrak{n}$ обозначим алгебры Ли групп G, K, A и N соответственно. Через M обозначим централизатор подгруппы A в K, и пусть $B = K/M$. Пусть dx — G-инвариантная мера на X, db и dk — нормированные K-инвариантные меры соответственно на B и K.

Через $\mathfrak{a}^*$ обозначим вещественное сопряженное пространство к $\mathfrak{a}$. На $\mathfrak{a}^*$ действует конечная группа Вейля W. Пусть Σ — множество ограниченных корней ($\Sigma \subset \mathfrak{a}^*$), Σ^+ — множество положительных ограниченных корней,

$$\mathfrak{a}^+ = \{h \in \mathfrak{a} : \alpha(h) > 0 \text{ при } \alpha \in \Sigma^+\}$$

— положительная камера Вейля. Через ρ обозначим полусумму положительных ограниченных корней (с кратностями), тогда $\rho \in \mathfrak{a}^*$. Пусть $\langle\ ,\rangle$ — форма Киллинга на алгебре Ли $\mathfrak{g}$. На подалгебре Ли $\mathfrak{a}$ эта форма положительно определена. Для $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ обозначим через H_λ такой вектор из $\mathfrak{a}$, что $\lambda(H) = \langle H_\lambda, H\rangle$ для всех $H \in \mathfrak{a}$. При $\lambda, \mu \in \mathfrak{a}^*$ полагаем $\langle \lambda, \mu\rangle := \langle H_\lambda, H\mu\rangle$. Соответствие $\lambda \mapsto H_\lambda$ позволяет отождествить $\mathfrak{a}^*$ с $\mathfrak{a}$. С помощью этого отождествления на $\mathfrak{a}$ переносится действие группы Вейля W. Пусть

$$\mathfrak{a}^*_+ = \{\lambda \in \mathfrak{a}^* : H_\lambda \in \mathfrak{a}^+\}.$$

Если X — симметрическое пространство ранга 1, то $\dim \mathfrak{a}^* = 1$, а множество Σ^+ состоит из корней α и 2α с некоторыми кратностями m_α и $m_{2\alpha}$, зависящими от многообразия X (см. [2]). В этом случае будем отождествлять множество $\mathfrak{a}^*$ с множеством $\mathbb{R}$ при помощи соответствия $\lambda \mapsto \lambda\alpha$, $\lambda \in \mathbb{R}$. При этом отождествлении положительные числа соответствуют множеству $\mathfrak{a}^*_+$. Числа m_α и $m_{2\alpha}$ часто встречаются в различных формулах, связанных с симметрическими пространствами ранга 1. Так, например, площадь сферы радиуса t на X равна

$$S(t) = c(\operatorname{sh} t)^{m_\alpha}(\operatorname{sh} 2t)^{m_{2\alpha}}, \tag{1.3}$$

где c — некоторая постоянная; размерность многообразия X равна

$$\dim X = m_\alpha + m_{2\alpha} + 1. \tag{1.4}$$

Вернемся к случаю, когда $X = G/K$ — произвольное симметрическое пространство. Для $g \in G$ обозначим через $A(g) \in \mathfrak{a}$ такой единственный элемент, для которого

$$g = n \cdot \exp A(g) \cdot u, \tag{1.5}$$

где $u \in K$, $n \in N$. Для $x = gK \in X$ и $b = kM \in B = K/M$ положим

$$A(x, b) := A(k^{-1}g).$$

Через $\mathscr{D}(X)$ и $\mathscr{D}(G)$ будем обозначать множества бесконечно дифференцируемых финитных (т. е. с компактным носителем) функций на X и G соответственно. Пусть dg — элемент меры Хаара на группе G. Будем считать, что мера Хаара на группе G нормирована так, чтобы выполнялось равенство

$$\int\limits_X f(x)\,dx = \int\limits_G f(go)\,dg, \quad f \in \mathscr{D}(X). \tag{1.6}$$

Для функции $f(x) \in \mathscr{D}(X)$ введенное Хелгасоном *преобразование Фурье* на симметрическом пространстве X (см. [8] или [3]) определяется формулой

$$\hat{f}(\lambda, b) := \int\limits_X f(x)\, e^{(-i\lambda+\rho)(A(x,b))}\,dx, \quad \lambda \in \mathfrak{a}^*,\ b \in B = K/M. \tag{1.7}$$

Меру на X можно нормировать так, чтобы преобразование, обратное к преобразованию Фурье на X, имело вид

$$f(x) = \frac{1}{|W|} \int\limits_{\mathfrak{a}^* \times B} \hat{f}(\lambda, b)\, e^{(i\lambda+\rho)(A(x,b))} |c(\lambda)|^{-2}\,d\lambda\,db, \tag{1.8}$$

