Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2005. Том 46, № 6

УДК 512.554

ДУАЛЬНЫЕ КОАЛГЕБРЫ ЙОРДАНОВЫХ БИАЛГЕБР И СУПЕРАЛГЕБР

В. Н. Желябин

Аннотация: Для биалгебр Ли В. Михаэлисом показано, что дуальная коалгебра исходной алгебры Ли является биалгеброй Ли. В данной работе аналогичный вопрос исследуется в случае йордановых биалгебр. Показано, что простая бесконечномерная йорданова супералгебра векторного типа имеет ненулевую дуальную коалгебру. Тем самым показано, что, сформулированная В. Михаэлисом гипотеза для коалгебр Ли не имеет места и в случае йордановых суперкоалгебр.

Ключевые слова: алгебра Хопфа, биалгебра Ли, йорданова биалгебра, йорданова супералгебра, неассоциативная коалгебра, локальная конечномерность, дуальная коалгебра.

В общем случае биалгебра — это алгебра, на которой задана структура коалгебры, т. е. задано коумножение, согласованное в определенном смысле с операцией умножения. В ассоциативном случае, например, коумножение должно быть коассоцитивным и являться гомоморфизмом соответствующих алгебр. Примерами ассоциативных биалгебр служат алгебры Хопфа. В отличие от алгебр Хопфа биалгебры Ли суть алгебры Ли с лиевым коумножением, которое является 1-коциклом. Биалгебры Ли введены В. Г. Дринфельдом в [1] как некоторый формализм описания решений классического уравнения Янга — Бакстера. В работе [2] определено понятие ассоциативной и йордановой биалгебры по Дринфельду (Д-биалгебры). Там же изучена связь между некоторыми типами йордановых биалгебр и биалгебрами Ли.

Как правило, для биалгебр характерно то, что дуальная алгебра соответствующей коалгебры является алгеброй того же многообразия алгебр, что и исходная алгебра.

Коалгебры Ли определены в работе [3]. Хорошо известна конструкция, сопоставляющая произвольной коалгебре ее дуальную алгебру. В [3] для любой алгебры Ли была построена конструкция ее дуальной коалгебры. В [4] для биалгебр Ли показано, что дуальная коалгебра исходной алгебры Ли является биалгеброй Ли.

В данной работе аналогичный вопрос изучается для йордановых биалгебр. А именно, *верно ли, что для йордановой биалгебры дуальная коалгебра исходной йордановой алгебры является йордановой алгеброй*? Ответ на этот вопрос положительный для почти нётеровых йордановых алгебр. В общем же случае ответ на него отрицательный.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам государственной поддержки ведущих научных школ (проект № НШ–2069.2003.1) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00230).

Хорошо известно, что всякая ассоциативная коалгебра локально конечномерна. Как показано в [3], существуют коалгебры Ли, которые сами не являются локально конечномерными, но содержат ненулевые конечномерные подкоалгебры. Там же сформулирована гипотеза: *всякая коалгебра Ли, не содержащая конечномерных подкоалгебр, является нулевой.* Данная гипотеза опровергнута в [5, 6]. А именно, показано, что у алгебры Витта ненулевая дуальная коалгебра.

В [7] построена йорданова суперкоалгебра, которая сама не является локально конечномерной, но содержит ненулевую конечномерную подкоалгебру. В данной работе показано, что для йордановых суперкоалгебр сформулированная выше гипотеза также не имеет места.

§ 1. Определения и предварительные результаты

Пусть F — поле. Для линейных пространств V и U над полем F через $V \otimes U$ обозначим их тензорное произведение над F. Через V^* будем обозначать дуальное пространство, т. е. пространство всех линейных функционалов, заданных на пространстве V. Пусть X и Y — подмножества из V и V^* соответственно. Через $Y(X)$ обозначим подмножество элементов поля F вида $y(x)$, где $x \in X$, $y \in Y$.

Как известно, отображение $\rho : V^* \otimes V^* \mapsto (V \otimes V)^*$, определенное правилом

$$\rho(f \otimes g)\Big(\sum_i v_i \otimes u_i\Big) = \sum_i f(v_i)g(u_i),$$

является инъективным вложением. Если $\phi : V \mapsto U$ — линейное отображение, то сопряженное к нему линейное отображение $\phi^* : U^* \mapsto V^*$ задается правилом $(\phi^*(u^*))(v) = u^*(\phi(v))$, здесь $v \in V$, $u^* \in U^*$.

Определение. Пара (A, Δ), где A — линейное пространство, а $\Delta : A \mapsto A \otimes A$ — линейное отображение, называется *коалгеброй.* Отображение Δ называется *коумножением.* Для элемента a коалгебры (A, Δ) если $\Delta(a) = \sum_i a_{1i} \otimes a_{2i}$, то, следуя Свидлеру [8], будем писать $\Delta(a) = \sum_a a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

Коединицей коалгебры (A, Δ) называется такой функционал ϵ из A^*, что

$$a = \sum_a \epsilon(a_{(1)})a_{(2)} = \sum_a \epsilon(a_{(2)})a_{(1)}$$

для произвольного элемента a из A, здесь $\Delta(a) = \sum_a a_{(1)} \otimes a_{(2)}$.

Пусть (A, Δ) — коалгебра. Рассмотрим дуальное пространство A^*. Пусть $\Delta^* : (A \otimes A)^* \mapsto A^*$ — сопряженное отображение для коумножения Δ. Тогда на пространстве A^* можно задать операцию умножения, положив $fg = \Delta^*\rho(f \otimes g)$, где f, g — функционалы из A^*. Пространство A^* с заданным умножением является обычной алгеброй над полем F, которая называется *дуальной алгеброй* коалгебры (A, Δ). Легко видеть, что для любых f, g из A^* и любого a из A справедливо равенство

$$(fg)(a) = \rho(f \otimes g)(\Delta(a)) = \sum_a f(a_{(1)})g(a_{(2)}).$$

Коединица ϵ коалгебры (A, Δ) является единицей для дуальной алгебры A^*.

Дуальная алгебра A^* коалгебры (A,Δ) задает бимодульное действие $(\cdot)$ на пространстве A, которое определяется следующим образом:

$$f\cdot a=\sum_a a_{(1)}f(a_{(2)}) \text{ и } a\cdot f=\sum_a f(a_{(1)})a_{(2)},$$

где $f\in A^*$ и $a\in A$.

