*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2005. Том 46, № 6*

*УДК 514.132+512.817*

# ДИСКРЕТНЫЕ $\mathscr{RP}$–ГРУППЫ С ПАРАБОЛИЧЕСКИМ ПОРОЖДАЮЩИМ

**Е. Я. Клименко, Н. В. Коптева**

**Аннотация:** Рассмотрены двупорожденные подгруппы группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, для которых оба порождающих и их коммутатор имеют вещественные следы. Даны критерии дискретности таких групп в случае, когда хотя бы один из порождающих параболический. Приведен список соответствующих орбифолдов.

**Ключевые слова:** клейнова группа, дискретная группа, гиперболический орбифолд.

## § 1. Введение

Двупорожденная подгруппа $\Gamma = \langle f, g \rangle$ группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ определяется своими параметрами $\beta(f) = \mathrm{tr}^2 f - 4$, $\beta(g) = \mathrm{tr}^2 g - 4$ и $\gamma(f,g) = \mathrm{tr}[f,g] - 2$ с точностью до сопряжения, если $\gamma(f,g) \neq 0$ [1].

Мы рассматриваем класс *$\mathscr{RP}$-групп* (двупорожденных групп с вещественными параметрами):

$$\mathscr{RP} = \{\Gamma \mid \Gamma = \langle f, g \rangle \text{ для таких } f, g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C}), \text{ что } \beta(f), \beta(g), \gamma(f,g) \in \mathbb{R}\}.$$

Поскольку условия дискретности для элементарных, фуксовых и NEC-групп известны, мы рассматриваем только неэлементарные $\mathscr{RP}$-группы $\Gamma = \langle f, g \rangle$ без инвариантной плоскости. В данной статье мы изучаем случай, когда $f$ — эллиптический, параболический или гиперболический элемент (см. определения в начале § 2), а $g$ — параболический элемент. Приводим критерии дискретности таких групп (теорема 2.3) и для каждой дискретной группы $\Gamma$ получаем ее копредставление и соответствующий клейнов орбифолд $Q(\Gamma)$ (теорема 3.1). Теорема 2.3 была доказана в кандидатской диссертации первого автора [2], но ее доказательство до сих пор не было опубликовано.

Группы, порожденные двумя параболическими элементами, изучались ранее. В неопубликованной работе [3] Паркер дал критерий дискретности для произвольной группы, порожденной двумя параболическими элементами. Однако, чтобы воспользоваться этим критерием, необходимо проверить простое условие на *все* элементы группы. Фактически автор использует этот критерий, чтобы доказать красивое условие дискретности для фуксовых групп (утверждение 3.1) и $\mathscr{RP}$-групп (утверждение 3.2). Последнее утверждение и наше следствие 2.5 для случая $\beta(f) = 0$ следуют одно из другого.

В работе [4] Адамс привел некоторое необходимое условие дискретности неэлементарной подгруппы группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, порожденной двумя параболическими элементами. Он доказал существование универсальных оценок сверху

Работа частично поддержана грантом Колледжа Геттисбурга для исследования и профессионального развития, 2003–2004 гг.

на «длину» каждого параболического порождающего и на «расстояние» между ними (длины и расстояния измеряются на границах канонически выбранных каспов). Используя орбифолдную теорему Тёрстона, он также показал, что фундаментальная группа неэлементарного ориентируемого гиперболического трехмерного многообразия $M$ конечного объема порождена двумя параболическими элементами тогда и только тогда, когда $M$ является дополнением в $\mathbb{S}^3$ двумостового зацепления, не являющегося 2-косой. Эйгол [5] обобщил метод Адамса и классифицировал все ориентируемые 3-*орбифолды* с двумя параболическими порождающими.

## § 2. Критерии дискретности

Напомним, что элемент $f \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ с вещественным $\beta(f)$ называется *эллиптическим*, *параболическим*, *гиперболическим* или $\pi$-*локсодромическим* в зависимости от того, будет ли $\beta(f) \in [-4,0)$, $\beta(f) = 0$, $\beta(f) \in (0,+\infty)$ или $\beta(f) \in (-\infty,-4)$. Если $\beta(f) \notin [-4,+\infty)$, то $f$ называется *строго локсодромическим*. Среди всех строго локсодромических элементов только $\pi$-локсодромические имеют вещественный $\beta(f)$.

Всякий элемент $f \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ с вещественным $\beta(f)$ имеет инвариантные плоскости. Следующая лемма характеризует неэлементарные $\mathscr{RP}$-группы в терминах инвариантных плоскостей порождающих.

**Лемма 2.1.** *Пусть $\Gamma = \langle f,g\rangle$ — неэлементарная подгруппа группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ с вещественными параметрами $\beta(f)$ и $\beta(g)$. Тогда $\gamma(f,g)$ будет вещественным тогда и только тогда, когда либо*

(1) *$f$ и $g$ имеют общую инвриантную плоскость,*

*либо*

(2) *каждый из порождающих $f$ и $g$ имеет инвариантную плоскость, которая перпендикулярна всем инвариантным плоскостям второго порождающего.*

Доказательство следует из теорем 1–3 работы [6].

Замечание 2.2. Ясно, что все неэлементарные $\mathscr{RP}$-группы без инвариантной плоскости удовлетворяют условию (2) леммы 2.1. Теорема 2.3, приведенная ниже, характеризует все такие дискретные группы в случае, когда один из порождающих параболический, а другой имеет вещественный след.