где $|W|$ — порядок группы Вейля, $d\lambda$ — элемент евклидовой меры на $\mathfrak{a}^*$, $c(\lambda)$ — функция Хариш-Чандры. В дальнейшем для краткости будем использовать обозначение

$$d\mu(\lambda) := |c(\lambda)|^{-2}\,d\lambda.$$

Справедлива также *формула Планшереля*

$$\int\limits_X |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{|W|} \int\limits_{\mathfrak{a}^* \times B} |\hat{f}(\lambda, b)|^2\,d\mu(\lambda)\,db = \int\limits_{\mathfrak{a}^*_+ \times B} |\hat{f}(\lambda, b)|^2\,d\mu(\lambda)\,db. \tag{1.9}$$

Отображение $f(x) \mapsto \hat{f}(\lambda, b)$ продолжается по непрерывности с $\mathscr{D}(X)$ до изоморфизма гильбертова пространства $L^2(X) = L^2(X, dx)$ на гильбертово пространство $L^2(\mathfrak{a}^*_+ \times B,\, d\mu(\lambda)\,db)$. Продолженное отображение также будем обозначать через $f(x) \mapsto \hat{f}(\lambda, b)$ и называть преобразованием Фурье, при этом остаются справедливыми формулы (1.8) и (1.9). Отметим, что иногда в литературе вместо разложения Ивасавы $G = NAK$ используется другое разложение Ивасавы $G = KAN$, из-за чего изменяются формулы для преобразования Фурье и обратного преобразования Фурье. Переход от одного разложения Ивасавы к другому осуществляется заменой $g \mapsto g^{-1}$.

Введем оператор сдвига на X. Пусть $n = \dim X$. Обозначим через $d(x, y)$ расстояние между точками $x, y \in X$, и пусть

$$\sigma(x;t) = \{y \in X : d(x,y) = t\}$$

— сфера на X с центром в точке x и радиусом $t > 0$. Пусть $d\sigma_x(y)$ — $(n-1)$-мерный элемент площади сферы $\sigma(x;t)$, $|\sigma(t)|$ — площадь всей сферы $\sigma(x;t)$ (она не зависит от точки x). Будем обозначать через $C_0(X)$ множество всех непрерывных функций на X с компактным носителем. Для любой функции $f(x) \in C_0(X)$ оператор сдвига S^t определим формулой

$$(S^t f)(x) = \frac{1}{|\sigma(t)|} \int\limits_{\sigma(x;t)} f(y)\, d\sigma_x(y), \quad t > 0, \tag{1.10}$$

т. е. $(S^t f)(x)$ — усреднение функции f по сфере $\sigma(x;t)$. Можно показать (см. следующий параграф), что оператор S^t продолжается по непрерывности с пространства $C_0(X)$ до линейного ограниченного оператора на гильбертовом пространстве $L^2(X)$. Это продолжение будем также обозначать через S^t.

Отметим, что оператор S^t также можно назвать *оператором сферического усреднения* (его обычно так называют для случая, когда X совпадает с евклидовым пространством $\mathbb{R}^n$, где имеется естественный оператор сдвига $f(x) \mapsto f(x + a)$). Для тех многообразий X, где нет естественного оператора сдвига (например, если X — n-мерная сфера), оператор S^t часто называют *оператором обобщенного сдвига* или просто *оператором сдвига* (см., например, [9–12]), так как этот оператор может служить для построения неевклидовых аналогов некоторых теорем гармонического анализа. Так, в работах [9–12] оператор S^t используется на сфере для построения модулей непрерывности и доказательства аналогов различных прямых и обратных теорем теории приближения функций, а также для построения функциональных пространств Никольского — Бесова.

Определение 2. Будем говорить, что функция $f(x)$ *принадлежит классу Липшица* $\mathrm{Lip}_X(\alpha, 2)$, если $f(x) \in L^2(X)$ и

$$\|S^t f - f\|_{L^2(X)} = O(t^\alpha) \tag{1.11}$$

при $t \to 0$.

Аналогом теоремы 1 для симметрического пространства X является следующая

Теорема 2. *Пусть X — риманово симметрическое пространство ранга 1, $n = \dim X$. Для любой функции $f(x) \in L^2(X)$ условия*

$$f \in \mathrm{Lip}_X(\alpha, 2), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1.12}$$

и

$$\int\limits_r^\infty \int\limits_B |\hat{f}(\lambda, b)|^2\, d\lambda\, db = O(r^{-2\alpha-n+1}) \tag{1.13}$$

при $r \to +\infty$ эквивалентны.

Доказательство теоремы 2 приводится в § 3. Отметим, что другой вариант перенесения теоремы 1 на плоскость Лобачевского предложен в работе [13], но там используется другой оператор сдвига, который зависит от модели плоскости

Лобачевского, в то время как сдвиг S^t имеет чисто геометрическое происхождение.

Римановы симметрические пространства некомпактного типа ранга 1 вместе с евклидовыми пространствами образуют класс некомпактных двухточечно-однородных римановых пространств (см. [5]), и многие теоремы анализа на симметрических пространствах ранга 1 имеют естественные аналоги для евклидовых пространств. Далее мы рассмотрим аналоги теоремы Титчмарша для евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, которые можно получить на основе теорем 1 и 2.

Пусть $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. По определению полагаем

$$\langle x, y\rangle := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n, \quad |x| := \sqrt{\langle x, x\rangle},$$

dx — элемент меры Лебега на $\mathbb{R}^n$.

Для любой функции $f(x) \in C_0(\mathbb{R}^n)$ преобразование Фурье $\hat{f}(\lambda)$ определяется формулой

$$\hat{f}(\lambda) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i\langle\lambda, x\rangle}\, dx, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n,$$

и по непрерывности преобразование Фурье продолжается на гильбертово пространство $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Будем говорить, что функция $f(x)$ *принадлежит классу Липшица* $\mathrm{Lip}_{\mathbb{R}^n}(\alpha, 2)$, $0 < \alpha < 1$, если

$$\|f(x + y) - f(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(|y|^\alpha)$$

при $|y| \to 0$. Аналогично доказательству теоремы 1 (см. [7, теорема 85]) можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Если $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, а $\hat{f}(\lambda)$ — ее преобразование Фурье, то условия*

$$f \in \mathrm{Lip}_{\mathbb{R}^n}(\alpha, 2), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1.14}$$

и

$$\int\limits_{|\lambda|\geq r} |\hat{f}(\lambda)|^2\, d\lambda = O(r^{-2\alpha}) \tag{1.15}$$

при $r \to \infty$ эквивалентны.

Пусть $\sigma = \sigma^{n-1} := \{\omega \in \mathbb{R}^n : |\omega| = 1\}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$, $d\omega$ — элемент $(n-1)$-мерной площади сферы σ, $|\sigma|$ — площадь всей сферы σ. Для любой функции $f(x) \in C_0(\mathbb{R}^n)$ оператор S^t (на пространстве $\mathbb{R}^n$ будем называть его *оператором сферического усреднения*) определяется по формуле

$$(S^t f)(x) := \frac{1}{|\sigma|} \int\limits_{\sigma} f(x + t\omega)\, d\omega, \quad t \geq 0. \tag{1.16}$$

В частности, при $n = 1$ оператор S^t имеет вид $(S^t f)(x) = \frac{1}{2}(f(x+t) + f(x-t))$. По непрерывности оператор S^t продолжается на гильбертово пространство $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Будем говорить, что функция $f(x)$ *принадлежит сферическому классу Липшица* $\mathrm{Lip}^s_{\mathbb{R}^n}(\alpha, 2)$, если $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|S^t f(x) - f(x)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(t^\alpha)$$

при $t \to 0$.

Аналогично тому, как доказывается теорема 2 (см. § 3), можно доказать следующее утверждение.

Теорема 4. *Если $f(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, а $\hat{f}(\lambda) = \hat{f}(t\omega)$ $(\lambda \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0,\ \omega \in \sigma^{n-1})$ — ее преобразование Фурье, то условия*

$$f \in \mathrm{Lip}^s_{\mathbb{R}^n}(\alpha, 2), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{1.17}$$

и

$$\int_r^\infty \int_{\sigma^{n-1}} |\hat{f}(t\omega)|^2 \, dt \, d\omega = O(r^{-2\alpha-n+1}) \tag{1.18}$$

при $r \to \infty$ эквивалентны.

Пусть функция $\hat{f}(\lambda)$ удовлетворяет условию (1.15). Переходим к полярным координатам $\lambda = t\omega$, $t \geq 0$, $\omega \in \sigma^{n-1}$. Тогда условие (1.15) перепишется в виде

$$\int_r^\infty \int_{\sigma^{n-1}} |\hat{f}(t\omega)|^2 \, t^{n-1} \, dt \, d\omega = O(r^{-2\alpha}). \tag{1.19}$$

Легко видеть, что условие (1.19) эквивалентно условию (1.18) (соответствующее рассуждение можно провести так же, как в доказательстве теоремы 2 доказывается эквивалентность равенств (3.13) и (3.14)), поэтому и условия (1.15) и (1.17) эквивалентны, откуда вытекает

Следствие 1. *Классы функций $\mathrm{Lip}_{\mathbb{R}^n}(\alpha, 2)$ и $\mathrm{Lip}^s_{\mathbb{R}^n}(\alpha, 2)$ совпадают.*

Теорема 4 и следствие 1 возникли как ответы на вопросы рецензента об аналогах теоремы 2 для евклидова пространства. Автор выражает благодарность рецензенту за ценные замечания и вопросы.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся некоторые вспомогательные результаты из гармонического анализа на симметрических пространствах.

