Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2005. Том 46, № 6

УДК 517.927.2

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПЕРАТОРОВ, СОПУТСТВУЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Т. С. Алероев

Аннотация: Проведен спектральный анализ одного класса интегральных операторов, сопутствующих дифференциальным уравнениям дробного порядка. Эти операторы имеют конкретные приложения в механике. Установлена связь между собственными значениями таких операторов и нулями функций типа Миттаг-Леффлера. Приводятся достаточные условия вполне несамосопряженности.

Ключевые слова: функция типа Миттаг-Леффлера, вполне несамосопряженный оператор, неотрицательное ядро, собственные функции, собственные значения, оператор дробного дифференцирования.

При решении краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка возникают интегральные операторы следующего вида [1–4]:

$$A_\gamma^{[\alpha,\beta]}U(x) = C_{\alpha,\beta}\int\limits_0^1 x^{1/\alpha-1}(1-t)^{1/\beta-1}U(t)\,dt + C_\gamma\int\limits_0^x (x-t)^{1/\gamma-1}U(t)\,dt,$$

здесь α, β, γ, $C_{\alpha,\beta}$, C_γ — действительные числа, причем α, β, γ положительны. В частности, функция Грина, построенная в [4] для краевой задачи типа Штурма — Лиувилля для дифференциального уравнения дробного порядка $\sigma \in (1,2)$, совпадает с ядром оператора $A_\gamma^{[\rho,\rho]}$, где $\rho = \sigma^{-1}$. В данной работе проведем спектральный анализ указанного класса интегральных операторов, установим связь между их собственными значениями и нулями функций типа Миттаг-Леффлера, а также дадим достаточные условия вполне несамосопряженности.

Чтобы оттенить основные идеи, исследуем простейшие случаи.

Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ оператор $A_\gamma^{[\alpha,\beta]}$ при $\alpha = \beta = \gamma = \rho$, $0 < \rho < 2$.

Лемма 1. *Число λ_j является собственным значением оператора $A_\rho^{[\rho,\rho]}$ тогда и только тогда, когда $E_\rho(\lambda_j; 1/\rho) = 0$.*

Доказательство. Пусть U_j — собственная функция оператора $A_\rho^{[\rho,\rho]}$, а λ_j^{-1} — соответствующее собственное значение. Тогда

$$\lambda_j^{-1}U_j(x) = \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\int\limits_0^1 (x-t)^{1/\rho-1}U_j(t)\,dt - \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\int\limits_0^1 (x)^{1/\rho-1}(1-t)^{1/\rho-1}U_j(t)\,dt. \tag{1}$$

Введем оператор

$$I^{1/\rho}U(x) = \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\int\limits_0^x (x-t)^{1/\rho-1}U(t)\,dt.$$

Имеем

$$\bigl(I^{1/\rho}U_j(x) - \lambda_j^{-1}U_j(x)\bigr) = C_j\frac{x^{1/\rho-1}}{\Gamma(\rho^{-1})},$$

где

$$C_j = \int\limits_0^1 (1-t)^{1/\rho-1}U_j(t)\,dt,$$

или

$$U_j(x) = -\lambda_j I^{1/\rho}U_j(x) = -\frac{\lambda_j C_j}{\Gamma(\rho^{-1})}x^{1/\rho-1}.$$

Отсюда следует, что

$$U_j(x) = -(I-\lambda_j I^{1/\rho})^{-1}\left[\frac{\lambda_j C_j}{\Gamma(\rho^{-1})}x^{1/\rho-1}\right].$$

Резольвента оператора $I^{1/\rho}$ хорошо известна [5]:

$$R(x,t;\lambda) = \begin{cases} (x-t)^{1/\rho-1}E\rho(\lambda(x-t)^{1/\rho};1/\rho), & 0\le t\le x<1,\\ 0, & x\le t<1.\end{cases} \tag{2}$$

Поэтому

$$U_j(x) = \frac{-\lambda_j C_j}{\Gamma(\rho^{-1})}\left[x^{1/\rho-1} + \lambda_j\int\limits_0^x (x-t)^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda_j(x-t)^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)t^{1/\rho-1}\,dt\right]. \tag{3}$$

Так как

$$\frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\int\limits_0^1 (x-t)^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda_j(x-t)^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)t^{1/\rho-1}\,dt = x^{2/\rho-1}E_\rho\left(\lambda_j x^{1/\rho};\frac{2}{\rho}\right),$$

то

$$U_j(x) = -C_j\lambda_j x^{1/\rho-1}\left[\frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})} + \lambda_j x^{1/\rho}E_\rho\left(\lambda_j x^{1/\rho};\frac{2}{\rho}\right)\right].$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})} + \lambda_j x^{1/\rho}E_\rho\left(\lambda_j x^{1/\rho};\frac{2}{\rho}\right) = E_\rho\left(\lambda_j x^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right),$$

получим

$$U_j(x) = -C_j\lambda_j x^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda_j x^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right).$$

Последнее соотношение можно переписать так:

$$U_j(x) = -\lambda_j x^{1/\rho}E_\rho\left(\lambda_j x^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)\int\limits_0^1 (1-t)^{1/\rho-1}U_j(t)\,dt. \tag{4}$$

