Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2005. Том 46, № 6

УДК 517.55

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОШИ ЛИНЕЙНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ПРОЕКТОРЫ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

О. Е. Антоненкова, Ф. А. Шамоян

Аннотация: При общих предположениях на весовую функцию дается полная характеризация преобразования Коши линейных непрерывных функционалов на весовых пространствах голоморфных в шаре функций. Строится интегральный проектор, отображающий весовые пространства измеримых и n-гармонических в шаре функций на соответствующие пространства голоморфных функций.

Ключевые слова: линейный функционал, преобразование Коши, весовое пространство, голоморфная функция.

Введение

Пусть B_n — открытый единичный шар в n-мерном комплексном пространстве, S_n — его граница, $0 < p,q < +\infty$. Обозначим через Ω множество всех положительных функций ω, суммируемых на интервале $(0,1)$, для которых существуют положительные числа m_ω, M_ω, q_ω, причем $m_\omega, q_\omega \in (0,1)$, такие, что

$$m_\omega \le \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \le M_\omega \quad \forall r \in (0,1),\ \lambda \in [q_\omega, 1].$$

Важным частным случаем таких функций являются функции вида $\omega(t) = t^\alpha$. Свойства функций из Ω хорошо изучены в монографии [1].

Обозначим через $L^{p,q}(\omega)$ пространство измеримых в B_n функций f, для которых

$$\|f\|_{L^{p,q}(\omega)} = \left(\int\limits_0^1 \omega(1-r)\left(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{q}{p}} r^{2n-1}\, dr\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty,$$

где $d\sigma(\zeta)$ — нормированная мера Лебега на сфере S_n, а через $H(B_n)$ — множество всех голоморфных в B_n функций. Положим также $A^{p,q}(\omega) = H(B_n) \cap L^{p,q}(\omega)$. Подпространство $L^{p,q}(\omega)$, состоящее из n-гармонических функций, обозначим через $h^{p,q}(\omega)$.

В этой статье мы построим ограниченный линейный проектор, отображающий пространство $L^{p,q}(\omega)$ при $1 \le p,q < +\infty$ на пространство $A^{p,q}(\omega)$ и пространство $h^{p,q}(\omega)$ на $A^{p,q}(\omega)$ при всех $0 < p,q < +\infty$, $\omega \in \Omega$. Указанные результаты позволяют охарактеризовать все голоморфные в шаре B_n функции g, допускающие представление $g(z) = \Phi(e_z)$, где $e_z(\zeta) = \frac{1}{(1-\langle\zeta,\bar z\rangle)^n}$, Φ — линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}(\omega)$, $0 < p,q < +\infty$, и тем самым получить полное описание линейных непрерывных функционалов при всех p и q. Важность рассматриваемых вопросов для решения ряда задач комплексного анализа хорошо известна, для примера укажем работы [2–8]. В связи с полученными в статье результатами отметим также работу [9], в которой установлено существование ограниченного проектора из $L^{p,q}(\omega)$ на $A^{p,q}(\omega)$ при $\omega(t) = t^\beta$, $\beta > -1$, и $1 < p,q < +\infty$. Там же получено другое представление линейных непрерывных функционалов в пространствах $A^{p,q}(\omega)$ при $\omega(t) = t^\beta$, $-1 < \beta < +\infty$, и то лишь в случае $1 < p < +\infty$, $\max(1, 1+\beta) < q < +\infty$. При остальных p, q метод, предложенный в этой работе, не проходит.

В § 1 установлены вспомогательные результаты, на наш взгляд, имеющие самостоятельный интерес. В § 2 в явном виде строится ограниченный линейный интегральный проектор из пространств $L^{p,q}(\omega)$ и $h^{p,q}(\omega)$ на $A^{p,q}(\omega)$ при условии, что $\beta_\omega = \frac{\log M_\omega}{\log(1/q_\omega)} < 1$. Если же $\beta_\omega \geq 1$, то указанное утверждение не верно даже в случае $\omega(t) = t^\alpha$. В § 3 дано описание линейных непрерывных функционалов в пространствах $A^{p,q}(\omega)$ при $\omega \in \Omega$.

§ 1. Обозначения и вспомогательные сведения

Для удобства обозначим $\alpha_\omega = \frac{\log m_\omega}{\log q_\omega}$, $\omega_\alpha(t) = \omega(t)\bigl(\frac{t^\alpha}{\omega(t)}\bigr)^q$, $t \in (0,1)$. Определим функцию $\chi_\gamma(z) = \frac{1}{(1-|z|)^{\gamma/pp'}}$, $z \in B_n$, где $0 \leq \gamma < pp'$, $1 \leq p < +\infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$.

Следующая лемма установлена в работе [3].

Лемма 1. *Пусть $\omega \in \Omega$. Тогда найдутся измеримые ограниченные функции $\eta(x)$ и $\varepsilon(x)$ такие, что*

$$\omega(x) = \exp\left\{\eta(x) + \int_x^1 \frac{\varepsilon(x)}{u}\,du\right\}, \quad x \in (0,1). \tag{1}$$

При этом

$$\frac{\log m_\omega}{\log(1/q_\omega)} \leq \varepsilon(u) \leq \frac{\log M_\omega}{\log(1/q_\omega)}, \quad u \in (0,1), \tag{2}$$

и

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha_\omega} \leq \frac{\omega(x)}{\omega(y)} \leq \left(\frac{y}{x}\right)^{\beta_\omega}, \quad 0 < x \leq y < 1. \tag{3}$$

В дальнейшем при $\omega \in \Omega$ всегда будем предполагать, что $0 < \beta_\omega < 1$, и, не ограничивая общность, $\eta(x) = 0$, $x \in (0,1)$.

Лемма 2. *Пусть $0 < p \leq 1$, $f \in H^p(B_n)$. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$(1-r^2)^{(\frac{1}{p}-1)n} \int_{S_n} |f(r^2\zeta)|\,d\sigma(\zeta) \leq c\left(\int_{S_n} |f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Здесь и в дальнейшем через $c, c_1, \dots, c_n(\alpha, \beta, \dots)$ будем обозначать произвольные положительные константы, зависящие от $\alpha, \beta, \dots$, конкретные значения которых не играют никакой роли.

Доказательство. Для классов Харди хорошо известна оценка (см. [10])

$$|f(z)| \leq 2^{\frac{n}{p}} \|f\|_{H^p(B_n)} (1-|z|)^{-\frac{n}{p}}.$$

Учитывая ее, имеем

$$\int\limits_{S_n} |f(r^2\zeta)|\,d\sigma(\zeta) = \int\limits_{S_n} |f(r^2\zeta)|^p |f(r^2\zeta)|^{1-p}\,d\sigma(\zeta)$$

$$\le c\Biggl(\int\limits_{S_n} |f(r^2\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\Biggr)\Biggl(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\Biggr)^{\frac{1}{p}(1-p)}(1-r^2)^{-\frac{n}{p}(1-p)}$$

$$\le c\Biggl(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\Biggr)^{\frac{1}{p}(1-p)+1}(1-r^2)^{-\frac{n}{p}(1-p)}.$$

Отсюда

$$(1-r^2)^{(\frac{1}{p}-1)n}\int\limits_{S_n} |f(r^2\zeta)|\,d\sigma(\zeta) \le c\Biggl(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\Biggr)^{\frac{1}{p}}. \quad \square$$

Лемма 3. *Пусть* $0 < q \le 1$, $0 < p < +\infty$, $f \in h^{p,q}(B_n)$. *Тогда*

$$\int\limits_0^1 \omega(1-r)^{\frac{1}{q}}(1-r)^{\frac{1}{q}-1}\Biggl(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\Biggr)^{\frac{1}{p}} r^{2n-1}\,dr$$

$$\le c\Biggl(\int\limits_0^1 \omega(1-r)\Biggl(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\Biggr)^{\frac{q}{p}} r^{2n-1}\,dr\Biggr)^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Пусть $\Delta_k = \bigl(1-\frac{1}{2^k}, 1-\frac{1}{2^{k+1}}\bigr]$, тогда $(0,1) = \bigcup\limits_{k=0}^{+\infty}\Delta_k$. Следовательно,

$$I = \int\limits_0^1 \omega(1-r)^{\frac{1}{q}}(1-r)^{\frac{1}{q}-1}\Biggl(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\Biggr)^{\frac{1}{p}} r^{2n-1}\,dr$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty}\int\limits_{1-\frac{1}{2^k}}^{1-\frac{1}{2^{k+1}}} \omega(1-r)^{\frac{1}{q}}(1-r)^{\frac{1}{q}-1}\Biggl(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\Biggr)^{\frac{1}{p}} r^{2n-1}\,dr.$$

Используя свойства функции ω (см. (2), (3)), легко показать, что

$$I \le c_1\sum_{k=0}^{+\infty}\omega(1-r_k)^{\frac{1}{q}}(r_{k+1}-r_k)^{\frac{1}{q}}\max_{r_k<r<r_{k+1}}\Biggl(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\Biggr)^{\frac{1}{p}}$$

$$\le c_2\sum_{k=0}^{+\infty}\omega(1-r_k)^{\frac{1}{q}}(r_{k+1}-r_k)^{\frac{1}{q}}\Biggl(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\Biggr)^{\frac{1}{p}}, \quad r \in [r_{k+1}, r_{k+2}].$$

Последнее неравенство при $1 \le p < +\infty$ хорошо известно, а при $0 < p < 1$ используется следующий результат (см. [11]): так как f — гармоническая функция, то

$$\max_{r_k<r<r_{k+1}}\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta) \le c_3\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta) \quad \forall r \in (r_{k+1}, r_{k+2}).$$

Учитывая, что $0 < q \le 1$, будем иметь

$$I \le c_4 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \omega(1-r_k)(r_{k+1}-r_k) \left(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le c \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \int\limits_{r_{k+1}}^{r_{k+2}} \omega(1-r) \left(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{q}{p}} r^{2n-1} \, dr \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le c \left(\int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{q}{p}} r^{2n-1} \, dr \right)^{\frac{1}{q}}.$$

В последнем неравенстве мы использовали оценку (3), положив $x = 1 - r_{k+1}$, $y = 1 - r$ при $r_{k+1} \le r \le r_{k+2}$. $\square$

Лемма 4. *Пусть $0 < p \le 1$, $0 < q \le 1$, $f \in A^{p,q}(B_n)$. Тогда справедлива оценка*

$$\int\limits_0^1 \omega(1-r)^{\frac{1}{q}} (1-r)^{\frac{1}{q}-1+n(\frac{1}{p}-1)} \int\limits_{S_n} |f(r\zeta)| \, d\sigma(\zeta) r^{2n-1} \, dr$$

$$\le c \left(\int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{q}{p}} r^{2n-1} \, dr \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Так как $f \in A^{p,q}(B_n)$, применив лемму 2, будем иметь

$$\int\limits_0^1 \omega(1-r)^{\frac{1}{q}} (1-r)^{\frac{1}{q}-1} (1-r^2)^{n(\frac{1}{p}-1)} \int\limits_{S_n} |f(r^2\zeta)| \, d\sigma(\zeta) r^{2n-1} \, dr$$

$$\le c_1 \int\limits_0^1 \omega(1-r)^{\frac{1}{q}} (1-r)^{\frac{1}{q}-1} \left(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} r^{2n-1} \, dr$$

$$\le c_2 \left(\int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{q}{p}} r^{2n-1} \, dr \right)^{\frac{1}{q}}.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались леммой 3. Учитывая (3), имеем $c_3 \le \frac{\omega(1-\sqrt{\rho})}{\omega(1-\rho)} \le c_4$, $\rho \in (0, 1)$. Получаем

$$\int\limits_0^1 \omega(1-\rho)^{\frac{1}{q}} (1-\rho)^{\frac{1}{q}-1+n(\frac{1}{p}-1)} \int\limits_{S_n} |f(\rho\zeta)| \, d\sigma(\zeta) \rho^{2n-1} d\rho$$

$$\le c \left(\int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{q}{p}} r^{2n-1} \, dr \right)^{\frac{1}{q}}. \quad \square$$

Следующая лемма установлена в работах [12, 3] в случае поликруга. Приведем ее аналог в случае единичного круга. Пусть U — единичный круг, k —

неотрицательное целое число, l — целое число, удовлетворяющее условию $-2^k \leq l \leq 2^k - 1$. Положим

$$\Delta_{k,l} = \{z : 1 - 1/2^k \leq |z| < 1 - 1/2^{k+1},\ \pi l/2^k \leq \arg z < \pi(l+1)/2^k\}.$$

Лемма 5. *Пусть $V \in C(U)$, причем для любого круга $U_\rho(w) = \{z : |w-z| < \rho\} \subset U$, $w \in U$, выполняется неравенство*

$$|V(w)| \leq \frac{A}{|U_\rho(w)|} \int\limits_{U_\rho(w)} |V(\zeta)|\, dm_2(\zeta).$$

Тогда имеет место оценка

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \{\max_{\zeta\in\Delta_{k,l}} |V(\zeta)|\omega(|\Delta_{k,l}|^{\frac{1}{2}})|\Delta_{k,l}|\} \leq c(A) \int\limits_U |V(\zeta)|\omega(1-|\zeta|)\, dm_2(\zeta).$$

Здесь A — положительное число, зависящее только от V.

Используя эти результаты, легко доказать справедливость следующего утверждения (см. [12, 3]).

Лемма 6. *Пусть $0 < p \leq 1$, $f \in h^p(B_n)$, $\omega \in \Omega$, причем*

$$\int\limits_0^1 \omega^p(1-r)(1-r)^{(n+1)(p-1)} r^{2n-1}\, dr < +\infty.$$

Тогда имеет место неравенство

$$\Bigg(\int\limits_{B_n} \omega(1-|z|)|f(z)|\, dm_{2n}(z)\Bigg)^p \leq c \int\limits_{B_n} \omega^p(1-|z|)|f(z)|^p(1-|z|^2)^{(n+1)(p-1)}\, dm_{2n}(z).$$

Лемма 6′. *Пусть $0 < p \leq 1$, $f \in h^p(B_n)$, $\alpha > n\big(\frac{1}{p} - 1\big) - 1$, тогда имеет место неравенство*

$$\Bigg(\int\limits_{B_n} (1-|z|^2)^\alpha |f(z)|\, dm_{2n}(z)\Bigg)^p \leq c \int\limits_{B_n} (1-|z|^2)^{\alpha p+(n+1)(p-1)}|f(z)|^p\, dm_{2n}(z).$$

Лемма 7. *Пусть*

$$f \in H(B_n), \quad D^\alpha f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\alpha+1+k)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(k+1)} f_k(z),$$

где $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} f_k(z)$ — однородное разложение функции f. Тогда

$$D^{\alpha+1}\bigg(\frac{1}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^n}\bigg) = \frac{c(n,\alpha)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}} + \int\limits_0^1 \frac{\phi(u)\, du}{(1-u\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}},$$

где $\phi(u)$ — непрерывная на $[0,1]$ функция.

В ходе доказательства данного утверждения использовались свойства гамма-функции Эйлера и метод интегрирования по частям.

Лемма 8. *Справедливо следующее равенство:*

$$\int\limits_0^1 \frac{(1-r)^\alpha r^{2n-1}\,dr}{(1-\lambda\rho r)^{\alpha+n+1}} = \frac{c(\alpha,n)\rho^n}{(1-\rho\lambda)^n} + \int\limits_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha+1}P(\rho,r)\,dr}{(1-\lambda r\rho)^{\alpha+n+1}},$$

где $P(\rho,r)$ — некоторый многочлен от ρ и r.

Доказательство. Имеем

$$I = \int\limits_0^1 \frac{(1-r)^\alpha r^{2n-1}\,dr}{(1-\lambda\rho r)^{\alpha+n+1}} = \frac{c(\alpha,n)}{\rho^{n-1}} \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha r^n \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}}\left(\frac{1}{(1-\lambda\rho r)^{\alpha+2}}\right) dr$$

$$= \frac{c(\alpha,n)}{\rho^{n-1}} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} \int\limits_0^1 \frac{(1-r)^\alpha r^n\,dr}{(1-\lambda\rho r)^{\alpha+2}} = -\frac{c(\alpha,n)}{\rho^{n-1}} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} \int\limits_0^1 \frac{(1-r)^\alpha(1-r^n)\,dr}{(1-\lambda\rho r)^{\alpha+2}}$$

$$+ \frac{c(\alpha,n)}{\rho^{n-1}} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} \int\limits_0^1 \frac{(1-r)^\alpha\,dr}{(1-\lambda\rho r)^{\alpha+2}}.$$

Представляя подынтегральное выражение в виде суммы степенного ряда, легко получить утверждение леммы. □

Используя лемму 8, несложно доказать следующее утверждение.

Лемма 8′. *Справедливо равенство*

$$\int\limits_0^1 \frac{(1-r)^\alpha\,dr}{(1-\lambda\rho r)^{\alpha+n+1}} = \frac{c(\alpha,n)\rho^n}{(1-\rho\lambda)^n} + \int\limits_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha+1}\widetilde{P}(\rho,r)\,dr}{(1-\lambda r\rho)^{\alpha+n+1}},$$

где $\widetilde{P}(\rho,r)$ — некоторый многочлен от ρ и r, где $\lambda \in B = B_1$, $\rho \in (0,1)$.

Лемма 9. *Если $D^{\alpha+1}g \in A^{p',q'}(\omega_\alpha)$, где $\omega_\alpha(t) = \omega(t)\bigl(\frac{t^\alpha}{\omega(t)}\bigr)^{q'}$, $t \in (0,1)$, $1 < p', q' < +\infty$, то*

$$\int\limits_{B_n} (1-|\zeta|)^\alpha |D^{\alpha+1}g(\zeta)|\,d\nu(\zeta) < +\infty,$$

где $d\nu(\zeta)$ — нормированная мера Лебега на шаре B_n.

Доказательство. Применяя неравенство Гёльдера с показателем $p' = \frac{p}{p-1}$, будем иметь

$$\int\limits_{B_n} (1-|\zeta|)^\alpha |D^{\alpha+1}g(\zeta)|\,d\nu(\zeta) = c\int\limits_0^1 (1-r)^\alpha \int\limits_{S_n} |D^{\alpha+1}g(r\zeta)|\,d\sigma(\zeta) r^{2n-1}\,dr$$

$$\le c_1 \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha \left(\int\limits_{S_n} |D^{\alpha+1}g(r\zeta)|^{p'}\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_{S_n} d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}} r^{2n-1}\,dr$$

$$\le c_2 \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha \left(\int\limits_{S_n} |D^{\alpha+1}g(r\zeta)|^{p'}\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p'}} r^{2n-1}\,dr.$$

Учитывая, что $(1-|\zeta|)^\alpha = \omega_\alpha^{\frac{1}{q'}}(1-|\zeta|)\omega^{\frac{1}{q}}(1-|\zeta|)$, и применяя неравенство Гёльдера с показателем $q' = \frac{q}{q-1}$, получим

$$\int_{B_n}(1-|\zeta|)^\alpha|D^{\alpha+1}g(\zeta)|\,d\nu(\zeta)$$

$$\le c_3\left(\int_0^1\omega_\alpha(1-r)\left(\int_{S_n}|D^{\alpha+1}g(r\zeta)|^{p'}\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{q'}{p'}}r^{2n-1}\,dr\right)^{\frac{1}{q'}}$$

$$\times\left(\int_0^1\omega(1-r)r^{2n-1}\,dr\right)^{\frac{1}{q}} \le c_4\|D^{\alpha+1}g\|_{A^{p',q'}(\omega_\alpha)}. \quad \square$$

Лемма 10. *Пусть* $f \in A^{p,q}(\omega)$, $1 < p,q < +\infty$, $D^{\alpha+1}g \in A^{p',q'}(\omega_\alpha)$, *где* $p' = \frac{p}{p-1}$, $q' = \frac{q}{q-1}$. *Тогда*

$$\int_{S_n}f(\rho z)\bar{g}(\rho z)\,d\sigma(z) = c\int_{B_n}(1-|\zeta|^2)^\alpha\overline{D^{\alpha+1}g(\zeta)}\int_{S_n}f(\rho z)\int_0^1\frac{(1-r)^\alpha\,drd\sigma(z)}{(1-r\rho\langle\bar{z},\bar{\zeta}\rangle)^{\alpha+n+1}}\,d\nu(\zeta).$$

Доказательство. Так как $g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}g_k(z)$ — однородное разложение функции g и

$$D^{\alpha+1}g(z) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Gamma(\alpha+k+2)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(k+1)}g_k(z),$$

то

$$g(z) = (\alpha+1)\int_0^1(1-r)^\alpha D^{\alpha+1}g(rz)\,dr.$$

Далее, поскольку функция $D^{\alpha+1}g$ принадлежит $A^{p',q'}(\omega_\alpha)$ и, следовательно, по лемме 9

$$\int_{B_n}(1-|\zeta|)^\alpha|D^{\alpha+1}g(\zeta)|\,d\nu(\zeta) < +\infty,$$

то для нее справедливо представление (см. [10])

$$D^{\alpha+1}g(z) = c(n,\alpha)\int_{B_n}\frac{(1-|\zeta|)^\alpha D^{\alpha+1}g(\zeta)\,d\nu(\zeta)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}, \tag{4}$$

где $c(n,\alpha) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)}$. Тогда

$$g(z) = c(n,\alpha)(\alpha+1)\int_0^1(1-r)^\alpha\int_{B_n}\frac{(1-|\zeta|)^\alpha D^{\alpha+1}g(\zeta)\,d\nu(\zeta)}{(1-r\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}\,dr.$$

Отсюда получаем

$$\int_{S_n}f(\rho z)\overline{g(\rho z)}\,d\sigma(z) = c\int_{S_n}f(\rho z)\int_0^1(1-r)^\alpha\int_{B_n}\overline{\frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha D^{\alpha+1}g(\zeta)\,d\nu(\zeta)}{(1-r\rho\langle\bar{z},\bar{\zeta}\rangle)^{\alpha+n+1}}}\,drd\sigma(z)$$

$$= c\int\limits_{S_n} f(\rho z)\int\limits_{B_n}(1-|\zeta|^2)^{\alpha}\overline{D^{\alpha+1}g(\zeta)}\int\limits_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha}\,dr d\nu(\zeta)\,d\sigma(z)}{(1-r\rho\langle\bar z,\bar\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}$$

$$= c\int\limits_{B_n}(1-|\zeta|^2)^{\alpha}\overline{D^{\alpha+1}g(\zeta)}\int\limits_{S_n} f(\rho z)\int\limits_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha}\,dr d\sigma(z)}{(1-r\rho\langle\bar z,\bar\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}\,d\nu(\zeta). \qquad \square$$

Следующая лемма устанавливается стандартным образом (см. [2, 3, 5]).

Лемма 11. *Пусть* $0<p,q<+\infty$, $f\in A^{p,q}(\omega)$, *положим* $f_\rho(z)=f(\rho z)$. *Тогда* $\|f-f_\rho\|_{A^{p,q}(\omega)}\to 0$ *при* $\rho\to 1-0$.

§ 2. Ограниченные проекторы в пространствах $A^{p,q}(\omega)$

Теорема 1. *Пусть* $\omega\in\Omega$, $1\le p,q<+\infty$, $\alpha>\alpha_\omega$. *Тогда оператор*

$$A_\alpha(f)(z)=c(n,\alpha)\int\limits_{B_n}\frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha}f(\zeta)\,d\nu(\zeta)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}},\quad z\in B_n,$$

где $c(n,\alpha)$ — *константа из* (4), *отображает пространство* $L^{p,q}(\omega)$ *на пространство* $A^{p,q}(\omega)$, *при этом справедлива оценка*

$$\|A_\alpha(f)\|_{A^{p,q}(\omega)}\le c\|f\|_{L^{p,q}(\omega)}.$$

Доказательство. Равенство $A_\alpha(f)(z)=f(z)$, $z\in B_n$, $f\in A^{p,q}(\omega)$, устанавливается стандартным образом с помощью теоремы вложения и интегрального представления из [10]. Предположим теперь, что $f\in L^{p,q}(\omega)$. Тогда, применяя неравенство Минковского, будем иметь

$$\left(\int\limits_{S_n}|A_\alpha(f)(\rho z)|^p\,d\sigma(z)\right)^{\frac1p}=c_1\left(\int\limits_{S_n}\left|\int\limits_0^1\int\limits_{S_n}\frac{(1-r)^{\alpha}f(r\zeta)\,d\sigma(\zeta)}{(1-r\rho\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}r^{2n-1}\,dr\right|^p d\sigma(z)\right)^{\frac1p}$$

$$\le c_2\int\limits_0^1\left(\int\limits_{S_n}\left|\int\limits_{S_n}\frac{(1-r)^{\alpha}f(r\zeta)\,d\sigma(\zeta)}{(1-r\rho\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}\right|^p d\sigma(z)\right)^{\frac1p}r^{2n-1}\,dr.$$

Применим теперь неравенство Гёльдера с показателем $p'=\frac{p}{p-1}$. Получим

$$\left(\int\limits_{S_n}|A_\alpha(f)(\rho z)|^p\,d\sigma(z)\right)^{\frac1p}\le c_3\int\limits_0^1\left(\int\limits_{S_n}\left(\int\limits_{S_n}\frac{(1-r)^{\alpha}|f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)}{|1-r\rho\langle z,\zeta\rangle|^{\alpha+n+1}}\right)\right.$$

$$\left.\times\left(\int\limits_{S_n}\frac{(1-r)^{\alpha}\,d\sigma(\zeta)}{|1-r\rho\langle z,\zeta\rangle|^{\alpha+n+1}}\right)^{\frac{p}{p'}}d\sigma(z)\right)^{\frac1p}r^{2n-1}\,dr$$

$$\le c_4\int\limits_0^1\left(\int\limits_{S_n}|f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac1p}\int\limits_{S_n}\frac{(1-r)^{\alpha}\,d\sigma(\zeta)r^{2n-1}\,dr}{|1-r\rho\langle z,\zeta\rangle|^{\alpha+n+1}}$$

$$\le c_5\int\limits_0^1\frac{(1-r)^{\alpha}}{(1-r\rho)^{\alpha+1}}\left(\int\limits_{S_n}|f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac1p}r^{2n-1}\,dr.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались оценкой (см. [10])

$$\int\limits_{S_n} \frac{d\sigma(\zeta)}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{n+\lambda}} \le \frac{c(n)}{(1-|z|^2)^{\lambda}}, \quad \lambda > 0. \tag{5}$$

Далее,

$$\int\limits_0^1 \omega(1-\rho)\Biggl(\int\limits_{S_n} |A_\alpha(f)(\rho z)|^p\, d\sigma(z)\Biggr)^{\frac{q}{p}} \rho^{2n-1} d\rho$$

$$\le c_6 \int\limits_0^1 \omega(1-\rho)\Biggl(\int\limits_0^1 \frac{(1-r)^\alpha}{(1-r\rho)^{\alpha+1}}\Biggl(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta)\Biggr)^{\frac{1}{p}} r^{2n-1}\, dr\Biggr)^q \rho^{2n-1} d\rho.$$

Умножив и разделив правую часть данного неравенства на функцию $\chi_\gamma(\zeta)$ и применив затем неравенство Гёльдера с показателем $q' = \frac{q}{q-1}$, получаем

$$\int\limits_0^1 \omega(1-\rho)\Biggl(\int\limits_{S_n} |A_\alpha(f)(\rho z)|^p\, d\sigma(z)\Biggr)^{\frac{q}{p}} \rho^{2n-1}\, d\rho$$

$$\le c_7 \int\limits_0^1 \omega(1-\rho)\Biggl(\int\limits_0^1 \frac{(1-r)^\alpha}{(1-r\rho)^{\alpha+1}\chi_\gamma^q(r)}\Biggl(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta)\Biggr)^{\frac{q}{p}} r^{2n-1}\, dr\Biggr)$$

$$\times \Biggl(\int\limits_0^1 \frac{(1-r)^\alpha \chi_\gamma^{q'}(r) r^{2n-1}\, dr}{(1-r\rho)^{\alpha+1}}\Biggr)^{\frac{q}{q'}} \rho^{2n-1} d\rho \le c_8 \int\limits_0^1 \omega(1-\rho)\chi_\gamma^q(\rho)$$

$$\times \int\limits_0^1 \frac{(1-r)^\alpha}{\chi_\gamma^q(r)(1-r\rho)^{\alpha+1}}\Biggl(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta)\Biggr)^{\frac{q}{p}} r^{2n-1}\, dr \rho^{2n-1} d\rho.$$

Меняя порядок интегрирования и применяя к внутреннему интегралу оценку (см. [3])

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(1-\rho)\chi_\gamma^p(\rho) d\rho}{(1-r\rho)^{\alpha+1}} \le c(\alpha)\frac{\omega(1-r)\chi_\gamma^p(r)}{(1-r)^\alpha}, \tag{6}$$

имеем

$$\|A_\alpha(f)\|^q_{A^{p,q}(\omega)}$$

$$\le c_8 \int\limits_0^1 \frac{(1-r)^\alpha}{\chi_\gamma^q(r)}\Biggl(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta)\Biggr)^{\frac{q}{p}} \int\limits_0^1 \frac{\omega(1-\rho)\chi_\gamma^q(\rho)\rho^{2n-1} d\rho}{(1-r\rho)^{\alpha+1}} r^{2n-1}\, dr$$

$$\le c_9 \int\limits_0^1 \frac{(1-r)^\alpha}{\chi_\gamma^q(r)}\Biggl(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta)\Biggr)^{\frac{q}{p}} \frac{\omega(1-r)\chi_\gamma^q(r)}{(1-r)^\alpha} r^{2n-1}\, dr$$

$$= c_9 \int\limits_0^1 \omega(1-r)\Biggl(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta)\Biggr)^{\frac{q}{p}} r^{2n-1}\, dr = c_9\|f\|^q_{L^{p,q}(\omega)}.$$

Таким образом, $\|A_\alpha(f)\|_{A^{p,q}(\omega)} \le c\|f\|_{L^{p,q}(\omega)}$. $\square$

Аналогично устанавливается

Следствие 1. *Пусть $\omega \in \Omega$, $1 \le p, q < +\infty$, $\alpha > \alpha_\omega$. Тогда оператор*

$$T_\alpha(f)(z) = \mathrm{c}(n,\omega) \int\limits_{B_n} \frac{\omega(1-|\zeta|) f(\zeta)\, d\nu(\zeta)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}, \quad z \in B_n,$$

отображает пространство $L^{p,q}(\omega)$ в пространство $A^{p,q}(\omega_\alpha)$, при этом справедлива оценка

$$\|T_\alpha(f)\|_{A^{p,q}(\omega_\alpha)} \le c\|f\|_{L^{p,q}(\omega)}.$$

Теорема 2. *Пусть $\omega \in \Omega$, $0 < p, q \le 1$, $\alpha > \frac{\alpha_\omega+1}{q} + n\left(\frac{1}{p}-1\right) - 1$. Тогда оператор*

$$A_\alpha(f)(z) = c(n,\alpha) \int\limits_{B_n} \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha f(\zeta)\, d\nu(\zeta)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}, \quad z \in B_n,$$

где $c(n,\alpha)$ — константа из (4), отображает пространство $h^{p,q}(\omega)$ на пространство $A^{p,q}(\omega)$, причем

$$\|A_\alpha(f)\|_{A^{p,q}(\omega)} \le c\|f\|_{h^{p,q}(\omega)}.$$

Доказательство. Равенство $A_\alpha(f)(z) = f(z)$, $z \in B_n$, $f \in A^{p,q}(\omega)$, устанавливается, как выше. Предположим теперь, что $f \in h^{p,q}(\omega)$. Так как $0 < p \le 1$, применяя лемму $6'$, будем иметь

$$|A_\alpha(f)(z)|^p \le c_1 \left(\int\limits_{B_n} \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha |f(\zeta)|\, d\nu(\zeta)}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{\alpha+n+1}} \right)^p$$
$$\le c_2 \int\limits_{B_n} \frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha p+(n+1)(p-1)} |f(\zeta)|^p\, d\nu(\zeta)}{|1-\langle z,\zeta\rangle|^{(\alpha+n+1)p}}.$$

Тогда

$$\int\limits_{S_n} |A_\alpha(f)(\rho z)|^p\, d\sigma(z)$$
$$\le c_3 \int\limits_{S_n} \int\limits_0^1 \int\limits_{S_n} \frac{(1-r)^{\alpha p+(n+1)(p-1)} |f(r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta)}{|1-r\rho\langle z,\zeta\rangle|^{(\alpha+n+1)p}} r^{2n-1}\, dr d\sigma(z)$$
$$\le c_3 \int\limits_0^1 \int\limits_{S_n} (1-r)^{\alpha p+(n+1)(p-1)} |f(r\zeta)|^p \int\limits_{S_n} \frac{d\sigma(z)}{|1-r\rho\langle z,\zeta\rangle|^{(\alpha+n+1)p}}\, d\sigma(\zeta) r^{2n-1}\, dr.$$

Используя оценку (5), получим

$$\int\limits_{S_n} |A_\alpha(f)(\rho z)|^p\, d\sigma(z) \le c_4 \int\limits_0^1 \int\limits_{S_n} \frac{(1-r)^{\alpha p+(n+1)(p-1)}}{(1-r\rho)^{(\alpha+n+1)p-n}} |f(r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta) r^{2n-1}\, dr.$$

Рассмотрим теперь все возможные случаи.

1. Пусть $\frac{q}{p} \le 1$. Тогда, применяя лемму 3, приходим к неравенствам

$$\|A_\alpha(f)\|_{A^{p,q}(\omega)}$$

$$\leq c_4\left(\int\limits_0^1\omega(1-\rho)\left(\int\limits_0^1\frac{(1-r)^{\alpha p+(n+1)(p-1)}}{(1-r\rho)^{(\alpha+n+1)p-n}}\int\limits_{S_n}|f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)r^{2n-1}\,dr\right)^{\frac{q}{p}}\rho^{2n-1}d\rho\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq c_5\left(\int\limits_0^1\omega(1-\rho)\int\limits_0^1\frac{(1-r)^{\alpha q+(n+1)(q-\frac{q}{p})+\frac{q}{p}-1}}{(1-r\rho)^{(\alpha+n+1)q-n\frac{q}{p}}}\left(\int\limits_{S_n}|f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{q}{p}}r^{2n-1}\,dr\rho^{2n-1}d\rho\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Меняя порядок интегрирования и применяя к внутреннему интегралу оценку (6), получим

$$\|A_\alpha(f)\|_{A^{p,q}(\omega)}\leq c_6\left(\int\limits_0^1(1-r)^{\alpha q+(n+1)q-\frac{q}{p}n-1}\left(\int\limits_{S_n}|f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{q}{p}}\right.$$

$$\left.\times\int\limits_0^1\frac{\omega(1-\rho)}{(1-r\rho)^{(\alpha+n+1)q-n\frac{q}{p}}}\rho^{2n-1}d\rho r^{2n-1}\,dr\right)^{\frac{1}{q}}\leq c\left(\int\limits_0^1(1-r)^{\alpha q+(n+1)q-\frac{q}{p}n-1}\right.$$

$$\left.\times\frac{\omega(1-r)}{(1-r)^{(\alpha+n+1)q-n\frac{q}{p}-1}}\left(\int\limits_{S_n}|f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{q}{p}}r^{2n-1}\,dr\right)^{\frac{1}{q}}=c\|f\|_{h^{p,q}(\omega)}.$$

2. Пусть $\frac{q}{p}>1$. Тогда

$$\left(\int\limits_0^1\omega(1-\rho)\left(\int\limits_{S_n}|A_\alpha(f)(\rho z)|^p\,d\sigma(z)\right)^{\frac{q}{p}}\rho^{2n-1}d\rho\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq c_7\left(\int\limits_0^1\omega(1-\rho)\left(\int\limits_0^1\frac{(1-r)^{\alpha p+(n+1)(p-1)}}{(1-r\rho)^{(\alpha+n+1)p-n}}\int\limits_{S_n}|f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)r^{2n-1}\,dr\right)^{\frac{q}{p}}\rho^{2n-1}d\rho\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Умножив и разделив правую часть данного неравенства на $\chi_\gamma(r)$ и применив неравенство Гёльдера с показателем $\frac{q}{q-p}$, будем иметь

$$\|A_\alpha(f)\|_{A^{p,q}(\omega)}\leq c_7\left(\int\limits_0^1\omega(1-\rho)\left(\int\limits_0^1\frac{(1-r)^{\alpha p+(n+1)(p-1)}}{(1-r\rho)^{(\alpha+n+1)p-n}\chi_\gamma^{\frac{q}{p}}(r)}\right.\right.$$

$$\times\left(\int\limits_{S_n}|f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{q}{p}}r^{2n-1}\,dr\Bigg)\left(\int\limits_0^1\frac{(1-r)^{\alpha p+(n+1)(p-1)}\chi_\gamma^{\frac{q}{q-p}}(r)}{(1-r\rho)^{(\alpha+n+1)p-n}}\right.$$

$$\left.\left.\times r^{2n-1}\,dr\right)^{\frac{q-p}{q}\frac{q}{p}}\rho^{2n-1}d\rho\right)^{\frac{1}{q}}\leq c_8\left(\int\limits_0^1\omega(1-\rho)\chi_\gamma^{\frac{q}{p}}(\rho)\right.$$

$$\left.\times\int\limits_0^1\frac{(1-r)^{\alpha p+(n+1)(p-1)}}{(1-r\rho)^{(\alpha+n+1)p-n}\chi_\gamma^{\frac{q}{p}}(r)}\left(\int\limits_{S_n}|f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{q}{p}}r^{2n-1}\,dr\rho^{2n-1}d\rho\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Поменяем порядок интегрирования и оценим внутренний интеграл:

$$\|A_\alpha(f)\|_{A^{p,q}(\omega)}\leq c_9\left(\int\limits_0^1\frac{(1-r)^{\alpha p+(n+1)(p-1)}}{\chi_\gamma^{\frac{q}{p}}(r)}\left(\int\limits_{S_n}|f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{q}{p}}\right.$$

$$\times \int_0^1 \frac{\omega(1-\rho)\chi_\gamma^{\frac{q}{p}}(\rho)}{(1-r\rho)^{(\alpha+n+1)p-n}} \rho^{2n-1} d\rho r^{2n-1}\, dr\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le c\left(\int_0^1 \frac{(1-r)^{\alpha p+(n+1)(p-1)}\omega(1-r)\chi_\gamma^{\frac{q}{p}}(r)}{\chi_\gamma^{\frac{q}{p}}(r)(1-r)^{(\alpha+n+1)p-n-1}}\left(\int_{S_n} |f(r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{q}{p}} r^{2n-1}\, dr\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= c\|f\|_{h^{p,q}(\omega)}. \qquad \square$$

Таким же образом устанавливается

Следствие 2. *Пусть $\omega \in \Omega$ удовлетворяет условию*

$$\int_0^1 \omega^p(1-r)(1-r)^{(n+1)(p-1)}\, dr < +\infty,$$

$0 < p, q \le 1$, $\alpha > \frac{\alpha_\omega+1}{q} + n\left(\frac{1}{p}-1\right) - 1$. *Тогда оператор*

$$T_\alpha(f)(z) = \mathrm{c}(n,\omega)\int_{B_n} \frac{\omega(1-|\zeta|)f(\zeta)\, d\nu(\zeta)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}, \quad z \in B_n,$$