Эллиптический элемент $f$ порядка $n$ называется *непримитивным*, если он является поворотом на угол $2\pi k/n$, где $k$ и $n$ взаимно просты ($1 < k < n/2$). Если $f$ является поворотом на угол $2\pi/n$, то он называется *примитивным*.

Легко видеть, что если $f$ — непримитивный эллиптический элемент порядка $n$, то существует целое число $r \geq 2$ такое, что $f^r$ — примитивный эллиптический элемент того же самого порядка $n$. Ясно, что $\langle f,g\rangle = \langle f^r,g\rangle$. Следовательно, мы можем предположить без ограничения общности, что эллиптический порождающий примитивен (см. также замечание 2.6).

**Теорема 2.3.** *Пусть $f \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ — гиперболический, параболический или примитивный эллиптический элемент порядка $n \geq 3$, пусть $g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ — параболический элемент, и пусть $\Gamma = \langle f,g\rangle$ — неэлементарная $\mathscr{RP}$-группа без инвариантной плоскости. Тогда*

(1) *существует элемент $h \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ такой, что $h^2 = fgf^{-1}g^{-1}$ и $(hg)^2 = 1$;*

(2) *$\Gamma = \langle f,g\rangle$ дискретна тогда и только тогда, когда $h$ — гиперболический, параболический или примитивный эллиптический элемент порядка $p \geq 3$.*

Доказательство. Начнем с построения группы отражений $\Gamma^*$, которая содержит группу $\Gamma$ в качестве подгруппы конечного индекса. Такая группа дискретна тогда и только тогда, когда $\Gamma$ дискретна. Затем найдем критерии дискретности для группы $\Gamma^*$ и перепишем их через простые условия на порождающие группы $\Gamma$.

**1. Построение группы $\Gamma^*$ и многогранника $\mathscr{T}$, ограниченного плоскостями отражений из $\Gamma^*$.** Пусть $f$ и $g$ такие, как описано в утверждении теоремы. Поскольку $\Gamma = \langle f, g\rangle$ неэлементарна, $f$ и $g$ не имеют общих неподвижных точек. Пусть $Q \in \partial\mathbb{H}^3$ — неподвижная точка элемента $g$, и пусть $\zeta$ — инвариантная плоскость элемента $f$, которая проходит через $Q$.

Поскольку $\Gamma = \langle f, g\rangle$ — неэлементарная $\mathscr{RP}$-группа без инвариантной плоскости, из леммы 2.1 следует, что существует инвариантная плоскость $\eta$ элемента $g$, которая перпендикулярна всем инвариантным плоскостям элемента $f$ и, в частности, плоскости $\zeta$. Заметим, что если $f$ эллиптический, то его ось лежит в плоскости $\eta$, а если $f$ гиперболический, то его ось перпендикулярна плоскости $\eta$.

Легко видеть, что существуют такие плоскости $\sigma$ и $\tau$, что $f = R_\sigma R_\eta$ и $g = R_\tau R_\zeta$ (мы обозначаем отражение в плоскости $\kappa$ через $R_\kappa$). Ясно, что $\tau$ и $\zeta$ параллельны, а $Q$ — их общая точка на абсолюте. Поскольку $\eta$ является инвариантной плоскостью элемента $g$, то $\eta$ перпендикулярна и плоскости $\tau$, и плоскости $\zeta$. Аналогично так как $\zeta$ является инвариантной плоскостью элемента $f$, то $\zeta$ перпендикулярна как плоскости $\sigma$, так и плоскости $\eta$.

Если $f$ эллиптический, то плоскости $\eta$ и $\sigma$ пересекаются под углом $\pi/n$; линия их пересечения будет осью элемента $f$ (рис. 1(а)). Если $f$ параболический, то $\eta$ и $\sigma$ параллельны, а $P$ — их общая точка на абсолюте (рис. 1(б)); более того, $\zeta$ проходит через точку $P$. Если же $f$ гиперболический, то плоскости $\eta$ и $\sigma$ расходятся, а ось элемента $f$ перпендикулярна как плоскости $\eta$, так и плоскости $\sigma$ (рис. 1(в)).

Рассмотрим полуобороты $e = R_\eta R_\zeta = R_\zeta R_\eta$, $e_f = R_\sigma R_\zeta$ и $e_g = R_\tau R_\eta$. Имеем

$$f = R_\sigma R_\eta = (R_\sigma R_\zeta)(R_\zeta R_\eta) = e_f e, \quad g = R_\tau R_\zeta = (R_\tau R_\eta)(R_\eta R_\zeta) = e_g e.$$

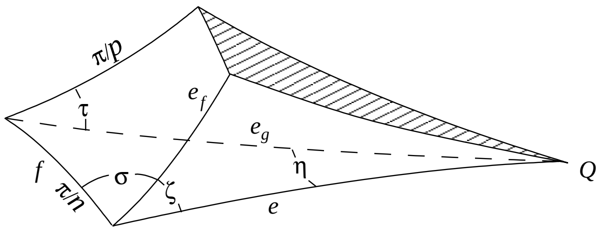
Для группы $\Gamma = \langle f, g\rangle$ определим два ее расширения конечного индекса следующим образом: $\widetilde{\Gamma} = \langle f, g, e\rangle$ и $\Gamma^* = \langle f, g, e, R_\eta\rangle$.

Нетрудно видеть, что $\widetilde{\Gamma} = \Gamma \cup \Gamma e$. Если $e \in \Gamma$, то $\widetilde{\Gamma} = \Gamma$, и если $e \notin \Gamma$, то $\Gamma$ является подгруппой индекса 2 в группе $\widetilde{\Gamma}$. Как мы увидим позже, обе возможности реализуются (см. конец доказательства теоремы 3.1). Поскольку, более того, $\widetilde{\Gamma}$ является сохраняющей ориентацию подгруппой индекса 2 в группе $\Gamma^*$, группы $\Gamma$, $\widetilde{\Gamma}$ и $\Gamma^*$ либо все дискретны, либо все не дискретны.

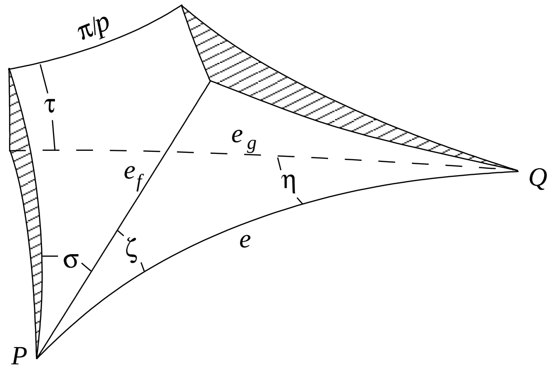
Очевидно, что $\Gamma^* = \langle R_\eta, R_\zeta, R_\sigma, R_\tau\rangle$.

Рассмотрим многогранник $\mathscr{T}$ бесконечного объема, ограниченный плоскостями $\eta$, $\zeta$, $\sigma$ и $\tau$. Как мы видели ранее, плоскости $\eta$ и $\zeta$, $\eta$ и $\tau$, $\zeta$ и $\sigma$ взаимно перпендикулярны; плоскости $\zeta$ и $\tau$ параллельны; плоскости $\eta$ и $\sigma$ в зависимости от типа элемента $f$ либо пересекаются под углом $\pi/n$, либо параллельны, либо расходятся. Плоскости $\sigma$ и $\tau$ могут либо пересекаться, либо быть параллельными, либо расходиться (это зависит от типа элемента $fgf^{-1}g^{-1}$, что мы покажем в части 2 доказательства).

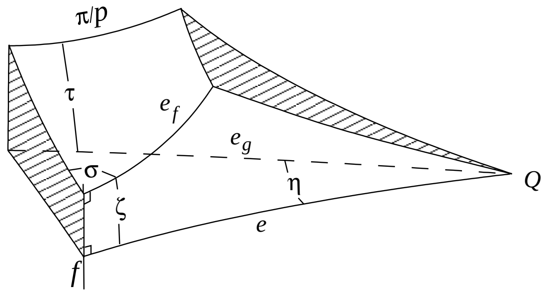
Если $\sigma$ и $\tau$ пересекаются, то двугранный угол многогранника $\mathscr{T}$, образованный этими плоскостями (обозначим его через $\pi/p$, $p$ не обязательно целое),




(а) $f$ эллиптический




(б) $f$ параболический




(в) $f$ гиперболический

Рис. 1. Фундаментальные многогранники для $\Gamma^*$.

будет острым. Действительно, существует гиперболическая плоскость $\kappa_1$, которая перпендикулярна плоскостям $\zeta$, $\sigma$ и $\tau$; такая плоскость проходит через точку $Q$. Плоскости $\zeta$, $\sigma$ и $\tau$ высекают гиперболический треугольник $\Delta$ с углами $0$, $\pi/2$ и $\pi/p$ в плоскости $\kappa_1$ ($\Delta$ заштрихован на рис. 1(а)–1(в)). Следовательно, $\pi/p < \pi/2$. Мы сохраняем обозначение $\pi/p$, считая $p = \infty$ и $p = \overline{\infty}$ в случаях, когда плоскости $\sigma$ и $\tau$ параллельны или расходятся соответственно. (Условимся, что $\overline{\infty} > \infty > x$, $x/\infty = x/\overline{\infty} = 0$, $\infty/x = \infty$ и $\overline{\infty}/x = \overline{\infty}$ для любого положительного вещественного $x$.)

Аналогично если $\eta$, $\sigma$ и $\tau$ не имеют общей точки в $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$, то существует перпендикулярная им гиперболическая плоскость $\kappa_2$. Плоскости $\kappa_1$ и $\kappa_2$ отсекают многогранник $\overline{\mathscr{T}}$ конечного объема от многогранника $\mathscr{T}$. По теореме Андреева многогранник $\overline{\mathscr{T}}$ и, следовательно, многогранник $\mathscr{T}$ существуют в гиперболическом пространстве для всех $p > 2$ [7, 8]. На самом деле именно многогранник $\overline{\mathscr{T}}$ изображен на рис. 1, причем в предположении, что $p < \infty$ и, более того, $1/p + 1/n > 1/2$ для рис. 1(а).

**2. Существование элемента $h$ и достаточное условие дискретности для группы** $\Gamma$**.** Понятно, что если

$$p \text{ целое } (p \geq 3),\ \infty \text{ или } \overline{\infty}, \tag{2.1}$$

то многогранник $\mathscr{T}$ и отражения $R_\eta$, $R_\zeta$, $R_\sigma$ и $R_\tau$ удовлетворяют условиям теоремы Пуанкаре [9], группа $\Gamma^*$ дискретна и $\mathscr{T}$ — ее фундаментальный многогранник.

Перепишем условие (2.1) через условия на элементы группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$.

Докажем, что в группе $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ существует единственный элемент $h$, для которого выполнены оба условия $h^2=[f,g]$ и $(hg)^2=1$; более того, $h=R_\sigma R_\tau$.