Пусть A — произвольная алгебра, на которой задано коумножение Δ, и A^* — дуальная алгебра коалгебры (A,Δ). Алгебра A задает бимодульное действие $(\bullet)$ на пространстве A^*, определенное формулами $(f\bullet a)(b)=f(ab)$ и $(b\bullet f)(a)=f(ab)$. Рассмотрим пространство $\mathrm{D}(A)=A\oplus A^*$ и зададим на нем умножение, полагая

$$(f+a)(g+b)=(fg+f\bullet b+a\bullet g)+(ab+f\cdot b+a\cdot g).$$

Тогда $\mathrm{D}(A)$ является обычной алгеброй над полем F, а A и A^* — подалгебры в $\mathrm{D}(A)$. Алгебра $\mathrm{D}(A)$ называется *дублем Дринфельда* биалгебры (A,Δ). Если на алгебре A задано нулевое умножение, то умножение в алгебре $\mathrm{D}(A)$ задается так:

$$(f+a)(g+b)=fg+(ab+f\cdot b+a\cdot g).$$

Определим на $\mathrm{D}(A)$ форму Q, полагая

$$Q(a+f,b+g)=g(a)+f(b)$$

для любых $f,g\in A^*$ и $a,b\in A$. Тогда Q — невырожденная симметрическая билинейная форма. Проверим, что Q — ассоциативная форма. Действительно,

$$\begin{aligned}Q((a+f)(b+g),c+h)&=h(ab+f\cdot b+a\cdot g)+(fg+f\bullet b+a\bullet g)(c)\\&=f(b\cdot h+g\cdot c+bc)+(b\bullet h+gh+g\bullet c)(a)=Q(a+f,(b+g)(c+h))\end{aligned}$$

для любых $f,g,h\in A^*$ и $a,b,c\in A$.

Пусть X — подмножество в A (A^*). Тогда, как обычно, $X^\perp=\{f\in A^*\mid Q(f,X)=0\}$ $(X^\perp=\{a\in A\mid Q(a,X)=0\})$ — ортогональное дополнение к X в A^* (A).

Определение. Линейное подпространство B коалгебры (A,Δ) называется ***подкоалгеброй***, если $\Delta(B)\subseteq B\otimes B$.

Хорошо известно, что B является подкоалгеброй тогда и только тогда, когда пространство $B^\perp$ является идеалом в A^*. Нетрудно показать, что B — подкоалгебра в том и только в том случае, когда пространство B — A^*-подбимодуль.

Выше было показано, что каждой коалгебре (A,Δ) можно поставить в соответствие ее дуальную алгебру A^*. Теперь мы покажем, как алгебре A можно поставить в соответствие коалгебру (A°,Δ°).

Пусть A — алгебра над полем F с умножением $m:A\otimes A\mapsto A$, т. е. $m(a\otimes b)=ab$ для любых элементов $a,b\in A$. Тогда имеем сопряженное к m линейное отображение $m^*:A^*\mapsto(A\otimes A)^*$. Подпространство V из A^* называется ***хорошим***, если $m^*(V)\subseteq\rho(V\otimes V)$. На пространстве V зададим коумножение $\Delta_V:V\mapsto V\otimes V$, полагая $\Delta_V(v)=\sum\limits_i v_{(1)}\otimes v_{(2)}$, если $m^*(v)=\sum\limits_i\rho(v_{(1)}\otimes v_{(2)})$. Поскольку вложение ρ инъективно, коумножение Δ_V определенно корректно. Пусть теперь A° — сумма всех хороших подпространств из A^*. Тогда A° — наибольшее хорошее подпространство и поэтому A° — коалгебра с коумножением $\Delta^\circ=\Delta_{A^\circ}$ (см. [3,9]). Коалгебра (A°,Δ°) называется ***дуальной коалгеброй*** для алгебры A. Для любых $a,b\in A$ и любого $f\in A^\circ$ имеет место $f(m(a\otimes b))=\sum\limits_f f_{(1)}(a)f_{(2)}(b)$, где $\Delta^\circ(f)=\sum\limits_f f_{(1)}\otimes f_{(2)}$.

Предложение 1. *Пусть A — алгебра над полем F и (V, Δ) — коалгебра, где V — подпространство в A^*. Если для любых $a, b \in A$ и любого $f \in V$ выполнено равенство $f(ab) = \rho(\Delta(f))(a \otimes b)$, то V — хорошее подпространство.*

Доказательство. По определению отображения m^* имеем $m^*(f)(a \otimes b) = f(ab)$. Поэтому $m^*(f)(a \otimes b) = \rho(\Delta(f))(a \otimes b)$. Отсюда следует, что $m^*(f) = \rho(\Delta(f))$. Таким образом, $m^*(V) \subseteq \rho(V \otimes V)$.

Также справедливо

Следствие (ACM) [9]. *Пусть A — алгебра над полем F и S — подпространство из A^*. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *подпространство S хорошее,*

(ii) *подпространство S — A-подбимодуль A-бимодуля A^* такой, что для любого $f \in S$ подпространства $f \bullet A$ и $A \bullet f$ являются конечномерными.*

Коалгебра (A, Δ) называется *локально конечномерной*, если всякая конечнопорожденная подкоалгебра конечномерна. Как показано в [9], подкоалгебра из A, порожденная подмножеством S, совпадает с A^*-подбимодулем, порожденным S. Следовательно, коалгебра (A, Δ) локально конечномерна тогда и только тогда, когда A является локально конечномерным A^*-бимодулем. Сумму всех конечномерных подкоалгебр из A обозначим через $\mathrm{Loc}(A)$. Справедлива следующая

Теорема (ACM) 1 [9]. *Пусть A — произвольная алгебра над полем F. Тогда $\mathrm{Loc}(A^\circ) = \{f \in A^* \mid$ в A существует такой идеал I конечной коразмерности, что $f(I) = 0\}$.*

В ассоциативном и лиевом случаях этот результат получен соответственно в [8] и [3].

В работе [9] дано следующее определение коалгебры, связанное с некоторым многообразием алгебр.

Определение. Пусть $\mathscr{M}$ — произвольное многообразие алгебр. Тогда пара (A, Δ) называется *$\mathscr{M}$-коалгеброй*, если дуальная алгебра A^* принадлежит многообразию $\mathscr{M}$.

Данное определение $\mathscr{M}$-коалгебры в случае, когда $\mathscr{M}$ — многообразие ассоциативных (лиевых) алгебр, согласовано с определением ассоциативной (лиевой) коалгебры [9]. Более того, пусть A — алгебра однородного многообразия $\mathscr{M}$, тогда ее дуальная коалгебра является коалгеброй многообразия $\mathscr{M}$ (см. [9]).

Если теперь $\mathscr{M}$ — многообразие ассоциативных, альтернативных, лиевых или йордановых алгебр, то, как показано в [9], справедлива

Теорема (ACM) 2. *Следующие условия эквивалентны:*

(i) *пара (A, Δ) — $\mathscr{M}$-коалгебра,*

(ii) *алгебра $\mathrm{D}(A)$ является алгеброй многообразия $\mathscr{M}$.*

Хорошо известно (см. [8–10]), что всякая ассоциативная, альтернативная, йорданова или структуризуемая коалгебра локально конечномерна. Поэтому если A ((A, Δ)) — ассоциативная, альтернативная, йорданова алгебра (коалгебра), то $A^\circ = \mathrm{Loc}(A^\circ)$ ($A = \mathrm{Loc}(A)$). В случае алгебр Ли [3, 5, 6] эти результаты не имеют места. Необходимые и достаточные условия локальной конечномерности коалгебры Ли найдены в работе [11]. В работе [3] была сформулирована гипотеза: *если L — бесконечномерная коалгебра Ли, у которой $\mathrm{Loc}(L) = 0$, то $L = 0$*. В [5, 6] построены примеры ненулевых бесконечномерных коалгебр Ли L с условием $\mathrm{Loc}(L) = 0$.

Напомним определение биалгебры Ли. Для алгебры Ли L пара (L,Δ) является биалгеброй Ли тогда и только тогда, когда (L,Δ) — коалгебра Ли и коумножение Δ является 1-коциклом (см. [1]), т. е. удовлетворяет равенству

$$\Delta([a,b]) = \sum_a([a_{(1)},b]\otimes a_{(2)} + a_{(1)}\otimes[a_{(2)},b]) + \sum_b([a,b_{(1)}]\otimes b_{(2)} + b_{(1)}\otimes[a,b_{(2)}]).$$

Как известно (см. [1]), справедлива

Теорема (Дринфельд). *Пара (L,Δ) — биалгебра Ли тогда и только тогда, когда $\mathrm{D}(A)$ — алгебра Ли.*

Определение. Пусть $\mathscr{M}$ — произвольное многообразие F-алгебр и A — алгебра из $\mathscr{M}$, на которой дополнительно задано коумножение Δ. Тогда пару (A,Δ) будем называть *$\mathscr{M}$-биалгеброй по Дринфельду*, если алгебра $\mathrm{D}(A)$ принадлежит многообразию $\mathscr{M}$.

Пусть (L,Δ) — биалгебра Ли, L^* — дуальная алгебра коалгебры (L,Δ) и (L°,Δ°) — дуальная коалгебра алгебры L. В [4] показано, что L° — подалгебра алгебры Ли L^*, более того, пара (L°,Δ°) — биалгебра Ли.

Пусть A — произвольная алгебра над полем F. Алгебра A называется *почти нётеровой*, если каждый идеал конечной коразмерности алгебры A конечнопорожден как идеал.

Предложение 2. *Пусть A — конечнопорожденная F-алгебра. Тогда A почти нётерова.*

Доказательство. Пусть алгебра A порождена элементами $\{a_1,\dots,a_n\}$ и I — идеал алгебры A конечной коразмерности. Можно считать, что для некоторого числа k элементы $a_1,\dots,a_k$ линейно независимы по модулю I, а $a_{k+1},\dots,a_n\in I$. Пусть $e_1=a_1,\dots,e_k=a_k,e_{k+1},\dots,e_m$ — элементы алгебры A такие, что их образы $\overline{e_1},\dots,\overline{e_m}$ образуют базис фактор-алгебры A/I. Тогда $\overline{e_ie_j}=\sum\limits_l\gamma_{ijl}\overline{e_l}$, где $\gamma_{ijl}\in F$. Пусть K — идеал алгебры A, порожденный элементами $a_{k+1},\dots,a_n$ и $e_ie_j-\sum\limits_l\gamma_{ijl}e_l$, где $i,j=1,\dots,m$. Тогда элементы $e_1,\dots e_m$ линейно порождают A по модулю идеала K. Поскольку $K\subseteq I$, размерности фактор-алгебр A/K и A/I равны. Поэтому $I=K$ и идеал I конечнопорожден.

§ 2. Дуальные коалгебры йордановых биалгебр

В этом параграфе мы исследуем вопрос существования для бесконечномерных йордановых биалгебр их дуальных аналогов.

Пусть (A,Δ) — произвольная биалгебра и $\mathrm{D}(A)$ — ее дубль Дринфельда. Для элемента $a\in\mathrm{D}(A)$ через a_A (a_{A^*}) обозначим его проекцию на пространство A (A^*).

Сначала приведем новое, как нам кажется, более короткое по модулю следствия (АСМ) доказательство основного результата работы [4].

Пусть (L,Δ) — биалгебра Ли, L^* — дуальная алгебра коалгебры (L,Δ) и (L°,Δ°) — дуальная коалгебра алгебры L. Тогда L° — подалгебра в L^*.

Напомним, что L° — наибольшее хорошее пространство для L. Обозначим через $[\,,]$ умножение в алгебре $\mathrm{D}(L)$. Покажем, что $V=L^\circ+[L^\circ,L^\circ]$ — хорошее пространство для L. Пусть $f, g \in L^{\circ}$ и $a \in L$. Тогда

$$\begin{aligned}[f,g]\bullet a = [[f,g],a]_{L^*} = [[f,a],g]_{L^*} + [f,[g,a]]_{L^*} \\ = \sum_{a,g} f(a_{(2)})g_{(2)}(a_{(1)})g_{(1)} + \sum_{f}[f_{(1)}(a)f_{(2)}, g] \\ + \sum_{a,g} g(a_{(2)})f_{(1)}(a_{(1)})f_{(2)} + \sum_{g}[f, g_{(1)}(a)g_{(2)}].\end{aligned}$$

Поэтому V — подмодуль L-модуля L^* относительно действия $(\bullet)$, причем для любого $v \in V$ пространство $v \bullet L$ конечномерно. Тогда по следствию (ACM) V — хорошее пространство. Следовательно, $V = L^{\circ}$, т. е. $[L^{\circ}, L^{\circ}] \subseteq L^{\circ}$.

Для элементов $a, b \in L$ и $f, g \in L^{\circ}$ прямым вычислением получаем, что

$$\begin{aligned}&\rho(\Delta^{\circ}(fg))(a\otimes b) = (fg)(ab) = \rho(f\otimes g)(\Delta(ab)) \\ &= \rho(f\otimes g)\Big(\sum_{a}([a_{(1)},b]\otimes a_{(2)} + a_{(1)}\otimes[a_{(2)},b]) + \sum_{b}([a,b_{(1)}]\otimes b_{(2)} + b_{(1)}\otimes[a,b_{(2)}])\Big) \\ &= \rho\Big(\sum_{f}[f_{(1)},g]\otimes f_{(2)} + f_{(1)}\otimes[f_{(2)},g] + \sum_{g}[f,g_{(1)}]\otimes g_{(2)} + g_{(1)}\otimes[f,g_{(2)}]\Big)(a\otimes b).\end{aligned}$$

Поскольку L — плотное пространство в $(L^{\circ})^*$, пара $(L^{\circ}, \Delta^{\circ})$ — биалгебра Ли.

В дальнейшем будем считать, что характеристика поля F не равна 2. Пусть пара (J, Δ) — йорданова Д-биалгебра над полем F, J^* — дуальная алгебра коалгебры (J, Δ) и $(J^{\circ}, \Delta^{\circ})$ — дуальная коалгебра алгебры J.