отображает пространство $h^{p,q}(\omega)$ в пространство $A^{p,q}(\omega_\alpha)$, причем

$$\|T_\alpha(f)\|_{A^{p,q}(\omega_\alpha)} \le c\|f\|_{h^{p,q}(\omega)}.$$

Теорема 3. *Пусть $\omega \in \Omega$. Предположим, что*
1) если $1 < p < +\infty$, $0 < q \le 1$, то $\alpha > \frac{\alpha_\omega+1}{q} - 1$,
2) если $0 < p \le 1$, $1 < q < +\infty$, то $\alpha > \frac{\alpha_\omega}{q} + n\left(\frac{1}{p}-1\right) - \frac{1}{q'}$, где $q' = \frac{q}{q-1}$.
Тогда оператор

$$A_\alpha(f)(z) = c(n,\alpha)\int_{B_n} \frac{(1-|\zeta|^2)^\alpha f(\zeta)\, d\nu(\zeta)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}, \quad z \in B_n,$$

где $c(n,\alpha)$ — константа из (4), отображает пространство $h^{p,q}(\omega)$ на пространство $A^{p,q}(\omega)$, причем

$$\|A_\alpha(f)\|_{A^{p,q}(\omega)} \le c\|f\|_{h^{p,q}(\omega)}.$$

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Запишем норму функции $A_\alpha(f)$ в пространстве $A^{p,q}(\omega)$. Так как $1 < p < +\infty$, воспользовавшись неравенством Гёльдера с показателем $p' = \frac{p}{p-1}$, будем иметь

$$\|A_\alpha(f)\|_{A^{p,q}(\omega)} \le c_1\left(\int_0^1 \omega(1-\rho)\left(\int_{S_n}\left(\int_0^1\int_{S_n} \frac{(1-r)^\alpha|f(r\zeta)|\, d\sigma(\zeta)r^{2n-1}\, dr}{|1-r\rho\langle z,\zeta\rangle|^{\alpha+n+1}}\right)^p\right.\right.$$

$$\left.\left. d\sigma(z)\right)^{\frac{q}{p}}\rho^{2n-1}d\rho\right)^{\frac{1}{q}} \le c_2\left(\int_0^1 \omega(1-\rho)\left(\int_{S_n}\left(\int_0^1\int_{S_n} \frac{(1-r)^\alpha|f(r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta)r^{2n-1}\, dr}{\chi_\gamma^p(r)|1-r\rho\langle z,\zeta\rangle|^{\alpha+n+1}}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\int_0^1\int_{S_n} \frac{(1-r)^\alpha\chi_\gamma^{p'}(r)\, d\sigma(\zeta)r^{2n-1}\, dr}{|1-r\rho\langle z,\zeta\rangle|^{\alpha+n+1}}\right)^{\frac{p}{p'}} d\sigma(z)\right)^{\frac{q}{p}}\rho^{2n-1}d\rho\right)^{\frac{1}{q}} \le c_3\left(\int_0^1 \omega(1-\rho)\right.$$

$$\times\left(\chi_\gamma^p(\rho)\int\limits_{S_n}\int\limits_0^1\int\limits_{S_n}\frac{(1-r)^\alpha|f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)r^{2n-1}\,dr}{\chi_\gamma^p(r)|1-r\rho\langle z,\zeta\rangle|^{\alpha+n+1}}\,d\sigma(z)\right)^{\frac{q}{p}}\rho^{2n-1}\,d\rho\Bigg)^{\frac{1}{q}}.$$

Так как $\frac{q}{p}\le 1$, используя лемму 3, имеем

$$\|A_\alpha(f)\|_{A^{p,q}(\omega)}\le c_4\Bigg(\int\limits_0^1\omega(1-\rho)\chi_\gamma^q(\rho)\int\limits_0^1\frac{(1-r)^{\alpha\frac{q}{p}+\frac{q}{p}-1}}{\chi_\gamma^q(r)}$$

$$\times\left(\int\limits_{S_n}|f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{q}{p}}\left(\int\limits_{S_n}\frac{d\sigma(z)}{|1-r\rho\langle z,\zeta\rangle|^{\alpha+n+1}}\right)^{\frac{q}{p}}r^{2n-1}\,dr\rho^{2n-1}d\rho\Bigg)^{\frac{1}{q}}.$$

Применяя к внутреннему интегралу лемму 2, получаем

$$\|A_\alpha(f)\|_{A^{p,q}(\omega)}\le c_5\Bigg(\int\limits_0^1\omega(1-\rho)\chi_\gamma^q(\rho)(1-\rho)^{n(\frac{q}{p}-1)}$$

$$\times\int\limits_0^1\frac{(1-r)^{\alpha\frac{q}{p}+\frac{q}{p}-1}}{\chi_\gamma^q(r)}\left(\int\limits_{S_n}|f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{q}{p}}\int\limits_{S_n}\frac{d\sigma(z)}{|1-r\rho\langle z,\zeta\rangle|^{(\alpha+n+1)\frac{q}{p}}}$$

$$\times r^{2n-1}\,dr\rho^{2n-1}d\rho\Bigg)^{\frac{1}{q}}\le c_6\Bigg(\int\limits_0^1\frac{(1-r)^{\alpha\frac{q}{p}+\frac{q}{p}-1}}{\chi_\gamma^q(r)}\left(\int\limits_{S_n}|f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\times\int\limits_0^1\int\limits_{S_n}\frac{\omega(1-\rho)\chi_\gamma^q(\rho)(1-\rho)^{n(\frac{q}{p}-1)}}{|1-r\rho\langle z,\zeta\rangle|^{(\alpha+n+1)\frac{q}{p}}}\,d\sigma(z)\rho^{2n-1}d\rho r^{2n-1}\,dr\Bigg)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le c\left(\int\limits_0^1\frac{(1-r)^{\alpha\frac{q}{p}+\frac{q}{p}-1}}{\chi_\gamma^q(r)}\frac{\omega(1-r)\chi_\gamma^q(r)}{(1-r)^{\alpha\frac{q}{p}+\frac{q}{p}-1}}\left(\int\limits_{S_n}|f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{q}{p}}r^{2n-1}\,dr\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=c\|f\|_{h^{p,q}(\omega)}.$$

Докажем вторую часть теоремы. Так как $0<p\le 1$, $1<q<+\infty$, то $\frac{q}{p}>1$ и, следовательно, утверждение п. 2 теоремы вытекает из соответствующих рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 2. $\square$

С помощью таких же рассуждений получаем

Следствие 3. *Пусть $\omega\in\Omega$. Предположим, что*
1) *если $1<p<+\infty$, $0<q\le 1$, то $\alpha>\frac{\alpha_\omega+1}{q}-1$,*
2) *если $0<p\le 1$, $1<q<+\infty$, то $\alpha>\frac{\alpha_\omega}{q}+n\big(\frac{1}{p}-1\big)-\frac{1}{q'}$, где $q'=\frac{q}{q-1}$.*
Тогда оператор

$$T_\alpha(f)(z)=c(n,\omega)\int\limits_{B_n}\frac{\omega(1-|\zeta|)f(\zeta)\,d\nu(\zeta)}{(1-\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}},\quad z\in B_n,$$

отображает пространство $h^{p,q}(\omega)$ в пространство $A^{p,q}(\omega_\alpha)$, причем

$$\|T_\alpha(f)\|_{A^{p,q}(\omega_\alpha)}\le c\|f\|_{h^{p,q}(\omega)}.$$

§ 3. Описание линейных непрерывных функционалов в весовых пространствах аналитических в шаре функций со смешанной нормой

Заметим, что если $\min(p,q)<1$, то каждый линейный непрерывный функционал на $L^{p,q}(\omega)$ нулевой. В то же время, например, $\Phi_{z_0}(f)=f(z_0)$, $z_0\in B_n$, является линейным непрерывным функционалом на $A^{p,q}(\omega)$. В этом параграфе, используя результаты § 2, мы получим полное описание линейных непрерывных функционалов в пространствах $A^{p,q}(\omega)$ в том случае, когда ω принадлежит классу функций Ω, правильно изменяющихся на интервале $(0,1)$, а $0<p,q<+\infty$.

Для изложения результатов сначала введем следующие определения. Пусть $0<p,q\le 1$, обозначим через $\lambda_\omega^{p,q}$ класс аналитических в B_n функций g, для которых

$$\|g\|_{\lambda_\omega^{p,q}}=\sup_{z\in B_n}\frac{(1-|z|)^{\alpha-n(\frac{1}{p}-1)-\frac{1}{q}+1}}{\omega^{\frac{1}{q}}(1-|z|)}|D^{\alpha+1}g(z)|<+\infty,$$

где $\alpha>\frac{\alpha_\omega+1}{q}+n\big(\frac{1}{p}-1\big)-1$.

Если же $0<p\le 1$, $1<q<+\infty$, то через $\tilde\lambda_\omega^{p,q}$ обозначим множество всех голоморфных в B_n функций g, для которых

$$\|g\|_{\tilde\lambda_\omega^{p,q}}=\left(\int_0^1\frac{(1-r)^{\alpha q'-nq'(\frac{1}{p}-1)}}{\omega^{\frac{q'}{q}}(1-r)}\big(\sup_{z\in S_n}|D^{\alpha+1}g(rz)|\big)^{q'}r^{2n-1}\,dr\right)^{\frac{1}{q'}}<+\infty,$$

где $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$, $\alpha>\frac{\alpha_\omega}{q}+n\big(\frac{1}{p}-1\big)-\frac{1}{q'}$.

Если $1<p<+\infty$, $0<q\le 1$, то обозначим через $\tilde{\tilde\lambda}_\omega^{p,q}$ множество голоморфных в B_n функций g таких, что

$$\|g\|_{\tilde{\tilde\lambda}_\omega^{p,q}}=\sup_{0<r\le 1}\frac{(1-r)^{\alpha+1-\frac{1}{q}}}{\omega^{\frac{1}{q}}(1-r)}\left(\int_{S_n}|D^{\alpha+1}g(rz)|^{p'}\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p'}}<+\infty,$$

где $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, $\alpha>\frac{\alpha_\omega+1}{q}-2$. Нетрудно заметить, что определение этих классов не зависит от α, при этом относительно указанных норм множества $\lambda_\omega^{p,q}$, $\tilde\lambda_\omega^{p,q}$ и $\tilde{\tilde\lambda}_\omega^{p,q}$ превращаются в банаховы пространства.

Пусть $z,\zeta\in B_n$, положим $e_z(\zeta)=\frac{1}{(1-\langle\zeta,\bar z\rangle)^n}$.

Следующая лемма в случае поликруга в L^p-пространствах установлена в работе [3].

Лемма 12. *Пусть $1<p,q<+\infty$, $\omega\in\Omega$, $\psi(\zeta)\in L^{p,q}(\omega)$ и*

$$g(z)=\int_{B_n}\frac{\overline{\psi(\zeta)}\omega(1-|\zeta|)\,d\nu(\zeta)}{(1-\langle z,\bar\zeta\rangle)^n}.$$

Тогда $D^{\alpha+1}g\in A^{p,q}(\omega_\alpha)$, причем справедлива оценка

$$\|D^{\alpha+1}g\|_{A^{p,q}(\omega_\alpha)}\le c\|\psi\|_{L^{p,q}(\omega)}.$$

Доказательство. Используя лемму 7, имеем

$$D^{\alpha+1}g(z)=c_1\int_{B_n}\frac{\overline{\psi(\zeta)}\omega(1-|\zeta|)\,d\nu(\zeta)}{(1-\langle z,\bar\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}+\int_0^1\phi(u)\int_{B_n}\frac{\overline{\psi(\zeta)}\omega(1-|\zeta|)\,d\nu(\zeta)}{(1-u\langle z,\bar\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}\,du,$$

где $\phi(u) \in C[0,1]$. Заметим, что

$$T_\alpha(\psi)(uz) = \int\limits_{B_n} \frac{\overline{\psi(\zeta)}\omega(1-|\zeta|)\,d\nu(\zeta)}{(1-u\langle z,\bar{\zeta}\rangle)^{\alpha+n+1}},$$

где T_α — оператор из следствия 1. Кроме того,

$$\|T_\alpha(\psi)(u\cdot)\|_{A^{p,q}(\omega_\alpha)} \le c_2\|T_\alpha(\psi)\|_{A^{p,q}(\omega_\alpha)}$$

при $0 \le u \le 1$, тогда по следствию 1

$$\|T_\alpha(\psi)(u\cdot)\|_{A^{p,q}(\omega_\alpha)} \le c_2\|T_\alpha(\psi)\|_{A^{p,q}(\omega_\alpha)} \le c_3\|\psi\|_{L^{p,q}(\omega)}.$$

Применяя неравенство Минковского, будем иметь

$$\|D^{\alpha+1}g\|_{A^{p,q}(\omega_\alpha)} \le c_1\|T_\alpha(\psi)\|_{A^{p,q}(\omega_\alpha)} + \int\limits_0^1 |\phi(u)|\|T_\alpha(\psi)(u\cdot)\|_{A^{p,q}(\omega_\alpha)}\,du$$

$$\le c_4\|\psi\|_{L^{p,q}(\omega)}\left(1+\int\limits_0^1 |\phi(u)|\,du\right) = c\|\psi\|_{L^{p,q}(\omega)} < +\infty. \qquad \square$$

Теорема 4. *Пусть Φ — линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}(\omega)$, $1 < p,q < +\infty$, и $g(z) = \Phi(e_z)$, $z \in B_n$. Тогда g голоморфна в B_n и $D^{\alpha+1}g \in A^{p',q'}(\omega_\alpha)$ при $\alpha > \alpha_\omega$, где $p' = \frac{p}{p-1}$, $q' = \frac{q}{q-1}$, $\omega_\alpha(t) = \omega(t)\left(\frac{t^\alpha}{\omega(t)}\right)^{q'}$, $t \in (0,1)$. Функционал Φ представи́м в виде*

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0}\int\limits_{S_n} f(\rho\zeta)\overline{g(\rho\zeta)}\,d\sigma(\zeta), \tag{7}$$

и справедливы оценки

$$c_1\|D^{\alpha+1}g\|_{A^{p',q'}(\omega_\alpha)} \le \|\Phi\| \le c_2\|D^{\alpha+1}g\|_{A^{p',q'}(\omega_\alpha)}. \tag{8}$$

Верно и обратное: любая функция g такая, что $D^{\alpha+1}g \in A^{p',q'}(\omega_\alpha)$, по формуле (7) порождает линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}(\omega)$, для которого справедливы оценки (8).

Доказательство. Предположим, что Φ — линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}(\omega)$ и $g(z) = \Phi(e_z)$, $z \in B_n$. Продолжим Φ на $L^{p,q}(\omega)$ с сохранением нормы. По теореме Бенедека — Понцоне [13] существует функция $\psi \in L^{p',q'}(\omega)$ такая, что

$$\Phi(f) = \int\limits_{B_n} f(\zeta)\overline{\psi(\zeta)}\omega(1-|\zeta|)\,d\nu(\zeta),$$

причем $\|\Phi\| = \|\psi\|_{L^{p',q'}(\omega)}$. Тогда

$$g(z) = \int\limits_{B_n} \frac{\overline{\psi(\zeta)}\omega(1-|\zeta|)\,d\nu(\zeta)}{(1-\langle z,\bar{\zeta}\rangle)^n}.$$

Отсюда по лемме 12

$$\|D^{\alpha+1}g\|_{A^{p',q'}(\omega_\alpha)} \le c\|\psi\|_{L^{p',q'}(\omega)} = c\|\Phi\|. \tag{9}$$

Далее, разлагая $e_z(\zeta)$ в ряд и учитывая, что он сходится в $A^{p,q}(\omega)$, получим

$$g(z) = \Phi(e_z) = \int\limits_{B_n} \frac{\overline{\psi(\zeta)}\omega(1-|\zeta|)\,d\nu(\zeta)}{(1-\langle z,\bar\zeta\rangle)^n} = \int\limits_{B_n} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(n)\Gamma(k+1)} (\langle z,\bar\zeta\rangle)^k$$

$$\times \overline{\psi(\zeta)}\omega(1-|\zeta|)\,d\nu(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(n)\Gamma(k+1)} \int\limits_{B_n} (\langle z,\bar\zeta\rangle)^k \overline{\psi(\zeta)}\omega(1-|\zeta|)\,d\nu(\zeta)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(n)\Gamma(k+1)} \Phi(\langle z,\bar\zeta\rangle^k).$$

Пусть $f \in A^{p,q}(\omega)$ и $0 < \rho < 1$, положим $f_\rho(z) = f(\rho z)$, $z \in B_n$. Тогда по лемме 11 $\|f - f_\rho\| \underset{A^{p,q}(\omega)}{\longrightarrow} 0$ при $\rho \to 1-0$, и так как $f_\rho \in H^1(B_n)$, то

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0} \Phi(f_\rho) = \lim_{\rho\to 1-0} \Phi(f_{\rho^2})$$

$$= \lim_{\rho\to 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} \Phi\left(\int\limits_{S_n} \frac{f(\rho\zeta)\Gamma(k+n)}{\Gamma(n)\Gamma(k+1)} (\rho\langle z,\bar\zeta\rangle)^k\,d\sigma(\zeta)\right)$$

$$= \lim_{\rho\to 1-0} \int\limits_{S_n} f(\rho\zeta) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(n)\Gamma(k+1)} \Phi((\langle \rho\zeta,\bar z\rangle)^k)\,d\sigma(\zeta) = \lim_{\rho\to 1-0} \int\limits_{S_n} f(\rho\zeta)\overline{g(\rho\zeta)}\,d\sigma(\zeta).$$

При этом согласно (9) имеет место левая оценка в (8). Для установления правой оценки докажем обратное утверждение теоремы. Пусть g — голоморфная в B_n функция такая, что $D^{\alpha+1}g \in A^{p',q'}(\omega_\alpha)$. Докажем, что по формуле (7) порождается линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}(\omega)$, при этом справедливы оценки (8). Пусть $f \in A^{p,q}(\omega)$, $0 < \rho < 1$. Тогда по лемме 10

$$\left|\int\limits_{S_n} f(\rho z)\overline{g(\rho z)}\,d\sigma(z)\right| \le c_3 \left| \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^\alpha \overline{D^{\alpha+1}g(\zeta)} \int\limits_{S_n} f(\rho z) \right.$$

$$\left. \times \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^\alpha\,dtd\sigma(z)}{(1-t\rho\langle\bar z,\bar\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}\,d\nu(\zeta)\right|.$$

Применяя теперь лемму $8'$, получим

$$\left|\int\limits_{S_n} f(\rho z)\overline{g(\rho z)}\,d\sigma(z)\right| \le c_4 \left| \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^\alpha \overline{D^{\alpha+1}g(\zeta)} \int\limits_{S_n} \frac{f(\rho z)\,d\sigma(z)\,d\nu(\zeta)}{(1-\rho\langle\bar z,\bar\zeta\rangle)^n} \right.$$

$$\left. + \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^\alpha \overline{D^{\alpha+1}g(\zeta)} \int\limits_{S_n} f(\rho z) \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}\widetilde{P}(t,\rho)\,dtd\sigma(z)}{(1-t\rho\langle\bar z,\bar\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}\,d\nu(\zeta)\right|$$

$$\le c_5 \left(\left| \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^\alpha \overline{D^{\alpha+1}g(\zeta)} f(\rho^2\bar\zeta)\,d\nu(\zeta)\right| + \left| \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^\alpha \overline{D^{\alpha+1}g(\zeta)} \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \int\limits_0^1 \int\limits_{S_n} \frac{f(\rho z)\gamma(t,\rho\langle\zeta,z\rangle)}{(1-t\rho\langle\bar z,\bar\zeta\rangle)^n}\,d\sigma(z)\,dtd\nu(\zeta)\right|\right) = c_5(I_1 + I_2),$$

где
$$\gamma(t,\rho\langle\zeta,z\rangle)=\frac{(1-t)^{\alpha+1}\widetilde{P}(t,\rho)}{(1-t\rho\langle\bar z,\bar\zeta\rangle)^{\alpha+1}}=\frac{(1-t)^{\alpha+1}\widetilde{P}(t,\rho)}{(1-t\rho\langle\zeta,z\rangle)^{\alpha+1}}.$$
Очевидно, что $|\gamma(t,\rho\langle\zeta,z\rangle)|\le c(n,\alpha)$. Следовательно,
$$|I_1|\le c_6\int_0^1(1-r)^\alpha\biggl(\int_{S_n}|D^{\alpha+1}g(r\zeta)|^{p'}\,d\sigma(\zeta)\biggr)^{\frac{1}{p'}}\biggl(\int_{S_n}|f(\rho^2r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\biggr)^{\frac1p}r^{2n-1}\,dr$$
$$=c_6\int_0^1\omega_\alpha^{\frac{1}{q'}}(1-r)\omega^{\frac1q}(1-r)\biggl(\int_{S_n}|D^{\alpha+1}g(r\zeta)|^{p'}\,d\sigma(\zeta)\biggr)^{\frac{1}{p'}}\biggl(\int_{S_n}|f(\rho^2r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\biggr)^{\frac1p}$$
$$\times r^{2n-1}\,dr\le c_7\|D^{\alpha+1}g\|_{A^{p',q'}(\omega_\alpha)}\|f\|_{A^{p,q}(\omega)},$$
здесь мы дважды воспользовались неравенством Гёльдера с $p'=\frac{p}{p-1}$ и $q'=\frac{q}{q-1}$. Для оценки I_2 поступим следующим образом:
$$I_2=\int_0^1\int_{B_n}(1-|\zeta|^2)^\alpha\overline{D^{\alpha+1}g(\zeta)}\int_{S_n}\frac{f(\rho z)\gamma(t,\rho\langle\zeta,z\rangle)}{(1-t\rho\langle\bar z,\bar\zeta\rangle)^n}\,d\sigma(z)\,d\nu(\zeta)\,dt.$$
Положим
$$\psi_{t,\rho}(\zeta)=\int_{S_n}\frac{f(\rho z)\gamma(t,\rho\langle\zeta,z\rangle)}{(1-t\rho\langle\bar z,\bar\zeta\rangle)^n}\,d\sigma(z).$$
По теореме М. Рисса (см. [10])
$$\int_{S_n}|\psi(\rho\zeta')|^p\,d\sigma(\zeta')\le c(p)\biggl(\int_{S_n}|f(\rho\zeta')|^p|\gamma(t,\rho\langle z,\zeta'\rangle)|^p\,d\sigma(\zeta')\biggr)$$
$$\le c(p,n)\int_{S_n}|f(\rho\zeta')|^p\,d\sigma(\zeta'),$$
где $\zeta'=\frac{\zeta}{\rho}$, $|\zeta'|=1$. Поэтому, применяя неравенство Гёльдера, будем иметь
$$|I_2|\le c_8\int_0^1\int_{B_n}(1-|\zeta|^2)^\alpha\overline{D^{\alpha+1}g(\zeta)}|\psi_{t,\rho}(\zeta)|\,d\nu(\zeta)r^{2n-1}\,dt$$
$$\le c_9\int_0^1(1-r)^\alpha\biggl(\int_{S_n}|D^{\alpha+1}g(r\zeta)|^{p'}\,d\sigma(\zeta)\biggr)^{\frac{1}{p'}}\biggl(\int_{S_n}|\psi(r\rho^2\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\biggr)^{\frac1p}r^{2n-1}\,dr$$
$$=c_9\int_0^1\omega_\alpha^{\frac{1}{q'}}(1-r)\omega^{\frac1q}(1-r)\biggl(\int_{S_n}|D^{\alpha+1}g(r\zeta)|^{p'}\,d\sigma(\zeta)\biggr)^{\frac{1}{p'}}\biggl(\int_{S_n}|f(r\rho^2\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\biggr)^{\frac1p}$$
$$\times r^{2n-1}\,dr\le c_{10}\|D^{\alpha+1}g\|_{A^{p',q'}(\omega_\alpha)}\|f\|_{A^{p,q}(\omega)}.$$
Таким образом,
$$\biggl|\int_{S_n}f(\rho z)\overline{g(\rho z)}\,d\sigma(z)\biggr|\le c_{11}\|D^{\alpha+1}g\|_{A^{p',q'}(\omega_\alpha)}\|f\|_{A^{p,q}(\omega)}.$$

Отсюда легко видеть, что существует предел

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0} \int\limits_{S_n} f(\rho z)\overline{g(\rho z)}\, d\sigma(z),$$

при этом $|\Phi(f)| \le c_{11}\|f\|_{A^{p,q}(\omega)}\|D^{\alpha+1}g\|_{A^{p',q'}(\omega_\alpha)}$, т. е. Φ — линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}(\omega)$ и $\|\Phi\| \le c_2\|D^{\alpha+1}g\|_{A^{p',q'}(\omega_\alpha)}$. В то же время нетрудно заметить, что $\Phi(e_z) = g(z)$, $z \in B_n$. Отсюда и из первой части теоремы следует, что имеют место все оценки в (8). $\square$

Теорема 5. *Пусть $0 < p, q \le 1$, $\omega \in \Omega$. Тогда если Φ — линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}(\omega)$ и $g(z) = \Phi(e_z)$, $z \in B_n$, то $g \in \lambda_\omega^{p,q}$ и Φ представи́м в виде*

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0} \int\limits_{S_n} f(\rho\zeta)\overline{g(\rho\zeta)}\, d\sigma(\zeta), \tag{10}$$

при этом справедливы оценки

$$c_1\|\Phi\| \le \|g\|_{\lambda_\omega^{p,q}} \le c_2\|\Phi\|. \tag{11}$$

Обратно, любая функция $g \in \lambda_\omega^{p,q}$ по формуле (10) *порождает линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}(\omega)$, для которого справедливы оценки* (11).