Поскольку $\langle f,g\rangle$ — неэлементарная $\mathscr{RP}$-группа, элемент $[f,g]$ будет либо параболическим, либо гиперболическим, либо эллиптическим. Если элемент $[f,g]$ параболический, он имеет только один квадратный корень; если $[f,g]$ гиперболический или эллиптический, то $[f,g]$ имеет в точности два квадратных корня $h$ и $\bar{h}$ в группе $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$. А именно, если $[f,g]$ гиперболический, то один из этих корней гиперболический, а другой — $\pi$-локсодромический. Если $[f,g]$ эллиптический, тогда оба корня $h$ и $\bar{h}$ — эллиптические элементы.

Покажем, что если мы возьмем $h=R_\sigma R_\tau$, то условия $h^2=[f,g]$ и $(hg)^2=1$ будут выполняться. Действительно,

$$\begin{aligned} h^2 = (R_\sigma R_\tau)^2 = (R_\sigma R_\zeta R_\zeta R_\tau)^2 = (e_f g^{-1})^2 \\ = (e_f e e_g)^2 = (e_f e)(e_g e)(e e_f)(e e_g) = fgf^{-1}g^{-1}. \end{aligned}$$

Более того, $hg=(R_\sigma R_\tau)(R_\tau R_\zeta)=R_\sigma R_\zeta=e_f$. Таким образом, $(hg)^2=e_f^2=1$.

Поясним, что представляет из себя элемент $\bar{h}$. Если $[f,g]$ гиперболический, то $\bar{h}$ является $\pi$-локсодромическим элементом с той же самой осью и длиной сдвига, что и $h$. Если $[f,g]$ эллиптический, то $\bar{h}$ является эллиптическим с той же самой осью, что и $h$, и с углом поворота $(\pi-2\pi/p)$, в то время как $h$ — это поворот на угол $2\pi/p$ в противоположном направлении. Ясно, что в обоих случаях $(\bar{h}g)^2\neq 1$.

Это означает, что единственный элемент $h$, который удовлетворяет обоим условиям $h^2=[f,g]$ и $(hg)^2=1$, может быть записан как $h=R_\sigma R_\tau$. Таким образом, часть (1) теоремы 2.3 доказана.

Элемент $h=R_\sigma R_\tau$ будет примитивным эллиптическим элементом порядка $p\geq 3$ тогда и только тогда, когда двугранный угол многогранника $\mathscr{T}$ при ребре $\sigma\cap\tau$ равен $\pi/p$, $p\in\mathbb{Z}$, $p\geq 3$; элемент $h$ будет параболическим (гиперболическим) тогда и только тогда, когда плоскости $\sigma$ и $\tau$ параллельны (соответственно расходятся).

Следовательно, мы доказали, что условие (2.1) эквивалентно условию:

$$\begin{gathered} h \text{ — гиперболический, параболический или примитивный} \\ \text{эллиптический элемент порядка } p\geq 3. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Значит, (2.2) влечет дискретность группы $\Gamma$.

**3. Достаточное условие (2.2) также является необходимым.** Действительно, предположим, что группа $\Gamma$ дискретна, но (2.2) не выполняется. Это означает, что $h$ является непримитивным эллиптическим элементом конечного порядка, т. е. $p=q/k>2$, где $q$ и $k$ взаимно просты, $k\geq 2$. Покажем, что это невозможно.

Рассмотрим гиперболическую плоскость $\kappa_1$, которая перпендикулярна плоскостям $\zeta$, $\sigma$ и $\tau$. Поскольку группа $\langle e_f, g\rangle \subset \widetilde{\Gamma}$ оставляет плоскость $\kappa_1$ инвариантной и сохраняет ее ориентацию, $\langle e_f, g\rangle$ действует на $\kappa_1$ как подгруппа группы $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. Однако из [10] или [11] следует, что $\langle e_f, g\rangle$ не дискретна, если $h = e_f g^{-1}$ — непримитивный эллиптический элемент, который в нашем случае будет поворотом на угол $2k\pi/q$.

Теорема 2.3 доказана.

Замечание 2.4. Для удобства читателя мы приводим описание многогранника $\mathscr{T}$ в модели верхнего полупространства трехмерного гиперболического пространства $\mathbb{H}^3 = \{(z,t) : z \in \mathbb{C}, t > 0\}$ с метрикой Пуанкаре $ds^2 = (|dz|^2 + dt^2)/t^2$.

Достаточно предположить, что в доказательстве теоремы 2.3 группа $\Gamma = \langle f, g\rangle$ нормализована таким образом, что $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, и неподвижными точками элемента $f$ являются $z_0$ и $-z_0$, $z_0 \in \mathbb{C}$. (Если $f$ параболический, то его единственной неподвижной точкой будет $z_0 = 0$.)

Предположим, что $f$ эллиптический. Поскольку $\Gamma$ — неэлементарная $\mathscr{RP}$-группа без инвариантной плоскости, обе неподвижные точки элемента $f$ лежат в инвариантной плоскости элемента $g$ по лемме 2.1. Принимая во внимание тот факт, что любая инвариантная плоскость элемента $g$ задается как множество $\{(z,t) \in \mathbb{H}^3 : \mathrm{Im}\, z = \mathrm{const}\}$, заключаем, что $z_0 = x_0$ — вещественное число.

Аналогично если $f$ гиперболический, то его неподвижные точки симметричны друг другу относительно инвариантной плоскости элемента $g$ и, значит, $z_0 = iy_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$.