Лемма 1. *Предположим, что J° — подалгебра алгебры J^*. Тогда $(J^{\circ}, \Delta^{\circ})$ — йорданова Д-биалгебра.*

Доказательство. Рассмотрим алгебры $\mathrm{D}(J)$ и $\mathrm{D}(J^{\circ})$. По условию леммы J° — подалгебра алгебры J^*, поэтому пространство $A = J^{\circ} + J$ — подалгебра алгебры $\mathrm{D}(J)$. Определим отображение $\phi : J \mapsto (J^{\circ})^*$, задав его правилом $\phi(a)(f) = f(a)$, где $a \in J$ и $f \in J^{\circ}$. Тогда ϕ является гомоморфизмом алгебр. Зададим отображение алгебры A в алгебру $\mathrm{D}(J^{\circ})$, поставив в соответствие элементу $f + a \in A$ элемент $\phi(a) + f \in \mathrm{D}(J^{\circ})$. Будем обозначать это отображение также через ϕ. Проверим, что ϕ — гомоморфизм соответствующих алгебр.

Действительно, пусть $a \in J$ и $f \in J^{\circ}$. Достаточно показать, что $\phi(fa) = \phi(f)\phi(a)$. В алгебре $\mathrm{D}(J^{\circ})$ имеем $\phi(f)\phi(a) = f\bullet\phi(a) + f\cdot\phi(a)$, при этом $f\bullet\phi(a) \in (J^{\circ})^*$ и $f\cdot\phi(a) \in J^{\circ}$ Тогда для любого $g \in J^{\circ}$ получаем

$$\begin{aligned}(f\bullet\phi(a))(g) = \phi(a)(gf) = (gf)(a) \\ = \sum_{a} g((f(a_{(2)})a_{(1)}) = \Big(\sum_{a}(\phi(a_{(2)})(f))\phi(a_{(1)})\Big)(g).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$f\bullet\phi(a) = \sum_{a}(\phi(a_{(2)})(f))\phi(a_{(1)}).$$

В алгебре $\mathrm{D}(J^{\circ})$ имеем

$$f\cdot\phi(a) = \sum_{f}\phi(a)(f_{(1)})f_{(2)} = \sum_{f} f_{(1)}(a)f_{(2)}.$$

С другой стороны, в алгебре $\mathrm{D}(J)$

$$fa = f\bullet a + f\cdot a = \sum_{f} f_{(1)}(a)f_{(2)} + \sum_{a} f(a_{(2)})a_{(1)}.$$

Отсюда $\phi(fa)=\phi(f)\phi(a)$.

Пусть $v(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m)$ — йорданов многочлен от переменных $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_m$. Покажем, что для любых $f_1,\dots,f_n\in(J^\circ)^*$ и $b,b_1,\dots,b_m\in J^\circ$ найдутся такие элементы $a_1,\dots,a_n\in J$, что

$$v(f_1,\dots,f_n,b_1,\dots,b_m)_{(J^\circ)^*}(b)=v(\phi(a_1),\dots,\phi(a_n),b_1,\dots,b_m)_{(J^\circ)^*}(b)$$

и

$$v(f_1,\dots,f_n,b_1,\dots,b_m)_{J^\circ}=v(\phi(a_1),\dots,\phi(a_n),b_1,\dots,b_m)_{J^\circ}.$$

Рассмотрим подкоалгебру B коалгебры (J°,Δ°), порожденную элементами $b,b_1,\dots,b_m$. Так как пространство B конечномерно, то пространство $V=B+BB+\dots+B^{m+1}$, где B^i — i-я степень пространства B в алгебре J°, также конечномерно. Поэтому подкоалгебра C коалгебры (J°,Δ°), порожденная пространством V, имеет конечную размерность. Пусть $a_1,\dots,a_n$ — элементы из J,

$$g=v(f_1,\dots,f_n,b_1,\dots,b_m)_{(J^\circ)^*},\quad h=v(\phi(a_1),\dots,\phi(a_n),b_1,\dots,b_m)_{(J^\circ)^*}$$

и

$$u=v(f_1,\dots,f_n,b_1,\dots,b_m)_{J^\circ},\quad w=v(\phi(a_1),\dots,\phi(a_n),b_1,\dots,b_m)_{J^\circ}.$$

Тогда

$$g(b)=\sum_s f_{m_1}(c_{11})\dots f_{m_1}(c_{1k_1})f_{m_2}(c_{21})\dots f_{m_2}(c_{2k_2})\dots f_{m_s}(c_{m_s1})\dots f_{m_s}(c_{m_sk_s}),$$

$$h(b)=\sum_s \phi(a_{m_1})(c_{11})\dots\phi(a_{m_1})(c_{1k_1})\phi(a_{m_2})(c_{21})\dots\phi(a_{m_s})(c_{m_s1})\dots\phi(a_{m_s})(c_{m_sk_s})$$

и

$$u=\sum_s f_{m_1}(d_{11})\dots f_{m_1}(d_{1k_1})f_{m_2}(d_{21})\dots f_{m_2}(d_{2k_2})\dots f_{m_s}(d_{m_s1})\dots f_{m_s}(d_{m_sk_s})v_s,$$

$$w=\sum_s \phi(a_{m_1})(d_{11})\dots\phi(a_{m_1})(d_{1k_1})\phi(a_{m_2})(d_{21})\dots\phi(a_{m_s})(d_{m_s1})\dots\phi(a_{m_s})(d_{m_sk_s})v_s,$$

где $\{f_{m_1},\dots,f_{m_s}\}\subseteq\{f_1,\dots,f_n\}$, $\{a_{m_1},\dots,a_{m_s}\}\subseteq\{a_1,\dots,a_n\}$ и все элементы c_{ij},d_{ij},v_s принадлежат C.

Пусть $e_1,\dots,e_k$ — базис пространства C и $h_1,\dots,h_k$ — его дуальный базис в J. Для каждого $i=1,\dots,n$ положим

$$a_i=\sum_j f_i(e_j)h_j.$$

Тогда $\phi(a_i)(e_j)=e_j(a_i)=f_i(e_j)$ для любого $j=1,\dots,k$. Поэтому $\phi(a_i)(z)=f_i(z)$ для любого $z\in C$. Отсюда получаем, что $g(b)=h(b)$ и $u=w$.

Если $v(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m)=0$ для любых элементов $a_1,\dots,a_n\in J$ и $b_1,\dots,b_m\in J^\circ$, то $v(\phi(a_1),\dots,\phi(a_n),b_1,\dots,b_m)=0$. Тогда по доказанному выше получаем, что $v(f_1,\dots,f_n,b_1,\dots,b_m)=0$ для любых элементов $f_1,\dots,f_n\in(J^\circ)^*$.

Так как пара (J,Δ) — йорданова Д-биалгебра, то $\mathrm{D}(J)$ — йорданова алгебра. Следовательно, $\mathrm{D}(J^\circ)$ — йорданова алгебра.