Из (4) можно определить λ_j. Для этого обе части (4) умножим на $(1-x)^{1/\rho-1}$ и проинтегрируем по отрезку [0, 1]:

$$\int_0^1 (1-t)^{1/\rho-1} U_j(t)\,dt$$
$$= -\lambda_j \int_0^1 (1-t)^{1/\rho-1} E_\rho\left(\lambda_j t^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) t^{1/\rho-1}\,dt \int_0^1 (1-t)^{1/\rho-1} U_j(t)\,dt,$$

или

$$1 = -\lambda_j \int_0^1 (1-t)^{1/\rho-1} E_\rho\left(\lambda_j t^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) t^{1/\rho-1}\,dt. \tag{5}$$

Так как

$$\int_0^1 (1-t)^{1/\rho-1} E_\rho\left(\lambda_j t^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) t^{1/\rho-1}\,dt = \Gamma(\rho^{-1}) E_\rho\left(\lambda_j; \frac{2}{\rho}\right),$$

равенство (5) можно записать в виде

$$1 = -\lambda_j \Gamma(\rho^{-1}) E_\rho\left(\lambda_j; \frac{2}{\rho}\right),$$

или

$$\frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})} + \lambda_j E_\rho\left(\lambda_j; \frac{2}{\rho}\right) = 0,$$

или, что то же самое,

$$E_\rho\left(\lambda_j; \frac{1}{\rho}\right) = 0.$$

Пусть λ_j — нуль функции $E_\rho\left(\lambda_j; \frac{1}{\rho}\right)$. Покажем, что функция

$$U_j(x) = x^{1/\rho-1} E_\rho\left(\lambda_j x^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right)$$

является собственной функцией оператора $A_\rho^{[\rho,\rho]}$, т. е. что имеет место соотношение

$$\frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\left[\int_0^x (x-t)^{1/\rho-1} E_\rho\left(\lambda_j t^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) t^{1/\rho-1} dt \right.$$
$$\left. - \int_0^1 x^{1/\rho-1} (1-t)^{1/\rho-1} E\left(\lambda_j t^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) t^{1/\rho-1}\,dt\right] = \lambda_j^{-1} x^{1/\rho-1} E_\rho\left(\lambda_j x^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right).$$

Для этого вычислим следующие интегралы:

$$I_1 = \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})} \int_0^x (x-t)^{1/\rho-1} E_\rho\left(\lambda_j t^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) t^{1/\rho-1} dt;$$

$$I_2 = \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})} \int_0^1 x^{1/\rho-1} (1-t)^{1/\rho-1} E_\rho\left(\lambda_j t^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) t^{1/\rho-1} dt.$$

По известной формуле М. М. Джрбашяна

$$\int_0^1 x^{\alpha-1}E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\alpha)(l-x)^{\beta-1}E_\rho(\mu(l-x)^{1/\rho};\beta)\,dx$$

$$= \frac{\lambda E_\rho(l^{1/\rho}\lambda;\alpha+\beta)-\mu E_\rho(l^{1/\rho}\mu;\alpha+\beta)}{\lambda-\mu}l^{\alpha+\beta-1} \quad (\alpha>0,\ \beta>0).$$

Имеем

$$I_1 = x^{2/\rho-1}E_\rho\left(\lambda_j x^{1/\rho};\frac{2}{\rho}\right); \quad I_2 = x^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda_j;\frac{2}{\rho}\right).$$

Учитывая, что λ_j — нуль функции $E_\rho\big(\lambda;\frac{1}{\rho}\big)$, получим, что $x^{1/\rho}E_\rho\big(x^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\big)$ является собственной функцией оператора $A_\rho^{[\rho,\rho]}$. Так как $x^{1/\rho-1}\in L_2(0,1)$, то

$$U_j = x^{1/\rho-1}E_\rho(\lambda_j x^{1/\rho}) \in L_2(0,1).$$

Лемма доказана.

Теорема 1. (a) *Ядро оператора $A_\rho^{[\rho,\rho]}$ неотрицательно, если $\rho<1$.*

(b) *Если $\rho>1$, то оператор $A_\rho^{[\rho,\rho]}$ является вполне несамосопряженным* [6].

Доказательство. То, что ядро оператора $A_\rho^{[\rho,\rho]}$ неотрицательно, проверяется довольно просто: для этого достаточно оператор $A_\rho^{[\rho,\rho]}$ записать в виде

$$A_\rho^{[\rho,\rho]}U_x = \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\left[\int_0^1 (x-xt)^{1/\rho-1}U(t)\,dt - \int_0^x (x-t)^{1/\rho-1}U(t)\,dt\right].$$

Ясно, что при $\rho>1$ ядро $A_\rho^{[\rho,\rho]}$ неотрицательно.

Теперь покажем, что при $\rho>1$ оператор $A_\rho^{[\rho,\rho]}$ простой [6].

Обозначим оператор $A_\rho^{[\rho,\rho]}$ через A. Надо показать, что A и A^* не имеют общего инвариантного подпространства, на котором бы они совпадали. Как и в [6], тривиальное подпространство оператора A обозначим через H.

Так как H содержится в подпространстве Z всех нулей оператора A_I (мнимой компоненты A), достаточно показать, что $L=\{0\}$. