*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2005. Том 46, № 6*

*УДК 519.214*

# КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ ТЕОРЕМЫ КРАМЕРА — ЛУНДБЕРГА ОБ АСИМПТОТИКЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМУМА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ СНОСОМ

**Д. А. Коршунов**

**Аннотация:** Изучается асимптотическое поведение распределения максимума $M = \max\{0, S_n, n \geq 1\}$ частичных сумм $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots$ с отрицательным средним значением. Рассматривается так называемая крамеровская ситуация, когда найдется такое $\beta > 0$, что $\mathbf{E}e^{\beta\xi_1} = 1$. В классической теореме, восходящей к Лундбергу и Крамеру, доказывается экспоненциальное убывание вероятностей больших уклонений $M$ в предположении конечности среднего $\mathbf{E}\xi_1 e^{\beta\xi_1}$. В настоящей заметке основное внимание уделено критическому случаю, когда $\mathbf{E}\xi_1 e^{\beta\xi_1} = \infty$.

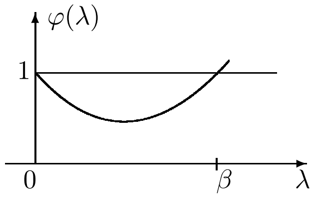
**Ключевые слова:** максимум случайного блуждания, вероятности больших уклонений, легкие хвосты, экспоненциальная замена меры, функция урезанного среднего значения.

Пусть $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots$ — последовательность независимых случайных величин с общим распределением $F$, а $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $S_0 = 0$. Предполагаем, что $\mathbf{E}\xi < 0$, причем случай $\mathbf{E}\xi = -\infty$ не исключается. Тогда $S_n \to -\infty$ с вероятностью 1 и максимум $M = \max\limits_{n \geq 0} S_n$ конечен с вероятностью 1. Предполагаем также $\mathbf{P}\{\xi > 0\} > 0$, так что $\mathbf{P}\{M > 0\} > 0$.

В настоящей заметке рассматривается такое распределение $F$, что случайная величина $\xi$ имеет некоторый экспоненциальный момент $\varphi(\lambda) \equiv \mathbf{E}e^{\lambda\xi}$, т. е. значение

$$\lambda_+ = \sup\{\lambda \geq 0 : \varphi(\lambda) < \infty\}$$

не равно нулю. Так как $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = \mathbf{E}\xi < 0$ и функция $\varphi(\lambda)$ выпукла, то типичный график функции $\varphi(\lambda)$ выглядит так:




Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00810) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–2139.2003.1).

Положим $\beta = \sup\{\lambda > 0 : \varphi(\lambda) \le 1\}$. Тогда $\beta > 0$ и, кроме того, $\beta$ конечно в силу $\mathbf{P}\{\xi > 0\} > 0$.

Согласно результатам, восходящим к Лундбергу и Крамеру, справедлива оценка $\mathbf{P}\{M > x\} \le e^{-\beta x}$, верная для любого $x \ge 0$. Кроме того, если $\varphi(\beta) = 1$ и $\varphi'(\beta) < \infty$, то имеет место асимптотика

$$\mathbf{P}\{M > x\} \sim ce^{-\beta x} \quad \text{при } x \to \infty, \tag{1}$$

где $c > 0$ — некоторая константа (в нерешетчатом случае; в решетчатом случае следует взять $x$ кратным шагу решетки), см., например, [1; 2, гл. XIII, § 5; 3, § 21] или [4, гл. XII, § 5]. В [5] доказано обратное утверждение: если имеет место экспоненциальная асимптотика (1), то $\varphi(\beta) = 1$ и $\varphi'(\beta) < \infty$.

Асимптотическое поведение хвоста $\mathbf{P}\{M > x\}$ в случае $\varphi(\beta) = 1$, $\varphi'(\beta) = \infty$ (в этом случае, естественно, $\beta = \lambda_+$) до сих пор остается мало изученным. Хорошо известно (см., например, [4, гл. XII, § 5]), что в этом случае с необходимостью $\mathbf{P}\{M > x\} = o(e^{-\beta x})$ при $x \to \infty$. Единственный известный нам результат относительно истинной асимптотики хвоста $\mathbf{P}\{M > x\}$ в случае бесконечного значения $\varphi'(\beta)$ содержится в [3, § 21, с. 178]. В [3] в случае правильного изменения $e^{\beta t}\mathbf{P}\{\xi > t\}$ найдена асимптотика (также правильно меняющаяся) интеграла $\int_0^x e^{\beta t}\mathbf{P}\{M > t\}\,dt$, что с предположением (практически непроверяемым) о монотонности подынтегральной функции дает асимптотику и самой функции $e^{\beta x}\mathbf{P}\{M > x\}$. В предлагаемой работе с помощью нового подхода находится асимптотика $\mathbf{P}\{M > x\}$ при $x \to \infty$.

Итак, пусть $\varphi(\beta) = 1$ и $\varphi'(\beta) = \infty$. Экспоненциальная замена меры (преобразование Крамера) $G(dx) = e^{\beta x}F(dx)$ приводит снова к вероятностному распределению. Распределение $G$ имеет тяжелый хвост $\overline{G}(x) = G(x, \infty)$, т. е. оно не имеет конечных экспоненциальных моментов с положительным показателем. Введем в рассмотрение последовательность независимых случайных величин $\eta$, $\eta_1$, $\eta_2$, ... с общим распределением $G$. Обозначим $T_n = \eta_1 + \dots + \eta_n$, $T_0 = 0$. Имеем $\mathbf{E}\eta = \varphi'(\beta) = \infty$. Поэтому $T_n \to \infty$ п. н. при $n \to \infty$.

Обозначим номер первой неотрицательной суммы среди $S_n$ символом $\sigma = \min\{n \ge 1 : S_n \ge 0\}$, а соответствующее распределение первой неотрицательной суммы — через $F_+(B) = \mathbf{P}\{S_\sigma \in B\}$. Так как $\mathbf{E}\xi < 0$, распределение $F_+$ несобственное, т. е. $F_+[0, \infty) < 1$.

Обозначим номер первой неотрицательной суммы среди $T_n$ символом $\tau = \min\{n \ge 1 : T_n \ge 0\}$, а соответствующее распределение первой неотрицательной суммы — через $G_+(B) = \mathbf{P}\{T_\tau \in B\}$. Поскольку $\mathbf{E}\eta > 0$, распределение $G_+$ собственное, т. е. $G_+[0, \infty) = 1$. Кроме того (см., например, [2, гл. VIII, теорема 2.3(c)]), $\mathbf{E}\tau < \infty$ и

$$p \equiv \mathbf{P}\{T_n \ge 0 \text{ для всех } n \ge 1\} = \frac{1}{\mathbf{E}\tau}. \tag{2}$$

Имеем $0 < p < 1$. Обозначим урезанное среднее значение распределения $G$ через

$$m(x) = \int_0^x \overline{G}(y)dy. \tag{3}$$

Величина $m(x)$ стремится к бесконечности при $x \to \infty$ в том и только в том случае, когда $\mathbf{E}\eta = \varphi'(\beta) = \infty$.

**Теорема 1.** *Пусть распределение $F$ нерешетчато, $\varphi'(\beta) = \infty$ и, кроме того, хвост $\overline{G}(x)$ правильно меняется (при $x \to \infty$) с показателем $-\alpha$, $\alpha \in (0, 1]$. Тогда имеет место оценка снизу*

$$\liminf_{x\to\infty} \mathbf{P}\{M > x\} m(x) e^{\beta x} \geq \frac{p}{\beta\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)}.$$

*Если $\alpha \in (1/2, 1]$, то при $x \to \infty$ имеет место асимптотическая эквивалентность*

$$\mathbf{P}\{M > x\} \sim \frac{p}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)} \frac{e^{-\beta x}}{\beta m(x)}.$$