Таким образом, пара (J°,Δ°) — йорданова Д-биалгебра.

Теорема 1. *Пусть пара (J,Δ) — йорданова Д-биалгебра J^* — дуальная алгебра коалгебры (J,Δ) и (J°,Δ°) — дуальная коалгебра алгебры J. Предположим, что алгебра J почти нётерова. Тогда J° — подалгебра алгебры J^*, а пара (J°,Δ°) — йорданова Д-биалгебра. В частности, если алгебра J конечнопорождена, то пара (J°,Δ°) — йорданова Д-биалгебра.*

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно доказать, что J° — подалгебра алгебры J^*. Так как (J,Δ) — йорданова Д-биалгебра, то $\mathrm{D}(J)$ — йорданова алгебра. Для элементов $x,y,z\in \mathrm{D}(J)$ через (x,y,z) и xy обозначим ассоциатор и произведение соответствующих элементов в алгебре $\mathrm{D}(J)$

Пусть $f\in J^\circ$, B — подкоалгебра в (J°,Δ°), порожденная элементом f, и I — ортогональное дополнение B в J. Поскольку пространство B конечномерно, то I — идеал конечной коразмерности. Поэтому $J=U+I$, где U — пространство конечной размерности. Рассмотрим пространство $V=B+BB+(BB)\bullet J$, где $BB=\{\sum\limits_i g_ih_i\mid g_i,h_i\in B\}$, а $(BB)\bullet J=\{\sum\limits_i g_i\bullet a_i\mid g_i\in BB, a_i\in J\}$.

Покажем, что V является подбимодулем J-бимодуля J^*. Пусть $g,h\in B$ и $a,b\in J$. Тогда

$$[(gh)\bullet a]\bullet b=(gh,a,b)_{J^*}+(gh)\bullet(ab).$$

По линеаризованному йорданову тождеству имеем

$$\begin{aligned}-(gh,a,b)_{J^*}&=(gb,a,h)_{J^*}+(hb,a,g)_{J^*}\\&=\sum_g(g_{(1)}(b)g_{(2)},a,h)_{J^*}+\sum_b(g(b_{(2)})b_{(1)},a,h)_{J^*}\\&\qquad+\sum_h(h_{(1)}(b)h_{(2)},a,g)_{J^*}+\sum_b(h(b_{(2)})b_{(1)},a,g)_{J^*}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что $(gh,a,b)_{J^*}\in B+BB$. Поэтому V является подбимодулем J-бимодуля J^*.

Пусть $r\in I$. Поскольку $g(r)=0$ для любого $g\in B$, то $(g,r,h)_{J^*}\in B$, $(a,g,r)_{J^*}\in B$ и $(a,r,g)_{J^*}\in B$. Следовательно, $(gh,r,a)_{J^*}\in B$ и пространство $M=B+(gh)\bullet I$ является подбимодулем J-бимодуля J^*. Покажем, что пространство M конечномерно.

Пусть $t\in I$. Тогда

$$\begin{aligned}(gh)\bullet(rt)&=(g,h,rt)_{J^*}+[g(h(rt)]_{J^*}\\&=-(r,h,gt)_{J^*}-(t,h,gr)_{J^*}+g\bullet\Big(\sum_{rt}h((rt)_{(2)})(rt)_{(1)}\Big)\in B.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$[(gh)\bullet r]\bullet t=(gh,r,t)_{J^*}+(gh)\bullet(rt)\in B.$$

Поэтому

$$[(gh)\bullet r]\bullet J\subseteq[(gh)\bullet r)]\bullet U+[(gh)\bullet r]\bullet I\subseteq[(gh)\bullet r)]\bullet U+B.$$

Таким образом, для любого $m\in M$ пространство $m\bullet J$ конечномерно. В силу следствия (АСМ) M — хорошее пространство для J. Тогда $M\subseteq J^\circ$. Рассмотрим W — фактор-пространство пространства M по подпространству B. Так как M и B — J-бимодули, то W — J-бимодуль. Определим отображение $\phi: I\mapsto W$, задав его правилом $\phi(r)=(gh)\bullet r+B$. Тогда ϕ — гомоморфизм J-бимодулей. По предположению I — конечнопорожденный идеал. Поэтому

W — конечнопорожденный J-бимодуль. Следовательно, M — конечнопорожденный J-бимодуль. Поскольку M — подкоалгебра йордановой коалгебры J°, пространство M имеет конечную размерность.

Так как BB — конечномерное пространство, по доказанному $(BB) \bullet I$ — конечномерное пространство. Отсюда следует, что размерность пространства V конечна. Применяя следствие (ACM), получаем, что $V \subseteq J^\circ$.

Таким образом, $f^2 \in J^\circ$ для любого $f \in J^\circ$. Отсюда следует, что J° — подалгебра в J^*.

Если алгебра J порождается конечным числом элементов, то в силу предложения 2 алгебра J почти нётерова, и по доказанному выше J° — подалгебра в J^*.

Теорема доказана.

Теперь приведем пример йордановой Д-биалгебры (J, Δ), дуальная коалгебра которой не является подалгеброй в J^*.

Пусть V — бесконечномерное пространство над полем F с базисом $\{v_1, \dots, v_n, \dots\}$. Рассмотрим пространство $J = Fw + Fu + V$. Превратим J в алгебру, задав все ненулевые произведения базисных элементов в J условиями $v_i^2 = u$, где $i = 1, 2, \dots$. Определим на J коумножение, полагая $\Delta(v_i) = u \otimes w + w \otimes u$, $i = 1, 2, \dots$, $\Delta(u) = w \otimes w$ и $\Delta(w) = 0$.

Лемма 2. *Биалгебра (J, Δ) является йордановой Д-биалгеброй.*

Доказательство. Ясно, что алгебра J коммутативна и $J^3 = 0$. Поэтому J — йорданова алгебра. Пусть $\mathrm{Ann}(J)$ — аннулятор алгебры J. Тогда $\mathrm{Ann}(J) = Fw + Fu$ и для любого $a \in J$ имеем $\Delta(a) \in \mathrm{Ann}(J) \otimes \mathrm{Ann}(J)$. Поскольку

$$(\Delta \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(v_i) = w \otimes w \otimes w - w \otimes w \otimes w = 0$$

и

$$(\Delta \otimes \mathrm{id} - \mathrm{id} \otimes \Delta)\Delta(u) = 0,$$

дуальная алгебра J^* коалгебры (J, Δ) является ассоциативной. Ясно, что J^* — коммутативная алгебра. Следовательно, J^* — йорданова алгебра.

Рассмотрим алгебру $\mathrm{D}(J)$ и покажем, что $\mathrm{D}(J)$ — йорданова алгебра.

Ясно, что алгебра $\mathrm{D}(J)$ коммутативна. Поэтому для элементов $a, b \in J$ и $f, g \in J^*$ достаточно установить справедливость следующих равенств:

$$(f^2, a, f) = 0, \quad (a^2, f, a) = 0,$$

$$(f^2, b, a) + 2(fa, b, f) = 0, \quad (f^2, g, a) + 2(fa, g, f) = 0,$$

$$(a^2, b, f) + 2(fa, b, a) = 0, \quad (a^2, g, f) + 2(fa, g, a) = 0.$$

Пусть $a, b, c \in J$ и $f, g, h \in J^*$. Тогда

$$Q((f, a, g), b) = \sum_b f(ab_{(1)})g(b_{(2)}) - f(b_{(1)})g(b_{(2)}a) + \sum_a f(a_{(2)})g(ba_{(1)}) - f(a_{(2)}b)g(a_{(1)}) = 0,$$

поскольку $\Delta(J) \subseteq \mathrm{Ann}(J) \otimes \mathrm{Ann}(J)$. Поэтому $(f^2, x, f) = 0$ для любого $x \in D(J)$.

Так как

$$(a, f, b)_J = \sum_a f(a_{(1)})a_{(2)}b - f(a_{(1)}b)a_{(2)} + \sum_b f(b_{(1)}a)b_{(2)} - f(b_{(1)})g(ab_{(2)}) = 0,$$

то $(a^2, x, a) = 0$ для любого $x \in D(J)$.

Покажем, что $(f^2, a, b) + 2(fb, a, f) = 0$. Поскольку $ab \in Fu$ и

$$(a, b, g)_J = \sum_{ab} g((ab)_{(1)})(ab)_{(2)} - \sum_{a} g(a_{(1)}b)a_{(2)} - g(b_{(1)})b_{(2)}a$$
$$= \sum_{ab} g((ab)_{(1)})(ab)_{(2)}, \quad (1)$$

то $(a, b, g)_J = \alpha w$ для некоторого $\alpha \in F$. Поэтому $Q(f^2, (a, b, g)) = \alpha f^2(w) = 0$. В силу ассоциативности формы Q получаем, что $Q((f^2, a, b), x) = 0$ для любого $x \in D(J)$. Аналогично

$$\begin{aligned}(fb, a, g)_J &= \sum_{b} (f(b_{(2)})b_{(1)}, a, g)_J \\ &\quad + \sum_{a} f(ba_{(2)})g(a_{(1)(1)})a_{(1)(2)} - f(ba_{(2)(2)})g(a_{(1)})a_{(2)(1)} \\ &= \sum_{a,b} f(b_{(2)})g((b_{(1)}a)_{(1)})(b_{(1)}a)_{(2)} - f(b_{(2)})g(a_{(1)})b_{(1)}a_{(2)} \\ &\qquad - f(b_{(2)})g(b_{(1)(1)}a)b_{(1)(2)} = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $Q(g, (fb, a, f)) = 0$. По доказанному выше $(a, f, b)_J = 0$, поэтому в силу ассоциативности формы Q имеем $Q(c, (fb, a, f)) = -Q((c, fb, a), f) = 0$. Отсюда получаем искомое равенство.

Покажем, что $(f^2, g, a) + 2(fa, g, f) = 0$. Вследствие ассоциативности формы Q имеем $Q(h, (f^2, g, a) + 2(fa, g, f)) = Q(-(h, f^2, g) + 2(h, f, g)f, a) = 0$. Ввиду доказанного выше получаем

$$Q((f^2, g, a), b) = -Q(f^2, (g, a, b)) = 0, \quad Q((fa, g, f), b) = -Q(g, (fa, b, f)) = 0.$$

Следовательно, $(f^2, g, a) + 2(fa, g, f) = 0$.

Так как $a^2 \in \mathrm{Ann}(J)$, то по (1)

$$(a^2, b, g)_J = 0 \text{ и } Q((a, b, fa), g) = Q((a, b, f \bullet a), g) = Q(f, a(b, a, g)_J) = 0.$$

Отсюда $(a^2, b, f) + 2(af, b, a) = 0$. Значит,

$$Q(b, (a^2, g, f) + 2(fa, g, a)) = Q((f, b, a^2) + 2(a, b, fa), g) = 0.$$

С другой стороны,

$$Q(h, (a^2, g, f)) = -Q((g, f, h), a^2) = 0$$

и

$$Q(h, (fa, g, a)) = Q((a, h, fa), g) = \sum_{a} Q((a, h, f(a_{(2)})a_{(1)})), g) = 0.$$

Поэтому $(a^2, g, f) + 2(fa, g, a) = 0$.

Лемма 3. *Дуальная коалгебра J° алгебры J не является подалгеброй дуальной алгебры J^*.*

Доказательство. Рассмотрим подпространство $I = Fu + V$ в алгебре J. В силу определения умножения в алгебре J пространство I — идеал в J. Так как $J = Fw + I$, то I — идеал конечной коразмерности. Пусть K — произвольный идеал конечной коразмерности алгебры J. Тогда для некоторого натурального числа n ненулевой элемент $t = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ принадлежит K, где $\alpha_i \in F$. Выберем $\alpha_i \neq 0$. Тогда $tv_i = \alpha_i u \in K$. Поэтому $u \in K$.

Пусть f — ненулевой функционал из J^* такой, что $f(I) = 0$. Тогда $f(w) \neq 0$. По теореме (АСМ) 1 получаем, что $f \in J^\circ$. Если $f^2 \in J^\circ$, то в алгебре J существует такой идеал К конечной коразмерности, что $f^2(K) = 0$. По доказанному выше $u \in K$. Следовательно, $f^2(u) = 0$. С другой стороны,

$$f^2(u) = \rho(f \otimes f)\Delta(u) = f(w)f(w) \neq 0.$$

Получили противоречие. Поэтому $f^2 \notin J^\circ$.

Таким образом, J° не является подалгеброй в J^*.

§ 3. Ненулевые дуальные коалгебры простых йордановых супералгебр

Пусть F — поле характеристики не 2 и $J = J_0 + J_1$ — Z_2-градуированная F-алгебра, т. е. $J_0^2 \subseteq J_0$, $J_1^2 \subseteq J_0$, $J_1 J_0 \subseteq J_1$, $J_0 J_1 \subseteq J_1$. Положим $A = J_0$ и $M = J_1$. Пространство A (M) называется *четной* (*нечетной*) *частью алгебры* J. Элементы множества $A \cup M$ называются *однородными*. Выражение $p(x)$, где $x \in A \cup M$, означает индекс четности однородного элемента x:

$$p(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in A \ (x \text{ четный}), \\ 1, & \text{если } x \in M \ (x \text{ нечетный}). \end{cases}$$

Для элемента x из J через R_x обозначим оператор правого умножения на элемент x. Алгебра J называется *йордановой супералгеброй*, если для однородных элементов выполнимы следующие операторные тождества:

$$aR_b = (-1)^{p(a)p(b)} bR_a,$$

$$R_a R_b R_c + (-1)^{p(a)p(b)+p(a)p(c)+p(b)p(c)} R_c R_b R_a + (-1)^{p(b)p(c)} R_{(ac)b}$$
$$= R_{ab} R_c + (-1)^{p(b)p(c)} R_{ac} R_b + (-1)^{p(a)p(b)+p(a)p(c)} R_{bc} R_a.$$

Супералгебра $J = A + M$ называется *простой*, если $J^2 = J$ и в ней нет собственных ненулевых Z_2-градуированных идеалов.

Предложение 3. *Йорданова супералгебра J проста как супералгебра тогда и только тогда, когда J проста как алгебра.*

Доказательство. Ясно, что из простоты алгебры J следует ее простота как супералгебры.

Пусть J — простая супералгебра и I — собственный ненулевой идеал алгебры J. Рассмотрим отображение $\pi : J \mapsto J$, заданное правилом $\pi(a+m) = a-m$, где $a \in A$ и $m \in M$. Нетрудно проверить, что π — автоморфизм алгебры J порядка два. Обозначим через I^π образ идеала I относительно отображения π. Ясно, что $I \cap I^\pi$, $I + I^\pi$ — идеалы алгебры J

Предположим, что $A \cap I \neq 0$. Тогда идеал K, порожденный в J пространством $A \cap I$, содержится в I и является Z_2-градуированным идеалом. Поэтому можно считать, что $A \cap I = 0$. Если $N = M \cap I$, то $NM \subseteq A \cap I = 0$. Так как $NA \subseteq N$, то N является собственным Z_2-градуированным идеалом в J. Поэтому можно считать, что $M \cap I = 0$. Таким образом, идеал I не содержит однородных элементов супералгебры J. Отсюда получаем, что $I \cap I^\pi = 0$, $II^\pi \subseteq I \cap I^\pi = 0$, $I^\pi I \subseteq I \cap I^\pi = 0$ и $J = I + I^\pi$.

Пусть $x = a + m \in I$ и $y = b + n \in I$. Тогда $\pi(x) = a - m \in I^\pi$. Поэтому $a^2 = x\pi(x) \in II^\pi = 0$. Следовательно, $(a+b)^2 = 0$ и $ab = 0$. Отсюда получаем, что $x\pi(y) = -mn - an + mb = 0$, т. е. $mn = 0$ и $an = bm$. Но тогда $I^2 \subseteq I \cap M = 0$ и $(I^\pi)^2 = 0$. Так как $J = I + I^\pi$, то $J^2 = 0$.

Таким образом, алгебра J проста.

Более общий случай предложения 1 доказан в [12].

Пусть Γ — ассоциативная коммутативная F-алгебра с ненулевым дифференцированием D. Изоморфную копию пространства Γ с отображением изоморфизма $a \mapsto \bar{a}$ обозначим через $\overline{\Gamma}$. Рассмотрим прямую сумму пространств $J(\Gamma, D) = \Gamma + \overline{\Gamma}$ и определим на $J(\Gamma, D)$ умножение $\star$ по правилам

$$a \star b = ab, \quad a \star \bar{b} = \overline{ab}, \quad \bar{a} \star b = \overline{ab}, \quad \bar{a} \star \bar{b} = a^D b - ab^D,$$

где $a, b \in \Gamma$ и ab — произведение в Γ. Тогда $J(\Gamma, D)$ — йорданова супералгебра с четной частью $A = \Gamma$ и нечетной $M = \overline{\Gamma}$. Супералгебру $J(\Gamma, D)$ называют также *супералгеброй векторного типа*. Как показано в [13], а также в [14], супералгебра $J(\Gamma, D)$ проста тогда и только тогда, когда алгебра Γ D-проста (т. е. $\Gamma^2 = \Gamma$ и Γ не содержит собственных ненулевых D-инвариантных идеалов).

Напомним определение йордановой суперкоалгебры.

Определение. Коалгебра (J, Δ), где $J = A + M$ — $\mathbb{Z}_2$-градуированное линейное пространство, называется йордановой *суперкоалгеброй*, если ее дуальная алгебра $J^* = A^* + M^*$ является йордановой супералгеброй с четной частью A^* и нечетной частью M^*.

Если (J, Δ) — йорданова суперкоалгебра, то

$$\Delta(A) \subseteq A \otimes A + M \otimes M, \quad \Delta(M) \subseteq A \otimes M + M \otimes A.$$

Пусть, например, $a \in A$ и

$$\Delta(a) = \sum_i a_i \otimes b_i + \sum_i c_i \otimes x_i + \sum_i y_i \otimes d_i + \sum_i n_i \otimes m_i,$$

где $a_i, b_i, c_i, d_i \in A$, $x_i, y_i, n_i, m_i \in M$. Если $\sum c_i \otimes x_i \neq 0$, то в пространствах A и M можно выбрать такие линейно независимые конечные системы элементов $\{h_i\}$ и $\{z_i\}$, что

$$\sum_i c_i \otimes x_i = \sum_i h_i \otimes z_i.$$

Поэтому можно считать, что $\{c_i\}$ и $\{x_i\}$ — линейно независимые конечные системы элементов. Пусть $\{c_i^*\}$ и $\{x_i^*\}$ — дуальные базисы этих систем в пространствах A^* и M^*. Поскольку $c_i^* x_i^* \in M^*$, то $c_i^* x_i^*(a) = 0$. С другой стороны,

$$c_i^* x_i^*(a) = \sum_j c_i^*(c_j) x_i^*(x_j) = c_i^*(c_i) x_i^*(x_i) = 1.$$

Следовательно,

$$\sum_i c_i \otimes x_i = 0.$$

Аналогично

$$\sum_i y_i \otimes d_i = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\Delta(A) \subseteq A \otimes A + M \otimes M.$$

Аналогично $\Delta(M) \subseteq A \otimes M + M \otimes A$.

Так же, как и в случае обычных алгебр, по любой йордановой супералгебре J можно определить дуальную суперкоалгебру J°. Применяя рассуждения из теоремы 4.2 в [9], нетрудно показать, что J° — йорданова суперкоалгебра, т. е. дуальная алгебра $(J^\circ)^*$ является йордановой супералгеброй.

Пусть F — поле характеристики нуль, $F[x]$ — алгебра многочленов от одной переменной и $D = \frac{d}{dx}$ — дифференцирование по переменной x. Так как алгебра $F[x]$ является D-простой, то $J(F[x], D)$ — простая йорданова супералгебра. Положим $J = J(F[x], D)$ и $t = \bar{1}$. Тогда для любого многочлена f имеем $\bar{f} = t \star f$ и $J = F[x] + t \star F[x]$. Будем писать tf вместо $t \star f$.

Предложение 4. *Пусть $x_i = x^{i+1}$, где $i = -1, 0, 1, \dots$. Тогда в супералгебре J справедливы равенства*

$$x_i \star x_j = x_{i+j+1}, \quad tx_i \star tx_j = (i-j)x_{i+j}, \quad x_j \star tx_i = tx_i \star x_j = tx_{i+j+1}.$$

Пусть J^* — дуальное пространство для J. Тогда $J^* = (F[x])^* + (tF[x])^*$, где $(F[x])^*$ и $(tF[x])^*$ — дуальные пространства для $F[x]$ и $tF[x]$ соответственно. В пространстве J^* рассмотрим системы элементов $\{z_i\}_{i=-1}^{\infty}$ и $\{y_i\}_{i=-1}^{\infty}$, которые являются дуальными базисами по отношению к базисам $\{x_i\}_{i=-1}^{\infty}$ и $\{tx_i\}_{i=-1}^{\infty}$, т. е.

$$z_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases} \quad \text{и} \quad y_i(tx_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

кроме того, считаем, что $z_i(tF[x]) = 0$ и $y_i(F[x]) = 0$ для всех $i = -1, 0, 1, \dots$.

Пусть V_0 и V_1 — подпространства в J^*, порожденные системами $\{z_i\}_{i=-1}^{\infty}$ и $\{y_i\}_{i=-1}^{\infty}$. Положим $V = V_0 + V_1$ и зададим линейное отображение $\Delta : V \mapsto V \otimes V$, полагая

$$\Delta(z_i) = \sum_{\substack{k+j=i-1 \\ k,j \geq -1}} z_k \otimes z_j + \sum_{\substack{k+j=i \\ k,j \geq -1}} (k-j) y_k \otimes y_j, \quad \Delta(y_i) = \sum_{\substack{k+j=i-1 \\ k,j \geq -1}} z_k \otimes y_j + y_j \otimes z_k.$$

Предложение 5. *Подпространство V является хорошим подпространством в J^* для алгебры J.*

Доказательство. В силу предложения 1 достаточно проверить равенства

$$z_k(x_i \star x_j) = \rho(\Delta(z_k))(x_i \otimes x_j), z_k(tx_i \star tx_j) = \rho(\Delta(z_k))(tx_i \otimes tx_j),$$
$$y_k(x_i \star tx_j) = \rho(\Delta(y_k))(x_i \otimes tx_j).$$

Поскольку $x_i \star x_j = x_{i+j+1}$, то $z_k(x_i \star x_j) = \delta_{k(i+j+1)}$. С другой стороны,

$$\rho(\Delta(z_k))(x_i \otimes x_j) = \sum_{\substack{r+s=k-1 \\ r,s \geq -1}} z_r(x_i) z_s(x_j) = \sum_{\substack{r+s=k-1 \\ r,s \geq -1}} \delta_{ri} \delta_{sj} = \delta_{k(i+j+1)}.$$

По предложению 4 имеем $tx_i \star tx_j = (i-j)x_{i+j}$. Поэтому

$$z_k(tx_i \star tx_j) = (i-j) z_k(x_{i+j}) = (i-j)\delta_{k(i+j)}.$$

Вместе с тем

$$\rho(\Delta(z_k))(tx_i \otimes tx_j) = \sum_{\substack{r+s=k \\ r,s \geq -1}} (r-s) y_r(tx_i) y_s(tx_j) = \sum_{\substack{r+s=k \\ r,s \geq -1}} (r-s) \delta_{ri} \delta_{sj} = (i-j)\delta_{k(i+j)}.$$

Наконец, $y_k(x_i \star tx_j) = \delta_{k(i+j+1)}$, а

$$\rho(\Delta(y_k))(x_i \otimes tx_j) = \sum_{\substack{r+s=k-1 \\ r,s \geq -1}} z_r(x_i) y_s(tx_j) = \sum_{\substack{r+s=k-1 \\ r,s \geq -1}} \delta_{ri} \delta_{sj} = \delta_{k(i+j+1)}.$$

Таким образом, предложение доказано.

Теорема 2. *Пусть F — поле характеристики нуль, $F[x]$ — алгебра многочленов от одной переменной и $D = \frac{d}{dx}$ — дифференцирование по переменной x. Рассмотрим супералгебру $J = J(F[x], D)$. Тогда ее дуальная коалгебра J° является йордановой суперкоалгеброй, отлична от нуля и не содержит конечномерных подкоалгебр.*

Доказательство. По определению коалгебры J° и ввиду предложения 5 получаем, что J° отлична от нуля. В силу сделанного выше замечания J° — йорданова суперкоалгебра. Если B — конечномерная подкоалгебра в J°, то ее ортогональное дополнение в J является идеалом конечной коразмерности. Поскольку супералгебра J бесконечномерна над F, ввиду предложения 3 J не содержит идеалов конечной коразмерности, отличных от J. Следовательно, J° не содержит ненулевых конечномерных подкоалгебр.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дринфельд В. Г.* Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга — Бакстера // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268, № 2. С. 285–287.
2. *Желябин В. Н.* Йордановы биалгебры и их связь с биалгебрами Ли // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 3–25.
3. *Michaelis W.* Lie coalgebras // Adv. Math. 1980. V. 38. P. 1–54.
4. *Michaelis W.* The Dual Lie bialgebra of a Lie bialgebra // AMS/IP Stud. Adv. Math., Editor S.-T. Yau. 1997. V. 4. P. 81–94.
5. *Michaelis W.* An example of a non-zero Lie coalgebra M for which $\mathrm{Loc}(M) = 0$ // J. Pure Appl. Algebra. 1990. V. 68. P. 341–348.
6. *Nichols W. D.* The structure of the dual Lie coalgebra of the Witt algebra // J. Pure Appl. Algebra. 1990. V. 68. P. 359–364.
7. *Желябин В. Н.* Йордановы суперкоалгебры и суперкоалгебры Ли // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 1. С. 87–111.
8. *Sweedler M. E.* Hopf algebras. New York: W. A. Benjamin Inc., 1969.
9. *Anquela J. A. Cortes T., Montaner F.* Nonassociative coalgebras // Comm. Algebra. 1994. V. 22, N 12. P. 4693–4716.
10. *Желябин В. Н.* Структуризуемые коалгебры // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 5. С. 503–517.
11. *Slinko A.* Local finiteness of coalgebraic Lie coalgebras // Comm. Algebra. 1995. V. 23, N 3. P. 1165–1170.
12. *Gonzalez S., Lopez-Diaz M. C., Martinez C., Shestakov I. P.* Bernstein superalgebras and superbimodules // J. Algebra. 1999. V. 212. P. 119–131.
13. *King D., McCrimmon K.* The Kantor construction of Jordan superalgebras // Comm. Algebra. 1992. V. 20, N 1. P. 109–126.
14. *Шестаков И. П.* Первичные альтернативные супералгебры произвольной характеристики // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 701–731.

Статья поступила 26 мая 2004 г.

Желябин Виктор Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
vicnic@math.nsc.ru