Таким образом, мы нормализовали группу $\Gamma$ так, что $g(\infty) = \infty$, $g(0) = 1$, $f(z_0) = z_0$, $f(-z_0) = -z_0$, где $z_0$ равно $x_0$, $0$ или $iy_0$ ($x_0$ и $y_0$ — некоторые ненулевые вещественные числа), если $f$ эллиптический, параболический или гиперболический соответственно.

Тогда плоскости $\eta$, $\zeta$, $\sigma$ и $\tau$ в доказательстве задаются как

$$\eta = \{(z,t) \in \mathbb{H}^3 : \mathrm{Im}\, z = 0\};$$

$$\zeta = \{(z,t) \in \mathbb{H}^3 : \mathrm{Re}\, z = 0\};$$

$$\sigma = \{(z,t) \in \mathbb{H}^3 : |z - iy_\sigma|^2 + t^2 = r^2\},\ y_\sigma \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ r^2 = y_\sigma^2 + z_0^2;$$

$$\tau = \{(z,t) \in \mathbb{H}^3 : \mathrm{Re}\, z = 1/2\}.$$

Более того, $\kappa_1 = \{(z,t) \in \mathbb{H}^3 : \mathrm{Im}\, z = y_\sigma\}$ — плоскость, которая играет ключевую роль в части 3 доказательства. Ясно, что она перпендикулярна плоскостям $\zeta$, $\sigma$ и $\tau$.

В пространстве параметров $(\beta(f), \beta(g), \gamma(f,g))$ все дискретные группы, рассматриваемые в теореме 2.3, описывает

**Следствие 2.5.** *Пусть $f, g \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$, $\beta(f) \in [0, +\infty)$ или $\beta(f) = -4\sin^2(\pi/n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 3$, и пусть $\beta(g) = 0$. Предположим, что $\gamma(f,g) < 0$. Тогда $\Gamma = \langle f, g\rangle$ дискретна тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий:*

1) $\gamma(f,g) \in (-\infty; -4]$;

2) $\gamma(f,g) = -4\cos^2(\pi/p)$, $p \in \mathbb{Z}$, $p \geq 3$.

Доказательство. Поскольку $\Gamma = \langle f, g\rangle$ является $\mathscr{RP}$-группой и $\beta(g) = 0$, а $f$ не $\pi$-локсодромический, $\Gamma$ является неэлементарной группой без инвариантной плоскости тогда и только тогда, когда $\gamma(f,g) < 0$ [6, теорема 4]. Таким образом, очевидно, что предпосылки следствия 2.5 эквивалентны предпосылкам теоремы 2.3.

Поэтому, чтобы доказать следствие, достаточно переписать часть (2) теоремы 2.3 в терминах параметра $\gamma(f,g)$. Поскольку $\gamma(f,g) = \mathrm{tr}[f,g]-2$ и $[f,g] = h^2$, найти $\gamma(f,g)$ несложно.

Элемент $h$ является гиперболическим тогда и только тогда, когда плоскости $\sigma$ и $\tau$ расходятся (мы обозначаем плоскости так же, как и в доказательстве теоремы 2.3). Пусть $d$ — гиперболическое расстояние между ними. Так как $[f,g] = h^2 = (R_\sigma R_\tau)^2$, то

$$\gamma(f,g) = \mathrm{tr}[f,g] - 2 = -2\cosh(2d) - 2 < -4$$

(мы должны брать отрицательный $\mathrm{tr}[f,g]$, потому что $\gamma(f,g)$ отрицателен по условию).

Элемент $h$ является параболическим тогда и только тогда, когда $[f,g]$ параболический, т. е. когда $\mathrm{tr}[f,g] = -2$ ($\mathrm{tr}[f,g] = 2$ дало бы $\gamma(f,g) = 0$, что невозможно). Значит, $\gamma(f,g) = \mathrm{tr}[f,g] - 2 = -4$.

Таким образом, $h$ будет гиперболическим или параболическим тогда и только тогда, когда $\gamma(f,g) \in (-\infty,-4]$, и п. 1 следствия 2.5 доказан.

Теперь предположим, что $h$ — эллиптический элемент с углом поворота $\varphi$, где $\varphi/2 = \pi/p < \pi/2$ — двугранный угол многогранника $\mathscr{T}$ между $\sigma$ и $\tau$. Тогда $[f,g] = h^2$ также является эллиптическим элементом с углом поворота $2\varphi$. Поскольку $\mathrm{tr}[f,g]$ корректно определен (не зависит от выбора представителей элементов $f$ и $g$ в $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$), мы можем понять, какая формула: $\mathrm{tr}[f,g] = +2\cos\varphi$ или $\mathrm{tr}[f,g] = -2\cos\varphi$, верна. Наиболее простой способ сделать это — воспользоваться непрерывностью $\mathrm{tr}[f,g]$ как функции от $\varphi$ и предельным условием $\mathrm{tr}[f,g] \to -2$ при $\varphi \to 0$. Итак, нужно брать $\mathrm{tr}[f,g] = -2\cos\varphi$, где $\varphi < \pi$ — удвоенный двугранный угол многогранника $\mathscr{T}$.

Обратно, если дан $\mathrm{tr}[f,g]$, то мы можем воспользоваться формулой $\mathrm{tr}[f,g] = -2\cos\varphi$, $\varphi < \pi$, чтобы определить угол вращения $\varphi$ элемента $h$ из теоремы 2.3.

Таким образом, $h$ будет примитивным эллиптическим элементом порядка $p \geq 3$, т. е. $\varphi = 2\pi/p$, тогда и только тогда, когда

$$\gamma(f,g) = \mathrm{tr}[f,g] - 2 = -2\cos(2\pi/p) - 2 = -4\cos^2(\pi/p), \quad p \in \mathbb{Z},\ p \geq 3.$$

Следствие 2.5 доказано.

Замечание 2.6. В формулировке следствия 2.5 для простоты предполагается, что эллиптический порождающий $f$ примитивен. Если $f$ — непримитивный эллиптический элемент, следствие 2.5 все равно можно использовать для проверки дискретности группы, но для этого сначала нужно заменить тройку параметров $(\beta(f),\beta(g),\gamma(f,g))$, где $\beta(f) = -4\sin^2(k\pi/n)$, $(k,n) = 1$, $1 < k < n/2$, новой тройкой $(\tilde\beta,\beta(g),\tilde\gamma)$, где $\tilde\beta = -4\sin^2(\pi/n)$ и $\tilde\gamma = (\tilde\beta/\beta(f))\gamma(f,g)$. Новая тройка соответствует той же самой группе по результатам Геринга и Мартина [12].

## § 3. Клейновы орбифолды с параболическим порождающим

Пусть $\Gamma$ — неэлементарная клейнова группа. Обозначим через $\Omega(\Gamma)$ множество разрывности группы $\Gamma$. Следуя [13], назовем *клейновым орбифолдом*

$Q(\Gamma) = (\mathbb{H}^3 \cup \Omega(\Gamma))/\Gamma$ ориентируемый трехмерный орбифолд с полной гиперболической структурой на его внутренности $\mathbb{H}^3/\Gamma$ и конформной структурой на границе $\Omega(\Gamma)/\Gamma$.

Мы используем следующие обозначения.

• $GT[n,m;q] = \langle f, g \mid f^n = g^m = [f,g]^q = 1\rangle$, где $n,m,q \in \{2,3,\dots\} \cup \{\infty, \overline{\infty}\}$. Если некоторое соотношение имеет степень $\overline{\infty}$, то мы просто удаляем его из копредставления. Далее, если некоторое соотношение имеет степень $\infty$ и мы сохраним его в копредставлении, то получим копредставление клейновой группы. Чтобы получить копредставление абстрактной группы, нужно также удалить и это соотношение.

Например, группа $GT[n,\infty;\overline{\infty}]$ как клейнова группа имеет копредставление $\langle f, g \mid f^n = g^\infty = 1\rangle$ и изоморфна группе $\mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}$.

• $Tet[n,m;q] = \langle x,y,z \mid x^2 = y^2 = z^n = (xy^{-1})^m = (yz^{-1})^2 = (zx^{-1})^q = 1\rangle$, где $n,m,q \in \{2,3,\dots\} \cup \{\infty, \overline{\infty}\}$. Для конечных $n$, $m$ и $q$ эта группа является группой тетраэдра, порожденной поворотами вокруг ребер одной грани ортосхемы с диаграммой Кокстера $\circ\overset{n}{-}\circ\overset{q}{-}\circ\overset{m}{-}\circ$. Заметим, что $Tet[n,m;q] \cong Tet[m,n;q]$.

**Теорема 3.1.** *Пусть* $\Gamma = \langle f, g\rangle$ — *неэлементарная дискретная* $\mathscr{RP}$*-группа без инвариантной плоскости. Пусть* $\beta(g) = 0$, *и пусть* $\beta(f) = -4\sin^2(\pi/n)$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 3$, *или* $\beta(f) \in [0,+\infty)$. *Положим* $n = \infty$ *для* $\beta(f) = 0$ *и* $n = \overline{\infty}$ *для* $\beta(f) \in (0,+\infty)$.

1. *Если* $\gamma(f,g) \in (-\infty;-4)$, *то* $\Gamma$ *изоморфна группе* $GT[n,\infty;\overline{\infty}]$.

2. *Если* $\gamma(f,g) = -4$, *то* $\Gamma$ *изоморфна группе* $GT[n,\infty;\infty]$.

3. *Если* $\gamma(f,g) = -4\cos^2(\pi/p)$, $(p,2) = 2$, $p \geq 4$, *то* $\Gamma$ *изоморфна группе* $GT[n,\infty;p/2]$.

4. *Если* $\gamma(f,g) = -4\cos^2(\pi/p)$, $(p,2) = 1$, $p \geq 3$, *то* $\Gamma$ *изоморфна группе* $Tet[n,\infty;p]$.

Замечание 3.2. Для всех групп $\Gamma$ из теоремы 3.1 орбифолды $Q(\Gamma)$ показаны на рис. 3 и 4, где изображены их сингулярные множества и границы. Индексы на ребрах соответствуют порядкам конических точек, индексы 2 опущены. Каждый орбифолд $Q(\Gamma)$ вложен в $\mathbb{S}^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ так, что $\infty$ является несингулярной внутренней точкой орбифолда $Q(\Gamma)$.

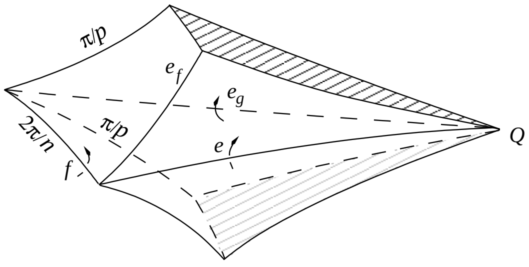
Поскольку мы получаем орбифолд склеиванием граней фундаментального многогранника для действия группы на пространстве $\mathbb{H}^3$, то ясна не только топологическая, но также и метрическая структура (длины сингулярных геодезических, структура каспов и т. д.) орбифолда. Фактически поскольку все неподвижные точки параболических элементов из группы $\Gamma$ принадлежат предельному множеству $\Lambda(\Gamma)$, они не имеют образов в $Q(\Gamma)$. Например, на рис. 3(б$_2$) границей орбифолда $Q(\Gamma)$ является объединение двух двумерных сфер с тремя проколами.

Жирные вершины на рис. 3 и 4 являются либо сингулярными точками орбифолда, либо проколами, либо соответствуют выброшенным открытым шарам. В первом случае жирная вершина соответствует образу точки пространства $\mathbb{H}^3$, во втором — точке предельного множества $\Lambda(\Gamma)$ и поэтому не принадлежит орбифолду, а в последнем — компоненте границы $\Omega(\Gamma)/\Gamma$. Тип жирной вершины зависит от индексов ребер, инцидентных ей. Например, на рис. 4(а) жирная вершина будет внутренней сингулярной точкой орбифолда, если $1/2+1/n+1/p > 1$, проколом, если $1/2 + 1/n + 1/p = 1$, и выброшенным открытым шаром, если $1/2 + 1/n + 1/p < 1$.

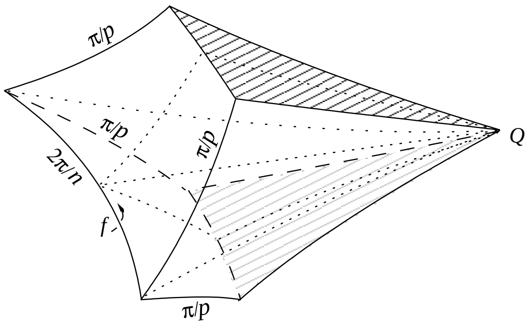
Доказательство теоремы 3.1. Мы приведем доказательство только для случая $\beta(f)=-4\sin^2(\pi/n)$, $n\in\mathbb{Z}$, $n\geq 3$.

Все параметры для дискретных групп в формулировке теоремы 3.1 описаны в следствии 2.5. Мы получим копредставление в каждом случае, используя теорему Пуанкаре о фундаментальном многограннике.

Начнем с построения фундаментального многогранника и копредставления группы $\widetilde{\Gamma}$, определенной в доказательстве теоремы 2.3. Поскольку $\widetilde{\Gamma}$ является сохраняющей ориентацию подгруппой индекса 2 в группе $\Gamma^*$ и $\mathscr{T}$ является фундаментальным многогранником для группы $\Gamma^*$, фундаментальный многогранник $\mathscr{P}$ для группы $\widetilde{\Gamma}$ состоит из двух экземпляров многогранника $\mathscr{T}$ (рис. 2(а)).




(а)




(б)

Рис. 2. Фундаментальные многогранники для $\widetilde{\Gamma}$ и $\Gamma$.

Применяя теорему Пуанкаре к многограннику $\mathscr{P}$ и преобразованиям $e$, $e_g$ и $f$, спаривающим грани, получаем, что

$$\widetilde{\Gamma}=\langle e,e_g,f\,|\,e^2=e_g^2=f^n=(e_ge)^\infty=(fe)^2=(fe_g)^p=1\rangle,$$

где $p$ целое, $\infty$ или $\overline{\infty}$. Поскольку $g=e_ge$, имеем

$$\widetilde{\Gamma}=\langle f,g,e\,|\,f^n=g^\infty=e^2=(fe)^2=(ge)^2=(fge)^p=1\rangle.$$

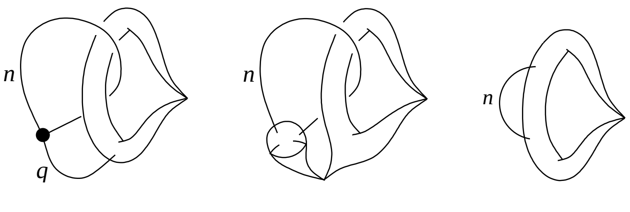
Если $p\geq 3$ нечетно, то с учетом соотношения $(fe)^2=(ge)^2=1$ из $(fge)^p=1$ следует, что $e=(fgf^{-1}g^{-1})^{(p-1)/2}fg$. Значит, в этом случае $\widetilde{\Gamma}=\Gamma$ и $\Gamma\cong Tet[n,\infty;p]$. Отождествляя грани многогранника $\mathscr{P}$, получаем орбифолд $\mathbb{H}^3/\Gamma$, показанный на рис. 4(а).

Если $p\geq 4$ четно, $\infty$ или $\overline{\infty}$, то $\Gamma$ является подгруппой индекса 2 в группе $\widetilde{\Gamma}$. Чтобы это увидеть, применим теорему Пуанкаре к многограннику, который состоит из четырех экземпляров многогранника $\mathscr{T}$ (рис. 2(б)). Тогда

$$\Gamma=\langle f,g\,|\,f^n=g^\infty=(fgf^{-1}g^{-1})^{p/2}=1\rangle.$$

$$\pi_1^{orb}(Q) \cong \langle f, g \mid f^n = g^\infty = [f,g]^q = 1\rangle,\ n \geq 3,\ q \geq 2,$$