**Теорема 2.** *Пусть распределение $F$ сосредоточено на решетке $\mathbf{Z}^+$, причем эта решетка минимальна. Если $\varphi'(\beta) = \infty$ и $\overline{G}(x)$ правильно меняется с показателем $-\alpha$, $\alpha \in (0, 1)$, то имеет место оценка снизу*

$$\liminf_{k\to\infty} \mathbf{P}\{M = k\} k\overline{G}(k) e^{\beta k} \geq \frac{p \cdot \sin \pi\alpha}{\pi}.$$

*Если $\alpha \in (1/2, 1)$, то при $k \to \infty$ имеет место асимптотическая эквивалентность*

$$\mathbf{P}\{M = k\} \sim \frac{p \cdot \sin \pi\alpha}{\pi} \frac{e^{-\beta k}}{k\overline{G}(k)}.$$

*Последняя эквивалентность распространяется и на случай $\alpha \in (0, 1/2]$, если последовательность $G\{k\}$ убывает начиная с некоторого $k$.*

Напомним некоторые соотношения между функциями $m(x)$, $\overline{G}(x)$ и $\overline{F}(x)$ в нерешетчатом случае. Если $\alpha \in [0, 1)$, то (см. [6, гл. XIII, § 5])

$$m(x) \sim \frac{x\overline{G}(x)}{1-\alpha} \quad \text{при } x \to \infty.$$

Если функция $e^{\beta x}\overline{F}(x)$ правильно меняется с показателем $-\gamma$, $\gamma \in (1, 2]$, то

$$\overline{G}(x) = -\int_x^\infty e^{\beta y} d\overline{F}(y) = e^{\beta x}\overline{F}(x) + \beta \int_x^\infty \overline{F}(y) e^{\beta y} dy \sim \frac{\beta}{\gamma - 1} x\overline{F}(x) e^{\beta x}.$$

Таким образом, если функция $e^{\beta x}\overline{F}(x)$ правильно меняется с показателем $-\gamma$, $\gamma \in (1, 2)$, то функция $\overline{G}(x)$ также правильно меняется, причем с показателем $-\alpha = 1 - \gamma$, и

$$m(x) \sim \frac{\beta}{(\gamma-1)(2-\gamma)} x^2 \overline{F}(x) e^{\beta x}.$$

Однако из правильного изменения хвоста $\overline{G}(x)$ нельзя, вообще говоря, вывести правильное изменение функции $e^{\beta x}\overline{F}(x)$. Для доказательства правильного изменения последней необходимо иметь информацию о *локальных* свойствах $G$. Именно поэтому в теоремах условие правильного изменения наложено на $\overline{G}(x)$, а не на $e^{\beta x}\overline{F}(x)$.

Доказательство теоремы 1 вытекает из лемм 1 и 2, доказываемых далее. Теорема 2 следует из лемм 1 и 4.

**Лемма 1.** *Справедливо равенство мер*

$$\mathbf{P}\{M \in B\} = \int_B e^{-\beta u} H_+(du)$$

*для $B \in \mathscr{B}(0, \infty)$, где мера восстановления $H_+$ построена по мере $G_+$:*

$$H_+(du) = \sum_{n=0}^\infty G_+^{*(n)}(du).$$

Доказательство. Для любых $n \in \mathbf{Z}^+$ и $u_0, \dots, u_n \in \mathbf{R}$ имеем равенства

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\{S_1 \in du_1, \dots, S_n \in du_n\} & \\
&= \mathbf{P}\{\xi_1 \in du_1\}\mathbf{P}\{u_1 + \xi_2 \in du_2\} \dots \mathbf{P}\{u_{n-1} + \xi_n \in du_n\} \\
&= e^{-\beta u_1}\mathbf{P}\{\eta_1 \in du_1\} e^{-\beta(u_2 - u_1)}\mathbf{P}\{u_1 + \eta_2 \in du_2\} \\
&\quad \times \dots \times e^{-\beta(u_n - u_{n-1})}\mathbf{P}\{u_{n-1} + \eta_n \in du_n\} \\
&= e^{-\beta u_n}\mathbf{P}\{\eta_1 \in du_1\}\mathbf{P}\{u_1 + \eta_2 \in du_2\} \dots \mathbf{P}\{u_{n-1} + \eta_n \in du_n\} \\
&= e^{-\beta u_n}\mathbf{P}\{T_1 \in du_1, \dots, T_n \in du_n\}.
\end{aligned}$$

Следовательно (можно было воспользоваться также равенством (5.1) из [2, гл. XIII, § 5]),

$$\mathbf{P}\{S_1 < 0, \dots, S_{n-1} < 0, S_n \in du\} = e^{-\beta u}\mathbf{P}\{T_1 < 0, \dots, T_{n-1} < 0, T_n \in du\}.$$

Просуммировав по $n \geq 1$, получаем равенство

$$F_+(du) = e^{-\beta u} G_+(du),$$

откуда и вытекает равенство леммы, поскольку при $u > 0$

$$\mathbf{P}\{M \in du\} = \sum_{n=0}^{\infty} F_+^{*(n)}(du).$$

**Лемма 2.** *Пусть распределение $G$ имеет длинный хвост, т. е. для любого фиксированного $t$*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{G}(x+t)}{\overline{G}(x)} = 1.$$

*Тогда $\overline{G}_+(x) \sim \overline{G}(x)/p$ при $x \to \infty$.*

Доказательство представляет собой усеченную модификацию доказательства леммы 1 из [7]. Определим следующую меру восстановления с запретом попадания на неотрицательную полуось:

$$H(B) = \mathbf{I}\{0 \in B\} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{T_1 < 0, \dots, T_n < 0, T_n \in B\}.$$

Эта мера конечная, так как $H(0, \infty) = 0$ и (см. (2))

$$H(-\infty, 0] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{T_1 < 0, \dots, T_n < 0\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\tau > n\} = \mathbf{E}\tau = 1/p < \infty.$$

Согласно формуле полной вероятности

$$\overline{G}_+(x) = \int_{-\infty}^{0} \overline{G}(x-t) H(dt). \tag{4}$$

Следовательно,

$$\frac{\overline{G}_+(x)}{\overline{G}(x)} = \int_{-\infty}^{0} \frac{\overline{G}(x-t)}{\overline{G}(x)} H(dt).$$

Подынтегральная функция не превосходит 1 и в силу наличия у $\overline{G}$ длинного хвоста при всяком фиксированном $t$ стремится к 1. Поэтому по теореме Лебега о мажорируемой сходимости имеем сходимость интеграла к $H(-\infty, 0] = 1/p$, откуда и вытекает утверждение леммы.

Чтобы воспользоваться леммой 1 для нахождения асимптотики хвоста распределения $M$, необходимо знание *локального* поведения меры восстановления

$H_+$. В [8, теоремы 1, 2] доказаны следующие утверждения для меры восстановления, построенной по нерешетчатым слагаемым с бесконечным средним: если функция $\overline{G}_+(x)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $-\alpha$, $\alpha \in (0,1]$, то для любого фиксированного $h > 0$ выполняется

$$\liminf_{x\to\infty} H_+(x, x+h] \int_0^x \overline{G}_+(y)dy = \frac{h}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)}; \tag{5}$$

если $\alpha \in (1/2, 1]$, то

$$\lim_{x\to\infty} H_+(x, x+h] \int_0^x \overline{G}_+(y)dy = \frac{h}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)}. \tag{6}$$

Нам неизвестны другие результаты (кроме анонсированной, но так и не доказанной теоремы В в [9]) относительно локальной теоремы восстановления в нерешетчатом случае для $\alpha \in (0, 1/2]$.