Доказательство. Предположим, что Φ — линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}(\omega)$ и $g(z) = \Phi(e_z)$, $z \in B_n$. Тогда с учетом леммы 4 Φ будет непрерывен в пространстве $A^{1,1}(\omega^*)$, где

$$\omega^*(1-|z|) = \omega^{\frac{1}{q}}(1-|z|)(1-|z|^2)^{\frac{1}{q}-1+n(\frac{1}{p}-1)},$$

с нормой

$$\|f\|_{A^{1,1}(\omega^*)} = \int\limits_{B_n} \omega^*(1-|z|)|f(z)|\, d\nu(z) \le c\|f\|_{A^{p,q}(\omega)}.$$

Продолжим Φ с $A^{1,1}(\omega^*)$ на всё $L^1(\omega^*) = L^{1,1}(\omega^*)$ с сохранением нормы. По теореме Ф. Рисса (см. [14]) существует функция $\psi \in L^\infty(B_n)$ такая, что

$$\Phi(f) = \int\limits_{B_n} \omega^*(1-|z|)f(z)\overline{\psi(z)}\, d\nu(z),$$

причем $\|\Phi\| = \|\psi\|_{L^\infty(B_n)}$. Тогда, используя лемму 7, будем иметь

$$D^{\alpha+1}g(z) = \Phi\left(\frac{c_3}{(1-\langle z,\bar\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}} + \int\limits_0^1 \frac{\phi(u)\,du}{(1-u\langle z,\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}\right)$$

$$= c_3\int\limits_{B_n} \frac{\omega^*(1-|\zeta|)\overline{\psi(\zeta)}\,d\nu(\zeta)}{(1-\rho\langle z,\bar\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}} + \int\limits_{B_n}\int\limits_0^1 \frac{\omega^*(1-|\zeta|)\phi(u)\overline{\psi(\zeta)}\,d\nu(\zeta)\,du}{(1-u\rho\langle z,\bar\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}.$$

Оценим $D^{\alpha+1}g$ по модулю и, учитывая, что

$$\omega^*(1-|\zeta|) = \omega^{\frac{1}{q}}(1-|\zeta|)(1-|\zeta|^2)^{\frac{1}{q}-1+n(\frac{1}{p}-1)},$$

получим

$$|D^{\alpha+1}g(z)| \le c_4\|\psi\|_{L^\infty(B_n)}\Bigg(\int\limits_{B_n} \frac{\omega^{\frac1q}(1-|\zeta|)(1-|\zeta|^2)^{\frac1q-1+n(\frac1p-1)}}{|1-\rho\langle z,\bar\zeta\rangle|^{\alpha+n+1}}\,d\nu(\zeta)$$

$$+\int\limits_{B_n}\int\limits_0^1 \frac{\omega^{\frac1q}(1-|\zeta|)(1-|\zeta|^2)^{\frac1q-1+n(\frac1p-1)}|\phi(u)|\,dud\nu(\zeta)}{|1-u\rho\langle z,\bar\zeta\rangle|^{\alpha+n+1}}\Bigg)$$

$$\le c_5\|\psi\|_{L^\infty(B_n)}\Bigg(\int\limits_0^1 \frac{\omega^{\frac1q}(1-r)(1-r)^{\frac1q-1+n(\frac1p-1)}}{(1-r\rho)^{\alpha+1}}r^{2n-1}\,dr$$

$$+\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{\omega^{\frac1q}(1-r)(1-r)^{\frac1q-1+n(\frac1p-1)}|\phi(u)|\,dur^{2n-1}\,dr}{(1-ru\rho)^{\alpha+1}}\Bigg).$$

Так как $\alpha > \frac{\alpha_\omega+1}{q}+n\big(\frac1p-1\big)-1$, то, оценив первый интеграл и применив затем (6), получим

$$|D^{\alpha+1}g(z)| \le c_6\|\psi\|_{L^\infty(B_n)}\Bigg(\frac{\omega^{\frac1q}(1-\rho)}{(1-\rho)^{\alpha-\frac1q+1-n(\frac1p-1)}}$$

$$+\int\limits_0^1 \omega^{\frac1q}(1-r)(1-r)^{\frac1q-1+n(\frac1p-1)}\int\limits_0^1\frac{|\phi(u)|\,du}{(1-ru\rho)^{\alpha+1}}\Bigg).$$

Поскольку

$$\left|\int\limits_0^1 \frac{\phi(u)\,du}{(1-ru\rho)^{\alpha+1}}\right| \le \frac{c_7}{(1-r\rho)^\alpha},\quad \alpha>0,$$

в итоге приходим к неравенствам

$$|D^{\alpha+1}g(z)| \le c_8\|\psi\|_{L^\infty(B_n)}\Bigg(\frac{\omega^{\frac1q}(1-\rho)}{(1-\rho)^{\alpha-\frac1q+1-n(\frac1p-1)}}$$

$$+\int\limits_0^1 \frac{\omega^{\frac1q}(1-r)(1-r)^{\frac1q-1+n(\frac1p-1)}r^{2n-1}\,dr}{(1-r\rho)^\alpha}\Bigg)$$

$$\le c_9\|\psi\|_{L^\infty(B_n)}\left(\frac{\omega^{\frac1q}(1-\rho)}{(1-\rho)^{\alpha-\frac1q+1-n(\frac1p-1)}}+\frac{\omega^{\frac1q}(1-\rho)}{(1-\rho)^{\alpha-\frac1q-n(\frac1p-1)}}\right)$$

$$\le c_{10}\frac{\|\psi\|_{L^\infty(B_n)}\omega^{\frac1q}(1-\rho)}{(1-\rho)^{\alpha-\frac1q+1-n(\frac1p-1)}}.$$

Окончательно

$$\sup_{z\in B_n}\frac{(1-|z|)^{\alpha-\frac1q+1-n(\frac1p-1)}}{\omega^{\frac1q}(1-\rho)}|D^{\alpha+1}g(z)| \le c_2\|\psi\|_{L^\infty(B_n)} = c_2\|\Phi\|.$$

Следовательно, $g\in\lambda^{p,q}_\omega$, причем $\|g\|_{\lambda^{p,q}_\omega}\le c_2\|\Phi\|$.

Докажем обратное утверждение. Используя леммы 10, 11 и рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве теоремы 5, получим

$$|\Phi(f)| \le c_{11} \left| \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^\alpha \overline{D^{\alpha+1} g(\zeta)} \int\limits_{S_n} f(\rho z) \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^\alpha \, dt d\sigma(z)}{(1-t\rho\langle \bar z, \bar\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}} \, d\nu(\zeta) \right|.$$

По лемме $8'$

$$\begin{aligned} |\Phi(f)| &\le c_{12} \Bigg| \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^\alpha \overline{D^{\alpha+1} g(\zeta)} \int\limits_{S_n} \frac{f(\rho z)\, d\sigma(z)}{(1-\rho\langle \bar z, \bar\zeta\rangle)^n} \, d\nu(\zeta) \\ &\quad + \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^\alpha \overline{D^{\alpha+1} g(\zeta)} \int\limits_{S_n} f(\rho z) \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1} \widetilde{P}(t,\rho)\, dt d\sigma(z)}{(1-t\rho\langle \bar z, \bar\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}} \, d\nu(\zeta) \Bigg| \\ &\le c_{13} \Bigg(\Bigg| \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^\alpha \overline{D^{\alpha+1} g(\zeta)} f(\rho^2\zeta)\, d\nu(\zeta) \Bigg| + \Bigg| \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^\alpha \overline{D^{\alpha+1} g(\zeta)} \\ &\quad \times \int\limits_0^1 \int\limits_{S_n} \frac{f(\rho z)\gamma(t,\rho\langle \zeta, z\rangle)}{(1-t\rho\langle \zeta, z\rangle)^n} \, d\sigma(z)\, dt d\nu(\zeta) \Bigg| \Bigg) = c_{13}(|I_1| + |I_2|), \end{aligned}$$

где $\gamma(t,\rho\langle \zeta, z\rangle) = \frac{(1-t)^{\alpha+1}\widetilde{P}(t,\rho)}{(1-t\rho\langle \zeta, z\rangle)^{\alpha+1}}$, причем $|\gamma(t,\rho\langle \zeta, z\rangle)| \le c(n)$. Применяя леммы 2 и 3, получим

$$\begin{aligned} |I_1| &\le c_{14} \int\limits_0^1 (1-r)^{\alpha - n(\frac{1}{p}-1)} \sup_{\zeta\in S_n} |D^{\alpha+1} g(r\zeta)| \Bigg(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \Bigg)^{\frac{1}{p}} r^{2n-1}\, dr \\ &\le c_{15} \sup_{\zeta\in B_n} \frac{(1-|\zeta|^2)^{\alpha - n(\frac{1}{p}-1) - \frac{1}{q} + 1}}{\omega^{\frac{1}{q}}(1-r)} |D^{\alpha+1} g(\zeta)| \\ &\quad \times \Bigg(\int\limits_0^1 \omega(1-r) \Bigg(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \Bigg)^{\frac{q}{p}} r^{2n-1}\, dr \Bigg)^{\frac{1}{q}} \le c_{16} \|g\|_{\lambda_\omega^{p,q}} \|f\|_{A^{p,q}(\omega)}. \end{aligned}$$

Рассмотрим

$$I_2 = \int\limits_0^1 \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^\alpha \overline{D^{\alpha+1} g(\zeta)} \int\limits_{S_n} \frac{f(\rho z)\gamma(t,\rho\langle \zeta, z\rangle)}{(1-t\rho\langle \zeta, z\rangle)^n} \, d\sigma(z)\, d\nu(\zeta)\, dt.$$

Так как $f\cdot\gamma$ — голоморфная функция, то

$$\int\limits_{S_n} \frac{f(\rho z)\gamma(t,\rho\langle \zeta, z\rangle)\, d\sigma(z)}{(1-t\rho\langle \zeta, z\rangle)^n} = f(\rho^2 t\zeta)\gamma(t,\rho\langle \zeta, \zeta\rangle).$$

Тогда

$$I_2 = \int\limits_0^1 \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^\alpha \overline{D^{\alpha+1} g(\zeta)} f(t\rho^2\zeta)\gamma(t,\rho\langle \zeta, \zeta\rangle)\, d\nu(\zeta)\, dt.$$

Оценим I_2 по модулю:

$$|I_2| \le c_{17} \int\limits_0^1 \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^\alpha |D^{\alpha+1} g(\zeta)| |f(t\rho^2\zeta)| |\gamma(t, \rho\langle\zeta,\zeta\rangle)|\, d\nu(\zeta)\, dt$$

$$\le c_{18} \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^\alpha |D^{\alpha+1} g(\zeta)| |f(t\rho^2\zeta)|\, d\nu(\zeta).$$

Применим лемму 2:

$$|I_2| \le c_{19} \int\limits_0^1 (1-r)^{\alpha-(\frac{1}{p}-1)n} \sup_{\zeta\in S_n} |D^{\alpha+1} g(\zeta)| \biggl(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta) \biggr)^{\frac{1}{p}} r^{2n-1}\, dr.$$

Далее, применяя лемму 3, будем иметь

$$|I_2| \le c_{20} \sup_{\zeta\in B_n} \frac{(1-|\zeta|)^{\alpha-n(\frac{1}{p}-1)-\frac{1}{q}+1}}{\omega^{\frac{1}{q}}(1-|\zeta|)} |D^{\alpha+1} g(\zeta)|$$

$$\times \Biggl(\int\limits_0^1 \omega(1-r) \biggl(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta) \biggr)^{\frac{q}{p}} r^{2n-1}\, dr \Biggr)^{\frac{1}{q}} = c_{21} \|g\|_{\lambda_\omega^{p,q}} \|f\|_{A^{p,q}(\omega)}.$$

Окончательно получаем $|\Phi(f)| \le c_{22} \|g\|_{\lambda_\omega^{p,q}} \|f\|_{A^{p,q}(\omega)}$. $\square$

Положим $I = (0,1]$, $J = (1, +\infty)$. Пусть пространство $\Lambda_\omega^{p,q}$, где $p, q \in I \cup J$, совпадает с пространством $\tilde{\tilde{\lambda}}_\omega^{p,q}$, если $p \in J$, $q \in I$, с пространством $\tilde{\lambda}_\omega^{p,q}$, если $p \in I$, $q \in J$, и с пространством $\lambda_\omega^{p,q}$, если $p, q \in I$. Если же $p, q \in J$, то $\|g\|_{\Lambda_\omega^{p,q}} = \|D^{\alpha+1} g\|_{A^{p',q'}(\omega_\alpha)}$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть $\omega \in \Omega$, $p, q \in I \cup J$. Тогда если Φ — линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}(\omega)$ и $g(z) = \Phi(e_z)$, $z \in B_n$, то $g \in \Lambda_\omega^{p,q}$ и Φ представи́м в виде*

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0} \int\limits_{S_n} f(\rho\zeta) \overline{g(\rho\zeta)}\, d\sigma(\zeta), \tag{12}$$

при этом существуют положительные константы $c_1, c_2 > 0$ такие, что

$$c_1 \|g\|_{\Lambda_\omega^{p,q}} \le \|\Phi\| \le c_2 \|g\|_{\Lambda_\omega^{p,q}}. \tag{13}$$

Обратно, любая функция $g \in \Lambda_\omega^{p,q}$ по формуле (12) *порождает линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}(\omega)$, для которого справедливы оценки* (13).

Доказательство. Очевидно, что, когда $p, q \in J$ и $p, q \in I$, утверждение теоремы совпадает соответственно с теоремами 4 и 5. Поэтому остается доказать утверждение теоремы лишь в тех случаях, когда либо $p \in I$, $q \in J$, либо $p \in J$, $q \in I$.

1. Докажем теорему сначала при $p \in J$, $q \in I$. В этом случае пространство $\Lambda_\omega^{p,q}$ совпадает с пространством $\tilde{\tilde{\lambda}}_\omega^{p,q}$. Пусть Φ — линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}(\omega)$. Тогда по лемме 3 Φ непрерывен в пространстве $A^{p,1}(\omega^*)$, где $\omega^*(1-|z|) = \omega^{\frac{1}{q}}(1-|z|)(1-|z|)^{\frac{1}{q}-1}$, с нормой

$$\|f\|_{A^{p,1}(\omega^*)} = \int\limits_0^1 \omega^*(1-r) \biggl(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p\, d\sigma(\zeta) \biggr)^{\frac{1}{p}} r^{2n-1}\, dr \le c \|f\|_{A^{p,q}(\omega)}.$$

Продолжим Φ на всё $L^{p,1}(\omega^*)$ с сохранением нормы. По теореме Бенедека — Понцоне (см. [13]) существует функция ψ такая, что

$$\sup_{0<r\leq 1}\left(\int\limits_{S_n}|\psi(r\zeta)|^{p'}\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p'}}<+\infty,$$

причем

$$\|\Phi\|=\sup_{0<r\leq 1}\left(\int\limits_{S_n}|\psi(r\zeta)|^{p'}\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p'}},\quad \Phi(f)=\int\limits_{B_n}\omega^*(1-|\zeta|)f(\zeta)\overline{\psi(\zeta)}\,d\nu(\zeta).$$

Тогда

$$g(z)=\int\limits_{B_n}\omega^*(1-|\zeta|)e_z(\zeta)\overline{\psi(\zeta)}\,d\nu(\zeta).$$

Используя лемму 7, получим

$$D^{\alpha+1}g(z)=c_3\int\limits_{B_n}\frac{\omega^*(1-|\zeta|)\overline{\psi(\zeta)}\,d\nu(\zeta)}{(1-\langle z,\bar\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}+\int\limits_{B_n}\int\limits_0^1\frac{\omega^*(1-|\zeta|)\overline{\psi(\zeta)}\phi(u)\,dud\nu(\zeta)}{(1-u\langle z,\bar\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}.$$

Запишем норму $D^{\alpha+1}g$ в пространстве $L^{p'}(S_n)$ и, применяя неравенства Минковского и Гёльдера с показателем $p'=\frac{p}{p-1}$, получим

$$\left(\int\limits_{S_n}|D^{\alpha+1}g(\rho z)|^{p'}\,d\sigma(z)\right)^{\frac{1}{p'}}\leq c_4\left(\left(\int\limits_{S_n}\left|\int\limits_{B_n}\frac{\omega^*(1-|\zeta|)\overline{\psi(\zeta)}\,d\nu(\zeta)}{(1-\langle z,\bar\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}\right|^{p'}d\sigma(z)\right)^{\frac{1}{p'}}\right.$$

$$\left.+\left(\int\limits_{S_n}\left|\int\limits_{B_n}\int\limits_0^1\frac{\omega^*(1-|\zeta|)\overline{\psi(\zeta)}\phi(u)\,dud\nu(\zeta)}{(1-u\langle z,\bar\zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}\right|^{p'}d\sigma(z)\right)^{\frac{1}{p'}}\right)\leq c_5\left(\int\limits_0^1\omega^*(1-r)\right.$$

$$\times\left(\int\limits_{S_n}\left(\int\limits_{S_n}\frac{|\psi(r\zeta)|^{p'}\,d\sigma(\zeta)}{|1-\rho\langle z,\bar\zeta\rangle|^{\alpha+n+1}}\right)\left(\int\limits_{S_n}\frac{d\sigma(\zeta)}{|1-\rho\langle z,\bar\zeta\rangle|^{\alpha+n+1}}\right)^{\frac{p'}{p}}d\sigma(z)\right)^{\frac{1}{p'}}r^{2n-1}\,dr$$

$$+\int\limits_0^1\omega^*(1-r)\int\limits_0^1|\phi(u)|\left(\int\limits_{S_n}\left(\int\limits_{S_n}\frac{|\psi(r\zeta)|^{p'}\,d\sigma(\zeta)}{|1-u\rho\langle z,\bar\zeta\rangle|^{\alpha+n+1}}\right)\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\int\limits_{S_n}\frac{d\sigma(\zeta)}{|1-u\rho\langle z,\bar\zeta\rangle|^{\alpha+n+1}}\right)^{\frac{p'}{p}}d\sigma(z)\right)^{\frac{1}{p'}}dur^{2n-1}\,dr\right)$$

$$\leq c_6\sup_{0<r\leq 1}\left(\int\limits_{S_n}|\psi(r\zeta)|^{p'}\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p'}}\left(\int\limits_0^1\omega^*(1-r)\int\limits_{S_n}\frac{d\sigma(z)r^{2n-1}\,dr}{|1-\rho\langle z,\bar\zeta\rangle|^{\alpha+n+1}}\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^1\omega^*(1-r)\int\limits_0^1\int\limits_{S_n}\frac{|\phi(u)|\,d\sigma(z)\,dur^{2n-1}\,dr}{|1-u\rho\langle z,\bar\zeta\rangle|^{\alpha+n+1}}\right)\leq\sup_{0<r\leq 1}\left(\int\limits_{S_n}|\psi(r\zeta)|^{p'}\,d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\times c_7\left(\int\limits_0^1\frac{\omega^*(1-r)r^{2n-1}\,dr}{(1-r\rho)^{\alpha+1}}+\int\limits_0^1\omega^*(1-r)\int\limits_0^1\frac{|\phi(u)|\,du}{(1-ur\rho)^{\alpha+1}}r^{2n-1}\,dr\right).$$

Оценивая каждый из полученных интегралов, имеем

$$\left(\int\limits_{S_n} |D^{\alpha+1} g(\rho z)|^{p'}\, d\sigma(z)\right)^{\frac{1}{p'}} \le c_8 \frac{\omega^*(1-\rho)}{(1-\rho)^{\alpha}} \sup_{0<r\le 1} \left(\int\limits_{S_n} |\psi(r\zeta)|^{p'}\, d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Отсюда

$$\sup_{0<\rho\le 1} \frac{(1-\rho)^{\alpha-\frac{1}{q}+1}}{\omega^{\frac{1}{q}}(1-\rho)} \left(\int\limits_{S_n} |D^{\alpha+1} g(\rho z)|^{p'}\, d\sigma(z)\right)^{\frac{1}{p'}} \le c_8 \sup_{0<r\le 1} \left(\int\limits_{S_n} |\psi(r\zeta)|^{p'}\, d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p'}},$$

таким образом, $g \in \tilde{\tilde{\lambda}}^{p,q}_{\omega}$. Легко заметить, что

$$\Phi(f) = \lim_{\rho\to 1-0} \int\limits_{S_n} f(\rho\zeta)\overline{g(\rho\zeta)}\, d\nu(\zeta),$$

при этом

$$\|g\|_{\tilde{\tilde{\lambda}}^{p,q}_{\omega}} \le c_9 \sup_{0<r\le 1} \left(\int\limits_{S_n} |\psi(r\zeta)|^{p'}\, d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p'}} = c_9\|\Phi\|.$$

Докажем обратное утверждение теоремы при $p \in J$, $q \in I$. Пусть $g \in \tilde{\tilde{\lambda}}^{p,q}_{\omega}$, $f \in A^{p,q}(\omega)$. Как и выше, используя леммы 10 и 11, имеем

$$|\Phi(f)| \le c_{10} \left| \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^{\alpha} D^{\alpha+1} g(\zeta) \int\limits_{S_n} f(\rho z) \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha}\, dt d\sigma(z)}{(1-t\rho\langle \bar{z}, \zeta\rangle)^{\alpha+n+1}}\, d\nu(\zeta) \right|.$$

Применив лемму $8'$, будем иметь $|\Phi(f)| \le c_{11}(|I_1| + |I_2|)$, где

$$I_1 = \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^{\alpha} \overline{D^{\alpha+1} g(\zeta)} f(\rho^2\zeta)\, d\nu(\zeta),\ I_2 = \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^{\alpha} \overline{D^{\alpha+1} g(\zeta)} \int\limits_0^1 \psi_{t,\rho}(\zeta)\, dt d\sigma(\zeta),$$

здесь

$$\psi_{t,\rho}(\zeta) = \int\limits_{S_n} \frac{f(\rho z)\gamma(t, \rho\langle\zeta, z\rangle)}{(1-t\rho\langle\zeta, z\rangle)^n}\, d\sigma(z), \quad \gamma(t, \rho\langle\zeta, z\rangle) = \frac{(1-t)^{\alpha+1}\widetilde{P}(t,\rho)}{(1-t\rho\langle\zeta, z\rangle)^{\alpha+1}},$$

причем $|\gamma(t, \rho\langle\zeta, z\rangle)| \le c(n)$. Для оценки I_1 применим неравенство Гёльдера с показателем $p' = \frac{p}{p-1}$. Имеем

$$|I_1| \le c_{12} \int\limits_0^1 (1-r)^{\alpha} \left(\int\limits_{S_n} |D^{\alpha+1} g(r\zeta)|^{p'}\, d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int\limits_{S_n} |f(\rho^2 r\zeta)|^{p}\, d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}} r^{2n-1}\, dr$$

$$\le c_{13} \sup_{0<r\le 1} \frac{(1-r)^{\alpha-\frac{1}{q}+1}}{\omega^{\frac{1}{q}}(1-r)} \left(\int\limits_{S_n} |D^{\alpha+1} g(r\zeta)|^{p'}\, d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p'}} \int\limits_0^1 \omega^{\frac{1}{q}}(1-r)(1-r)^{\frac{1}{q}-1}$$

$$\times \left(\int\limits_{S_n} |f(\rho^2 r\zeta)|^{p}\, d\sigma(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}} r^{2n-1}\, dr \le c_{14}\|g\|_{\tilde{\tilde{\lambda}}^{p,q}_{\omega}} \|f\|_{A^{p,q}_{\omega}}.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались леммой 3. Оценим I_2:

$$|I_2| \le c_{15} \int\limits_0^1 \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^\alpha |D^{\alpha+1} g(\zeta)| |\psi_{t,\rho}(\zeta)| \, d\nu(\zeta)\, dt$$

$$\le c_{16} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha \Bigg(\int\limits_{S_n} |D^{\alpha+1} g(r\zeta)|^{p'} \, d\sigma(\zeta) \Bigg)^{\frac{1}{p'}} \Bigg(\int\limits_{S_n} |\psi(tr^2\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \Bigg)^{\frac{1}{p}} r^{2n-1} \, dr dt$$

$$\le c_{17} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 (1-r)^\alpha \Bigg(\int\limits_{S_n} |D^{\alpha+1} g(r\zeta)|^{p'} \, d\sigma(\zeta) \Bigg)^{\frac{1}{p'}} \Bigg(\int\limits_{S_n} |f(tr^2\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \Bigg)^{\frac{1}{p}} r^{2n-1} \, dr dt.$$

Здесь мы применили неравенство Гёльдера с показателем $p' = \frac{p}{p-1}$, а также теорему М. Рисса (см. [10]). Далее, учитывая лемму 3, получим

$$|I_2| \le c_{18} \sup_{0<r\le 1} \frac{(1-r)^{\alpha - \frac{1}{q} - 1}}{\omega^{\frac{1}{q}}(1-r)} \Bigg(\int\limits_{S_n} |D^{\alpha+1} g(r\zeta)|^{p'} \, d\sigma(\zeta) \Bigg)^{\frac{1}{p'}} \int\limits_0^1 \omega^{\frac{1}{q}}(1-r)(1-r)^{\frac{1}{q}-1}$$

$$\times \Bigg(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta) \Bigg)^{\frac{1}{p}} r^{2n-1} \, dr \le c_{19} \|g\|_{\tilde{\lambda}^{p,q}_\omega} \|f\|_{A^{p,q}(\omega)}.$$

Первый случай доказан.