Для любого $h \in G$ и для произвольной функции $f(x) \in C_0(X)$ положим

$$(T^h f)(x) := \int_K f(gkho) \, dk, \tag{2.1}$$

если $x = go$, $g \in G$. Проверим, что определение (2.1) корректно. Если x допускает другое представление $x = g_1 o$, $g_1 \in G$, то $g_1 = g\delta$ для некоторого $\delta \in K$. Пользуясь инвариантностью меры на группе K, получим

$$\int_K f(g_1 kho) \, dk = \int_K f(g\delta kho) \, dk = \int f(gkho) \, dk,$$

что доказывает корректность формулы (2.1).

Оператор T^h является другой формой оператора сдвига S^t. Это вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть h — элемент из группы G такой, что $d(ho, o) = t$. Тогда*

$$(T^h f)(x) = (S^t f)(x), \quad x \in X. \tag{2.2}$$

Доказательство. Для любой функции $f(x)$ на X и для $u \in G$ положим

$$(L_u f)(x) := f(ux).$$

Непосредственно проверяется, что оператор L_u перестановочен с оператором T^h, т. е.

$$L_u(T^h f) = T^h(L_u f), \quad f \in C_0(X),\ u, h \in G. \tag{2.3}$$

Так как элементы из группы G являются изометриями риманова многообразия X, имеем

$$L_u(S^t f) = S^t(L_u f), \quad t > 0,\ u \in G. \tag{2.4}$$

Пусть $x = go$, $g \in G$. Из (2.3) и (2.4) следует, что

$$(T^h f)(x) = (T^h f)(go) = (L_g(T^h f))(o) = (T^h(L_g f))(o),$$

$$(S^t f)(x) = (S^t f)(go) = (L_g(S^t f))(o) = (S^t(L_g f))(o).$$

Поэтому для доказательства того, что

$$\forall f \in C_0(X)\, \forall x \in X \quad (T^h f)(x) = (S^t f)(x),$$

достаточно показать, что

$$\forall f \in C_0(X) \quad (T^h f)(o) = (S^t f)(o). \tag{2.5}$$

Пусть $C(\sigma(o;t))$ — множество непрерывных функций на сфере $\sigma(o;t)$. Для $\varphi(x) \in C(\sigma(o;t))$ положим

$$I_1(\varphi) := (T^h \varphi)(o), \quad I_2(\varphi) := (S^t \varphi)(o),$$

при этом предполагается, что $\varphi(x)$ произвольным образом продолжена с $\sigma(o;t)$ до функции из $C_0(X)$, значения функционалов I_1 и I_2 не зависят от этого продолжения. Очевидно, что I_1 и I_2 — линейные положительные функционалы, инвариантные относительно действия группы K, т. е.

$$\forall k \in K \quad I_1(L_k \varphi) = I_1(\varphi),\ I_2(L_k \varphi) = I_2(\varphi).$$

Функционалы I_1и I_2 определяют K-инвариантные меры на сфере $\sigma(o;t)$. Так как любое симметрическое пространство ранга 1 является двухточечным однородным многообразием (см. [5, § 8.13]), то группа K транзитивно действует на сфере $\sigma(o,t)$, следовательно, K-инвариантная мера на $\sigma(o;t)$ единственна с точностью до множителя. Если взять функцию $\varphi_0(x) \equiv 1$, то

$$I_1(\varphi) = I_2(\varphi) = 1,$$

поэтому функционалы I_1 и I_2 совпадают, что доказывает (2.5) и (2.2).

Обычным образом определяется банахово пространство $L^p(X) = L^p(X, dx)$, $1 \le p < \infty$. Пусть $\|\cdot\|_p$ — норма в пространстве $L^p(X)$.

Лемма 2. *Для любой функции $f \in C_0(X)$ и любого $h \in G$ справедливо неравенство*

$$\|T^h f\|_p \le \|f\|_p. \tag{2.6}$$

Доказательство. Пусть $p > 1$. Если $\varphi(k)$ — произвольная непрерывная функция на группе K, то из того, что $\int\limits_K dk = 1$, и из неравенства Гёльдера следует, что

$$\left|\int\limits_K \varphi(k)\, dk\right|^p \le \int\limits_K |\varphi(k)|^p\, dk. \tag{2.7}$$

Очевидно, что неравенство (2.7) справедливо и при $p = 1$.

Пусть $f(x) \in C_0(X)$. Используя формулы (1.6) и (2.7) и инвариантность меры Хаара dg относительно правых сдвигов, получим

$$\begin{aligned}\|T^h f\|_p^p = \int\limits_X |T^h f(x)|^p\,dx = \int\limits_G |T^h f(go)|^p\,dg \\ = \int\limits_G \Big|\int\limits_K f(gkho)\,dk\Big|^p dg \le \int\limits_G \int\limits_K |f(gkho)|^p\,dk\,dg \\ = \int\limits_K \bigg(\int\limits_G |f(gkho)|^p\,dg\bigg)\,dk = \int\limits_K \bigg(\int\limits_G |f(go)|^p\,dg\bigg)\,dk = \|f\|_p^p,\end{aligned}$$

откуда вытекает неравенство (2.6).

Из неравенства (2.6) следует, что оператор T^h (а также оператор S^t) продолжается по непрерывности с плотного подпространства $C_0(X)$ на все пространство $L^p(X)$ (продолжения операторов T^h и S^t будем также обозначать через T^h и S^t), причем для продолженного оператора тоже справедливо неравенство (2.6). В частности,

$$\|S^t f\|_2 \le \|f\|_2, \quad f \in L^2(X). \tag{2.8}$$

В гармоническом анализе на симметрических пространствах большую роль играют сферические функции (см., например, [2] или [14]). Для $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ через $\varphi_\lambda(g)$ обозначим сферическую функцию на группе G, которая задается формулой Хариш-Чандры

$$\varphi_\lambda(g) = \int\limits_K e^{(i\lambda+\rho)(A(kg))}\,dk, \quad g \in G \tag{2.9}$$

(все обозначения введены в § 1). Отметим некоторые свойства сферических функций:

$$\varphi_\lambda(u_1 g u_2) = \varphi_\lambda(g), \quad u_1, u_2 \in K; \tag{2.10}$$

$$\varphi_\lambda(g^{-1}) = \varphi_\lambda(g), \quad g \in G; \tag{2.11}$$

$$\varphi_\lambda(e) = 1. \tag{2.12}$$

Лемма 3 (преобразование Фурье оператора сдвига). *Если* $\Phi(f)(\lambda, b) := \hat f(\lambda, b)$ *— преобразование Фурье функции* $f(x) \in L^2(X)$, *то*

$$\Phi(T^h f)(\lambda, b) = \varphi_\lambda(h)\cdot \hat f(\lambda, b), \quad h \in G. \tag{2.13}$$

Доказательство. Так как подпространство $\mathscr{D}(X)$ всюду плотно в $L^2(X)$, достаточно доказать формулу (2.13) для $f \in \mathscr{D}(X)$. Напомним, что для любого $g \in G$ элемент $A(g) \in \mathfrak{a}$ определяется из разложения Ивасавы

$$g = n \cdot \exp A(g) \cdot u, \tag{2.14}$$

где $u \in K$, $n \in N$. Пусть $g, h \in G$, $k \in K$. Пользуясь тем, что

$$kgh = n \cdot \exp(A(kg)) \cdot u(kg) \cdot h$$

($n \in N$, $u(kg) \in K$), и учитывая, что подгруппа A в разложении Ивасавы нормализует подгруппу N, получаем

$$A(kgh) = A(kg) + A(u(kg)h). \tag{2.15}$$

Для сокращения записи формул введем обозначение

$$e_\lambda(g) := e^{(-i\lambda+\rho)(A(g))}, \quad g \in G.$$

Из определения преобразования Фурье следует, что

$$\widehat{T^h f}(\lambda, b) = \int\limits_G \left(\int\limits_K f(gvho)\, dv \right) e_\lambda(k^{-1}g)\, dg, \tag{2.16}$$

где $b = kM$, $k \in K$. Воспользовавшись инвариантностью меры dg и тем, что $uo = o$ и $A(gu) = A(g)$ при $u \in K$, преобразуем правую часть в (2.16):

$$\widehat{T^h f}(\lambda, b) = \int\limits_K \int\limits_G f(gvhv^{-1}o) e_\lambda(k^{-1}g)\, dg dv$$

$$= \int\limits_K \int\limits_G f(go)\, e_\lambda(k^{-1}gvh^{-1}v^{-1})\, dg\, dv = \int\limits_G f(go) \left(\int\limits_K e_\lambda(k^{-1}gvh^{-1})\, dv \right) dg. \tag{2.17}$$

Используя соотношение (2.15), получим

$$e_\lambda(k^{-1}gvh^{-1}) = e_\lambda(k^{-1}g) \cdot e_\lambda(uvh^{-1}),$$

где $u = u(k^{-1}g)$. Подставим это выражение в (2.17), тогда

$$\widehat{T^h f}(\lambda, b) = \int\limits_G f(go) e_\lambda(k^{-1}g) \left(\int\limits_K e_\lambda(uvh^{-1})\, dv \right) dg$$

$$= \varphi_\lambda(h^{-1}) \hat{f}(\lambda, b) = \varphi_\lambda(h) \cdot \hat{f}(\lambda, b).$$

Пусть h_1 и h_2 — два элемента из группы G такие, что $d(h_1 o, o) = d(h_2 o, 0) = t$. Так как X — двухточечное однородное пространство (см. [5]), то группа K транзитивно действует на сфере $\sigma(o;t)$, следовательно, $h_2 o = u h_1 o$ для некоторого $u \in K$. Поскольку группа K является стационарной подгруппой точки o, то из $h_2 o = u h_1 o$ следует, что $h_2 = u h_1 v$ для некоторого $v \in K$. Тогда из свойства (2.10) вытекает, что $\varphi_\lambda(h_1) = \varphi_\lambda(h_2)$, поэтому сферическая функция $\varphi_\lambda(h)$ фактически зависит только от расстояния $t = d(ho, o)$ и мы будем часто писать $\varphi_\lambda(t)$ вместо $\varphi_\lambda(h)$ при $t = d(ho, o)$. С учетом леммы 1 формулу (2.13) можно переписать в виде

$$\Phi(S^t f)(\lambda, b) = \varphi_\lambda(t) \cdot \hat{f}(\lambda, b), \quad t \in \mathbb{R}_+ = [0; +\infty). \tag{2.18}$$

Отметим также, что $\varphi_\lambda(h) = \varphi_{-\lambda}(h)$, поэтому всюду будем предполагать, что $\lambda \in \mathbb{R}_+$ (как в § 1, мы используем отождествление $\mathfrak{a}^*$ с $\mathbb{R}$ для симметрического пространства ранга 1).

Лемма 4 (оценки для сферических функций). *Для сферической функции* $\varphi_\lambda(t)$ $(\lambda, t \in \mathbb{R}_+)$ *справедливы следующие неравенства:*

1) $|\varphi_\lambda(t)| \le 1$, *причем равенство достигается только при* $t = 0$*;*

2) $1 - \varphi_\lambda(t) \le t^2(\lambda^2 + \rho^2)$*;*

3) *существует постоянная* $c > 0$ *такая, что*

$$1 - \varphi_\lambda(t) \ge c \tag{2.19}$$

при $\lambda t \ge 1$.

Доказательство. См. [15, леммы 3.1–3.3].

§ 3. Доказательство теоремы 2

Доказательство импликации (1.12) $\Rightarrow$ (1.13). Предположим, что для функции $f(x) \in L_2(X)$ выполняется условие (1.12), т. е.

$$\|S^t f - f\|_2 = O(t^\alpha) \tag{3.1}$$

при $t \to 0$. Из формулы Планшереля и формулы (2.18) вытекает, что

$$\|S^t f - f\|_2^2 = \int\limits_X |S^t f(x) - f(x)|^2\, dx = \int\limits_0^\infty \int\limits_B |1 - \varphi_\lambda(t)|^2 |\hat{f}(\lambda, b)|^2\, d\mu(\lambda) db. \tag{3.2}$$

Для сокращения записи формул введем обозначение

$$F(\lambda) := \int\limits_B |\hat{f}(\lambda, b)|^2\, db. \tag{3.3}$$

Из (3.2) и (3.3) следует, что условие (3.1) можно переписать в виде

$$\int\limits_0^\infty |1 - \varphi_\lambda(t)|^2 F(\lambda)\, d\mu(\lambda) = O(t^{2\alpha}). \tag{3.4}$$

Напомним, что

$$d\mu(\lambda) = |c(\lambda)|^{-2}\, d\lambda,$$

где $c(\lambda)$ — функция Хариш-Чандры для симметрического пространства X. Найдем асимптотику для функции $|c(\lambda)|^{-2}$ при $\lambda \to +\infty$. Если $A(\lambda) > 0$ и $B(\lambda) > 0$ — некоторые функции, то будем использовать обозначение

$$A(\lambda) \asymp B(\lambda)$$

при $\lambda \to \infty$, если существуют постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, для которых

$$c_1 B(\lambda) \le A(\lambda) \le c_2 B(\lambda).$$

Всюду в дальнейшем $c_1, c_2, c_3, \dots$ — некоторые положительные постоянные в формулах.

В явном виде функцию $c(\lambda)$ можно выразить через Г-функцию Эйлера (см. [2, гл. 4, § 6]). В частности, когда X — симметрическое пространство ранга 1, справедлива формула

$$(c(\lambda))^{-1} = c_0 \frac{\Gamma(\frac{1}{4}m_\alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda)\Gamma(\frac{1}{4}m_\alpha + \frac{1}{2}m_{2\alpha} + \frac{1}{2}\lambda)}{\Gamma(\frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}\lambda)}, \tag{3.5}$$

где c_0 — некоторая постоянная, m_α и $m_{2\alpha}$ — кратности корней α и 2α в Σ_+ (см. § 1).

Из известного предельного соотношения

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \frac{\Gamma(\lambda + a)}{\Gamma(\lambda)\lambda^a} = 1$$

(см., например, [16]) и формулы (3.5) вытекает, что

$$|c(\lambda)|^{-2} \asymp \lambda^{m_\alpha + m_{2\alpha}},$$

а так как $m_\alpha + m_{2\lambda} + 1 = n$ — размерность многообразия X, то

$$|c(\lambda)|^{-2} \asymp \lambda^{n-1}, \quad n = \dim X. \tag{3.6}$$

Если $\lambda \in \left[\frac{1}{t}, \frac{2}{t}\right]$, то $\lambda t \geq 1$ и из неравенства (2.19) следует, что

$$1 \leq \frac{1}{c^2}|1 - \varphi_\lambda(t)|^2. \tag{3.7}$$

Тогда

$$\int\limits_{1/t}^{2/t} F(\lambda)\, d\mu(\lambda) \leq \frac{1}{c^2} \int\limits_{1/t}^{2/t} |1 - \varphi_\lambda(t)|^2 F(\lambda)\, d\mu(\lambda)$$

$$\leq \frac{1}{c^2} \int\limits_0^\infty |1 - \varphi_\lambda(t)|^2\, F(\lambda)\, d\mu(\lambda) = O(t^{2\alpha}). \tag{3.8}$$

Из (3.8) и (3.6) вытекает, что

$$\int\limits_{1/t}^{2/t} F(\lambda)\lambda^{n-1}\, d\lambda = O(t^{2\alpha}) \tag{3.9}$$

при $t \to 0$ или, эквивалентно,

$$\int\limits_r^{2r} F(\lambda)\lambda^{n-1}\, d\lambda = O(r^{-2\alpha}) \tag{3.10}$$

при $r \to +\infty$. Отметим, что (3.10) можно переписать в эквивалентной форме:

$$\int\limits_r^{2r} F(\lambda)\, d\lambda = O(r^{-2\alpha-n+1}) \tag{3.11}$$

при $r \to +\infty$.

Из (3.11) следует, что

$$\int\limits_r^{2r} F(\lambda)\, d\lambda \leq c_1 r^{-2\alpha-n+1}, \tag{3.12}$$

где $c_1 > 0$ — некоторая постоянная. Используя это неравенство, получим

$$\int\limits_r^\infty F(\lambda)\, d\lambda = \sum_{k=0}^\infty \int\limits_{2^k r}^{2^{k+1} r} F(\lambda)\, d\lambda \leq \sum_{k=0}^\infty c_1 (2^k r)^{-2\alpha-n+1} \leq c_2 r^{-2\alpha-n+1},$$

что доказывает (1.13). Поэтому из (1.12) вытекает (1.13).

Доказательство импликации (1.13) $\Rightarrow$ (1.12). Предположим, что для функции $f(x)$ выполняется условие (1.13), т. е.

$$\int\limits_r^\infty F(\lambda)\, d\lambda = O(r^{-2\alpha-n+1}) \tag{3.13}$$

при $r \to \infty$. Из (3.13) следует, что

$$\int\limits_{r}^{2r} F(\lambda)\, d\lambda = O(r^{-2\alpha-n+1}),$$

откуда

$$\int\limits_{r}^{2r} F(\lambda)\lambda^{n-1}\, d\lambda \le 2^{n-1} r^{n-1} \int\limits_{r}^{2r} F(\lambda)\, d\lambda \le c_3\, r^{-2\alpha}.$$

Далее,

$$\int\limits_{r}^{\infty} F(\lambda)\lambda^{n-1}\, d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{2^k r}^{2^{k+1} r} F(\lambda)\lambda^{n-1}\, d\lambda \le c_3 \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-2\alpha k} r^{-2\alpha} \le c_4 r^{-2\alpha}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{r}^{\infty} F(\lambda)\lambda^{n-1}\, d\lambda = O(r^{-2\alpha}),$$

и с учетом (3.6)

$$\int\limits_{r}^{\infty} F(\lambda)\, d\mu(\lambda) = O(r^{-2\alpha}). \tag{3.14}$$

Перепишем формулу (3.2) в виде

$$\|S^t f - f\|_2^2 = I_1 + I_2, \tag{3.15}$$

где

$$I_1 = \int\limits_{0}^{1/t} |1 - \varphi_\lambda(t)|^2 F(\lambda)\, d\mu(\lambda), \tag{3.16}$$

$$I_2 = \int\limits_{1/t}^{\infty} |1 - \varphi_\lambda(t)|^2 F(\lambda)\, d\mu(\lambda). \tag{3.17}$$

Оценим сверху слагаемые I_1 и I_2. Из (3.14) и неравенства $|\varphi_\lambda(t)| \le 1$ следует, что

$$I_2 = \int\limits_{1/t}^{\infty} |1 - \varphi_\lambda(t)|^2 F(\lambda)\, d\mu(\lambda) \le 4 \int\limits_{1/t}^{\infty} F(\lambda)\, d\mu(\lambda) = O(t^{2\alpha}). \tag{3.18}$$

Для оценки I_1 используем неравенства 1 и 2 из леммы 4:

$$I_1 = \int\limits_{0}^{1/t} |1 - \varphi_\lambda(t)|^2 F(\lambda)\, d\mu(\lambda) \le 2 \int\limits_{0}^{1/t} |1 - \varphi_\lambda(t)| F(\lambda)\, d\mu(\lambda)$$

$$\le 2t^2 \int\limits_{0}^{1/t} (\lambda^2 + \rho^2)\, F(\lambda)\, d\mu(\lambda) = I_3 + I_4, \tag{3.19}$$

где

$$I_3 = 2\rho^2 t^2 \int\limits_0^{1/t} F(\lambda)\, d\mu(\lambda), \quad I_4 = 2t^2 \int\limits_0^{1/t} \lambda^2\, F(\lambda)\, d\mu(\lambda).$$

Заметим, что

$$I_3 \le 2\rho^2 t^2 \int\limits_0^{\infty} F(\lambda)\, d\mu(\lambda) = 2\rho^2 t^2 \|f\|_2^2 = O(t^{2\alpha}), \tag{3.20}$$

так как $2\alpha < 2$ (при этом использовано равенство Парсеваля).

Обозначим

$$\psi(r) := \int\limits_r^{\infty} F(\lambda)\, d\mu(\lambda).$$

Используя интегрирование по частям, получим, что

$$I_4 = 2t^2 \int\limits_0^{1/t} (-r^2\psi'(r))\, dr = 2t^2 \left(-\frac{1}{t^2}\psi\left(\frac{1}{t}\right) + 2\int\limits_0^{1/t} r\,\psi(r)\, dr \right)$$

$$= -2\psi\left(\frac{1}{t}\right) + 4t^2 \int\limits_0^{1/t} r\psi(r)\, dr.$$

Так как $\psi(r) = O(r^{-2\alpha})$ (см. (3.14)), имеем $r\psi(r) = O(r^{1-2\alpha})$ и

$$\int\limits_0^{1/t} r\psi(r)\, dr = O\left(\int\limits_0^{1/t} r^{1-2\alpha}\, dr \right) = O(t^{2\alpha-2}).$$

Следовательно,

$$I_4 = O(t^{2\alpha}). \tag{3.21}$$

Окончательно, из (3.15), (3.18)–(3.21) вытекает, что

$$\|S^t f - f\|_2^2 = O(t^{2\alpha})$$

при $t \to 0$, т. е. из (1.13) следует (1.12), что завершает доказательство теоремы 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хелгасон С.* Дифференциальная геометрия и симметрические пространства. М.: Мир, 1964.
2. *Хелгасон С.* Группы и геометрический анализ: Интегральная геометрия, инвариантные дифференциальные операторы и сферические функции. М.: Мир, 1987.
3. *Helgason S.* Geometric analysis on symmetric spaces. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1994.
4. *Helgason S.* Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces. New York: Acad. Press, 1978.
5. *Вольф Дж. А.* Пространства постоянной кривизны. М.: Наука, 1982.
6. *Бессе А.* Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: Мир, 1981.
7. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. М.: ОГИЗ; Гостехиздат, 1948.
8. *Helgason S.* A duality for symmetric spaces with applications to group representations // Adv. Math. 1970. V. 5, N 1. P. 1–154.
9. *Никольский С. М., Лизоркин П. И.* Функциональные пространства на сфере, связанные с теорией приближений // Мат. заметки. 1987. Т. 41, № 4. С. 509–516.

10. *Никольский С. М., Лизоркин П. И.* Аппроксимация функций на сфере // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1987. Т. 51, № 3. С. 635–651.
11. *Лизоркин П. И., Рустамов Х. П.* Пространства Никольского — Бесова на сфере в связи с теорией приближения // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1993. Т. 204. С. 172–200.
12. *Рустамов Х. П.* О приближении функций на сфере // Изв. РАН. Сер. мат. 1993. Т. 57, № 5. С. 127–148.
13. *Younis M. S.* Fourier transforms of Lipschitz functions on the hyperbolic plane // Internat. J. Math. & Math. Sci. 1998. V. 21, N 2. P. 397–401.
14. *Gangolli R., Varadarajan V. S.* Harmonic analysis of spherical functions on real reductive groups. Berlin etc.: Springer-Verl., 1988.
15. *Платонов С. С.* Приближение функций в метрике L_2 на некомпактных симметрических пространствах ранга 1 // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 1. С. 244–270.
16. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1978.

Статья поступила 26 мая 2004 г., окончательный вариант — 24 мая 2005 г.

Платонов Сергей Сергеевич
Петрозаводский гос. университет, математический факультет,
пр. Ленина, 33, Петрозаводск 185640
`platonov@psu.karelia.ru`