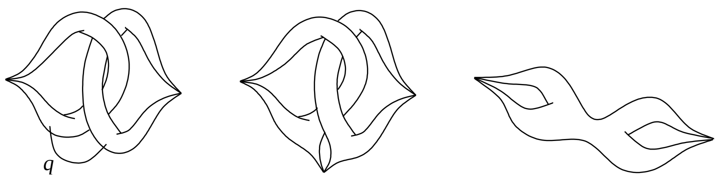
$q < \infty$ $\quad$ $q = \infty$ $\quad$ $q = \overline{\infty}$




(а$_1$) (а$_2$) (а$_3$)

$$\pi_1^{orb}(Q) \cong \langle f, g \mid f^\infty = g^\infty = [f,g]^q = 1\rangle,\ q \geq 2,$$

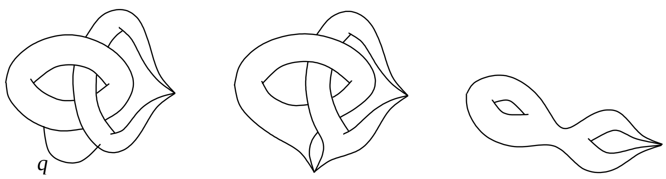
$q < \infty$ $\quad$ $q = \infty$ $\quad$ $q = \overline{\infty}$




(б$_1$) (б$_2$) (б$_3$)

$$\pi_1^{orb}(Q) \cong \langle f, g \mid g^\infty = [f,g]^q = 1\rangle,\ q \geq 2,$$

$q < \infty$ $\quad$ $q = \infty$ $\quad$ $q = \overline{\infty}$

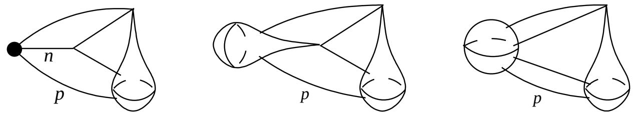



(в$_1$) (в$_2$) (в$_3$)

Рис. 3. Орбифолды $Q$ с фундаментальной группой $GT[n, \infty; q]$.

$$\pi_1^{orb}(Q) \cong \langle f, g, e \mid f^n = g^\infty = e^2 = (fe)^2 = (ge)^2 = (gfe)^p = 1\rangle,\ p \geq 3$$

$f$ эллиптический $\quad$ $f$ параболический $\quad$ $f$ гиперболический




(а) (б) (в)

Рис. 4. Орбифолды $Q$ с фундаментальной группой $Tet[n, \infty; p]$.

Орбифолд $Q(\Gamma)$ для конечного $q = p/2$ показан на рис. 3(а$_1$). Для случая, когда $\sigma$ и $\tau$ параллельны ($p = \infty$), $Q(\Gamma)$ показан на рис. 3(а$_2$), и для случая расходящихся $\sigma$ и $\tau$ орбифолд $Q(\Gamma)$ показан на рис. 3(а$_3$).

Случаи, когда $f$ параболический или гиперболический, доказываются аналогично, и мы оставляем их читателю.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Gehring F. W., Martin G. J.* Chebyshev polynomials and discrete groups // Proc. Conf. Complex Analysis. Tianjin, 1992 / Conf. Proc. Lecture Notes Anal. I. Cambridge, MA: Intern. Press, 1994. P. 114–125.
2. *Клименко Е. Я.* Трехмерные гиперболические орбифолды и дискретные группы изометрий пространства Лобачевского: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 1989.
3. *Parker J. R.* Kleinian groups with two parabolic generators. S.l., 1990. (Preprint).
4. *Adams C. C.* Hyperbolic 3-manifolds with two generators // Comm. Anal. Geom. 1996. V. 4, N 2. P. 181–206.
5. *Agol I.* Classification of non-free two parabolic generator Kleinian groups // Abstracts János Bolyai conf. hyperbolic geometry, 8–12 July 2002. Budapest, Hungary. P. 132.
6. *Klimenko E., Kopteva N.* Discreteness criteria for $\mathscr{R}\mathscr{P}$ groups // Israel J. Math. 2002. V. 128. P. 247–265.
7. *Andreev E. M.* On convex polyhedra of finite volume in Lobachevsky spaces // Math. USSR Sbornik. 1970. V. 12. P. 255–259.
8. *Vinberg E. B.* Hyperbolic reflection groups // Russian Math. Surveys. 1985. V. 40. P. 31–75.
9. *Epstein D. B. A., Petronio C.* An exposition of Poincaré's polyhedron theorem // Enseign. Math. (2). 1994. V. 40. P. 113–170.
10. *Knapp A. W.* Doubly generated Fuchsian groups // Michigan Math. J. 1968. V. 15, N 3. P. 289–304.
11. *Matelski J. P.* The classification of discrete 2-generator subgroups of $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ // Israel J. Math. 1982. V. 42, N 4. P. 309–317.
12. *Gehring F. W., Martin G. J.* Commutators, collars and the geometry of Möbius groups // J. Anal. Math. 1994. V. 63. P. 175–219.
13. *Boileau M., Porti J.* Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type. With an appendix: Limit of hyperbolicity for spherical 3-orbifolds by Michael Heusener and Joan Porti. Paris: Soc. Math. France, 2001. (Astérisque; 272).


*Статья поступила 30 августа 2004 г.*

*Elena Klimenko (Клименко Елена)*
*Gettysburg College,*
*Mathematics Department*
*300 N. Washington St., CB 402*
*Gettysburg, PA 17325*
*USA*
yklimenk@gettysburg.edu

*Natalia Kopteva (Коптева Наталья)*
*CMI, Université de Provence*
*39, rue F. Joliot Curie*
*13453 Marseille cedex 13*
*France*
kopteva@cmi.univ-mrs.fr