2. Перейдем к случаю $p \in I$, $q \in J$, тогда $\Lambda^{p,q}_\omega = \tilde{\lambda}^{p,q}_\omega$. Пусть Φ — линейный непрерывный функционал на $A^{p,q}(\omega)$, тогда по лемме 2 он будет непрерывен в пространстве $A^{1,q}(\omega^*)$, где $\omega^*(1-|z|) = \omega(1-|z|)(1-|z|)^{nq(\frac{1}{p}-1)}$, с нормой

$$\|f\|_{A^{1,q}(\omega^*)} = \Bigg(\int\limits_0^1 \omega^*(1-r) \Bigg(\int\limits_{S_n} |f(r\zeta)| \, d\sigma(\zeta) \Bigg)^q r^{2n-1} \, dr \Bigg)^{\frac{1}{q}} \le c \|f\|_{A^{p,q}(\omega)}.$$

Продолжим Φ на всё $L^{1,q}(\omega^*)$ с сохранением нормы. По теореме Бенедека — Понцоне существует функция ψ такая, что

$$\Bigg(\int\limits_0^1 \omega^*(1-r) \sup_{\zeta \in S_n} |\psi(r\zeta)|^{q'} r^{2n-1} \, dr \Bigg)^{\frac{1}{q'}} < +\infty,$$

где $q' = \frac{q}{q-1}$, причем

$$\Phi(f) = \int\limits_0^1 \omega^*(1-r) \int\limits_{S_n} f(r\zeta) \psi(r\zeta) d\sigma(\zeta) r^{2n-1} \, dr,$$

$$\|\Phi\| = \Bigg(\int\limits_0^1 \omega^*(1-r) \sup_{\zeta \in S_n} |\psi(r\zeta)|^{q'} r^{2n-1} \, dr \Bigg)^{\frac{1}{q'}}.$$

Применяя лемму 7, будем иметь

$$D^{\alpha+1} g(z) = \Phi \Bigg(\frac{c_3}{(1-\langle z, \zeta\rangle)^{\alpha+n+1}} + \int\limits_0^1 \frac{\phi(u)\, du}{(1-u\langle z, \zeta\rangle)^{\alpha+n+1}} \Bigg)$$

$$= \int\limits_0^1 \omega^*(1-r) \Bigg(c_3 \int\limits_{S_n} \frac{\overline{\psi(r\zeta)}\, d\sigma(\zeta)}{(1-\rho\langle z, \bar{\zeta}\rangle)^{\alpha+n+1}} + \int\limits_0^1 \phi(u) \int\limits_{S_n} \frac{\overline{\psi(r\zeta)}\, d\sigma(\zeta)\, du}{(1-u\rho\langle z, \bar{\zeta}\rangle)^{\alpha+n+1}} \Bigg) r^{2n-1} \, dr.$$

Оценим $D^{\alpha+1}g$ по модулю:

$$|D^{\alpha+1}g(z)| \le c_4\left(\int\limits_0^1 \omega^*(1-r)\sup_{\zeta\in S_n}|\psi(r\zeta)|\left(\int\limits_{S_n}\frac{d\sigma(\zeta)}{|1-\rho\langle z,\bar\zeta\rangle|^{\alpha+n+1}}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_0^1\int\limits_{S_n}\frac{|\phi(u)|\,d\sigma(\zeta)\,du}{|1-u\rho\langle z,\bar\zeta\rangle|^{\alpha+n+1}}\right)r^{2n-1}\,dr\right) \le c_5\left(\int\limits_0^1\frac{\omega^*(1-r)}{(1-r\rho)^{\alpha+1}}\sup_{\zeta\in S_n}|\psi(r\zeta)|r^{2n-1}\,dr\right.$$

$$\left.+\int\limits_0^1\int\limits_0^1\frac{\omega^*(1-r)|\phi(u)|}{(1-ru\rho)^{\alpha+1}}\sup_{\zeta\in S_n}|\psi(r\zeta)|\,dur^{2n-1}\,dr\right).$$

Далее, учитывая, что

$$\int\limits_0^1\frac{|\phi(u)|\,du}{(1-ru\rho)^{\alpha+1}} \le \frac{c_6}{(1-r\rho)^{\alpha+1}},$$

получаем

$$|D^{\alpha+1}g(z)| \le c_7\int\limits_0^1\frac{\omega^*(1-r)}{(1-r\rho)^{\alpha+1}}\sup_{\zeta\in S_n}|\psi(r\zeta)|r^{2n-1}\,dr.$$

Так как $\omega^*(1-r)=\omega(1-r)(1-r)^{nq(\frac{1}{p}-1)}$, то, записав норму функции g в пространстве $\tilde\lambda_\omega^{p,q}$ и снова использовав функцию $\chi_\gamma(r)$, а также применив неравенство Гёльдера с показателем $q'=\frac{q}{q-1}$, будем иметь

$$\|g\|_{\tilde\lambda_\omega^{p,q}} = \left(\int\limits_0^1\frac{(1-\rho)^{\alpha q'-nq'(\frac{1}{p}-1)}}{\omega^{\frac{q'}{q}}(1-\rho)}\sup_{z\in S_n}|D^{\alpha+1}g(\rho z)|^{q'}\rho^{2n-1}d\rho\right)^{\frac{1}{q'}}$$

$$\le c_8\left(\int\limits_0^1\frac{(1-\rho)^{\alpha q'-nq'(\frac{1}{p}-1)}}{\omega^{\frac{q'}{q}}(1-\rho)}\left(\int\limits_0^1\frac{\omega(1-r)(1-r)^{nq(\frac{1}{p}-1)}}{(1-r\rho)^{\alpha+1}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\sup_{\zeta\in S_n}|\psi(r\zeta)|r^{2n-1}\,dr\right)^{q'}\rho^{2n-1}d\rho\right)^{\frac{1}{q'}}$$

$$\le c_9\left(\int\limits_0^1\frac{(1-\rho)^{\alpha q'-nq'(\frac{1}{p}-1)}}{\omega^{\frac{q'}{q}}(1-\rho)}\left(\int\limits_0^1\frac{\omega(1-r)(1-r)^{nq(\frac{1}{p}-1)}}{(1-r\rho)^{\alpha+1}\chi_\gamma^{q'}(r)}\sup_{\zeta\in S_n}|\psi(r\zeta)|^{q'}r^{2n-1}\,dr\right)\right.$$

$$\left.\times\left(\int\limits_0^1\frac{\omega(1-r)(1-r)^{nq(\frac{1}{p}-1)}\chi_\gamma^q(r)}{(1-r\rho)^{\alpha+1}}r^{2n-1}\,dr\right)^{\frac{q'}{q}}\rho^{2n-1}d\rho\right)^{\frac{1}{q'}}$$

$$\le c_{10}\left(\int\limits_0^1\frac{(1-\rho)^{\alpha q'-nq'(\frac{1}{p}-1)}\omega^{\frac{q'}{q}}(1-\rho)\chi_\gamma^{q'}(\rho)}{\omega^{\frac{q'}{q}}(1-\rho)(1-\rho)^{\frac{\alpha q'}{q}-nq'(\frac{1}{p}-1)}}\right.$$

$$\left.\times\int\limits_0^1\frac{\omega(1-r)(1-r)^{nq(\frac{1}{p}-1)}}{(1-r\rho)^{\alpha+1}\chi_\gamma^{q'}(r)}\sup_{\zeta\in S_n}|\psi(r\zeta)|^{q'}r^{2n-1}\,dr\rho^{2n-1}d\rho\right)^{\frac{1}{q'}}.$$

Поменяем порядок интегрирования и оценим внутренний интеграл:

$$\|g\|_{\tilde{\lambda}_\omega^{p,q}} \le c_{11}\Bigg(\int_0^1 \frac{\omega(1-r)(1-r)^{nq(\frac{1}{p}-1)}}{\chi_\gamma^{q'}(r)}$$

$$\times \sup_{\zeta\in S_n}|\psi(r\zeta)|^{q'}\int_0^1 \frac{(1-\rho)^\alpha\chi_\gamma^{q'}(\rho)}{(1-r\rho)^{\alpha+1}}\rho^{2n-1}d\rho r^{2n-1}\,dr\Bigg)^{\frac{1}{q'}}$$

$$\le c_{12}\Bigg(\int_0^1 \omega(1-r)(1-r)^{nq(\frac{1}{p}-1)}\sup_{\zeta\in S_n}|\psi(r\zeta)|^{q'}r^{2n-1}\,dr\Bigg)^{\frac{1}{q'}}$$

$$= c_{12}\Bigg(\int_0^1 \omega^*(1-r)\sup_{\zeta\in S_n}|\psi(r\zeta)|^{q'}r^{2n-1}\,dr\Bigg)^{\frac{1}{q'}} < +\infty.$$

Следовательно, $g\in\tilde{\lambda}_\omega^{p,q}$.

Докажем обратное утверждение. Учитывая леммы $8'$ и 10, будем иметь

$$|\Phi(f)| \le c_{13}\Bigg(\bigg|\int_{B_n}(1-|\zeta|^2)^\alpha\overline{D^{\alpha+1}g(\zeta)}f(\rho^2\zeta)\,d\nu(\zeta)\bigg|$$

$$+\bigg|\int_{B_n}(1-|\zeta|^2)^\alpha\overline{D^{\alpha+1}g(\zeta)}\int_0^1\int_{S_n}\frac{f(\rho z)\gamma(t,\rho\langle\zeta,z\rangle)}{(1-t\rho\langle\zeta,z\rangle)^n}\,d\sigma(z)\,dtd\nu(\zeta)\bigg|\Bigg) = c_{13}(|I_1|+|I_2|),$$

здесь функция $\gamma(t,\rho\langle\zeta,z\rangle)$ определяется, как и выше. Оценим каждый из этих интегралов:

$$|I_1| \le c_{14}\int_0^1(1-r)^\alpha\int_{S_n}|D^{\alpha+1}g(\zeta)||f(\rho^2r\zeta)|\,d\sigma(\zeta)r^{2n-1}\,dr$$

$$\le c_{15}\int_0^1(1-r)^\alpha\sup_{\zeta\in S_n}|D^{\alpha+1}g(r\zeta)|\int_{S_n}|f(r\zeta)|\,d\sigma(\zeta)r^{2n-1}\,dr.$$

Применяя лемму 2, получим

$$|I_1| \le c_{16}\int_0^1(1-r)^{\alpha-n(\frac{1}{p}-1)}\sup_{\zeta\in S_n}|D^{\alpha+1}g(r\zeta)|\bigg(\int_{S_n}|f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\bigg)^{\frac{1}{p}}r^{2n-1}\,dr.$$

Далее, используя неравенство Гёльдера с показателем $q'=\frac{q}{q-1}$, приходим к оценке

$$|I_1| \le c_{17}\Bigg(\int_0^1\frac{(1-r)^{\alpha q'-nq'(\frac{1}{p}-1)}}{\omega^{\frac{q'}{q}}(1-r)}\sup_{\zeta\in S_n}|D^{\alpha+1}g(r\zeta)|^{q'}r^{2n-1}\,dr\Bigg)^{\frac{1}{q'}}$$

$$\times\Bigg(\int_0^1\omega(1-r)\bigg(\int_{S_n}|f(r\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta)\bigg)^{\frac{q}{p}}r^{2n-1}\,dr\Bigg)^{\frac{1}{q}} = c_{17}\|g\|_{\tilde{\lambda}_\omega^{p,q}}\|f\|_{A^{p,q}(\omega)}.$$

При оценивании I_2 заметим, что

$$\int_{S_n}\frac{f(\rho z)\gamma(t,\rho\langle\zeta,z\rangle)}{(1-t\rho\langle\zeta,z\rangle)^n}\,d\sigma(z) = f(t\rho^2\zeta)\gamma(t,\rho\langle\zeta,\zeta\rangle).$$

Тогда

$$|I_2| \le c_{18} \int\limits_0^1 \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^\alpha |D^{\alpha+1}g(\zeta)||f(t\rho^2\zeta)||\gamma(t,\rho\langle\zeta,\zeta\rangle)|\,d\nu(\zeta)\,dt$$

$$\le c_{19} \int\limits_0^1 \int\limits_{B_n} (1-|\zeta|^2)^\alpha |D^{\alpha+1}g(\zeta)||f(t\rho^2\zeta)|\,d\nu(\zeta)dt.$$

Рассуждая, как при оценке I_1, получим

$$|I_2| \le c_{20}\|g\|_{\tilde{\lambda}_\omega^{p,q}}\|f\|_{A^{p,q}(\omega)}.$$

Таким образом, $|\Phi(f)| \le c_{21}\|g\|_{\tilde{\lambda}_\omega^{p,q}}\|f\|_{A^{p,q}(\omega)}$, поэтому верна также и правая оценка в (13). $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сенета Е.* Правильно изменяющиеся функции. М.: Наука, 1985.
2. *Шамоян Ф. А.* Об ограниченности одного класса операторов, связанных с делимостью аналитических функций // Изв. АН Арм. ССР. Математика. 1973. Т. 8, № 6. С. 474–494.
3. *Шамоян Ф. А.* Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 2. С. 197–215.
4. *Хавин В. П.* Пространства аналитических функций // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1966. С. 76–164. (Итоги науки техники).
5. *Djrbashian M. M., Shamoyan F. A.* Topics in the theory of A^p_α spaces. Leipzig: Teubner-Texte, 1988.
6. *Пеллер В. В., Хрущев С. В.* Операторы Ганкеля. Наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы // Успехи мат. наук. 1982. Т. 38, № 1. С. 53–124.
7. *Nikolski N. K.* Operators, functions, and systems. Providence RI: Amer. Math. Soc., 2002. (AMS. Math. Surv. and Monograph; V. 92).
8. *Айзенберг Л.* Двойственность в комплексном анализе // Israel Math. Conf. Proc. 1997. V. 11. P. 27–35.
9. *Gadbois S.* Mixed norm generalization of Bergman spaces and duality // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 104, N 4. P. 1171–1180.
10. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из C^n. М.: Мир, 1984.
11. *Aleksandrov A. B.* On the boundary decay in the mean of harmonic functions // Алгебра и анализ. 1995. V. 7, N 4. P. 507–541.
12. *Шамоян Ф. А.* Теоремы вложения и характеристика следов в пространствах $H^p(U^n)$, $0 < p < +\infty$ // Мат. сб. 1978. Т. 107, № 3. С. 446–466.
13. *Benedek A., Panzone R.* The spaces L^p with mixed norm // Duke Math. J. 1961. V. 28, N 3. P. 301–324.
14. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.

Статья поступила 13 июля 2004 г.

Антоненкова Ольга Евгеньевна, Шамоян Файзо Агитович
Брянский гос. университет, кафедра математического анализа,
ул. Бежицкая, 14, Брянск 241036
anto-olga@yandex.ru, root@shamoyan.bitmcnit.bryansk.su