**Лемма 3.** *Пусть распределение $G$ нерешетчато, хвост $\overline{G}(x)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $-\alpha$, $\alpha \in (0,1]$, и $m(x) \to \infty$. Тогда для любого фиксированного $h > 0$ выполняется*

$$\liminf_{x\to\infty} H_+(x, x+h]m(x) \geq \frac{hp}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)};$$

*если $\alpha \in (1/2, 1]$, то*

$$\lim_{x\to\infty} H_+(x, x+h]m(x) = \frac{hp}{\Gamma(\alpha)\Gamma(2-\alpha)}.$$

Доказательство. Так как $m(x) \to \infty$ при $x \to \infty$, то по лемме 2

$$\int_0^x \overline{G}_+(y)dy \sim \frac{m(x)}{p}.$$

Далее пользуемся (5) и (6). Лемма доказана.

Сформулируем аналоги и усиление равенств (5) и (6) для решетчатых распределений. Пусть распределение $G_+$ сосредоточено на решетке $\mathbf{Z}^+$. В [10] доказано, что если $\overline{G}_+(x)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, то

$$\liminf_{k\to\infty} H_+\{k\}k\overline{G}_+(k) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}; \tag{7}$$

если $\alpha \in (1/2, 1)$, то

$$\lim_{k\to\infty} H_+\{k\}k\overline{G}_+(k) = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi}. \tag{8}$$

В случае $\alpha \in (0, 1/2]$ в работе [11, следствие 3-В] (см. также [12]) доказано, что если последовательность $G_+\{k\}$ убывает начиная с некоторого $k$, то также имеет место предел (8).

**Лемма 4.** *Пусть распределение $G$ сосредоточено на решетке $\mathbf{Z}^+$, причем эта решетка минимальна. Если последовательность $\overline{G}(k)$ правильно меняется на бесконечности с показателем $-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, то*

$$\liminf_{k\to\infty} H_+\{k\}k\overline{G}(k) \geq \frac{p \cdot \sin \pi\alpha}{\pi};$$

*если* $\alpha \in (1/2, 1)$, *то*

$$\lim_{x\to\infty} H_+\{k\} k\overline{G}(k) = \frac{p \cdot \sin \pi\alpha}{\pi}.$$

*Последний предел имеет место и в случае* $\alpha \in (0, 1/2]$, *если последовательность* $G\{k\}$ *убывает начиная с некоторого* $k$.

Доказательство. Первые два утверждения вытекают из леммы 2 и соотношений (7) и (8). Последнее утверждение леммы следует из того обстоятельства, что в силу представления (ср. с (4))

$$G_+\{k\} = \sum_{j=-\infty}^{0} G\{k-j\} H\{j\}$$

монотонность последовательности $G\{k\}$ влечет монотонность $G_+\{k\}$.

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Cramér H.* Collective risk theory. Stockholm: Esselte, 1955.
**2.** *Asmussen S.* Applied probability and queues. New York: Springer-Verl., 2003.
**3.** *Боровков А. А.* Вероятностные процессы в теории массового обслуживания. М.: Наука, 1972.
**4.** *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984. Т. 2.
**5.** *Korshunov D.* On distribution tail of the maximum of a random walk // Stochastic Process. Appl. 1997. V. 72. P. 97–103.
**6.** *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1987.
**7.** *Denisov D., Foss S., Korshunov D.* Tail asymptotics for the supremum of a random walk when the mean is not finite // Queueing Systems. 2004. V. 46. P. 15–33.
**8.** *Erickson K. B.* Strong renewal theorems with infinite mean // Trans. Amer. Math. Soc. 1970. V. 151. P. 263–291.
**9.** *Erickson K. B.* A renewal theorem for distributions on $R^1$ without expectation // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. P. 406–410.
**10.** *Garsia A., Lamperti J.* A discrete renewal theorem with infinite mean // Comment. Math. Helv. 1963. V. 37. P. 221–234.
**11.** *Williamson J. A.* Random walks and Riesz kernels // Pacific J. Math. 1968. V. 25. P. 393–415.
**12.** *deBruijn N. G., Erdös P.* On a recursion formula and on some Tauberian theorems // J. Res. Nat. Bur. Standarts. 1953. V. 50. P. 161–164.

*Статья поступила 29 ноября 2004 г.*

*Коршунов Дмитрий Алексеевич*
*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,*
*пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090*
korshunov@math.nsc.ru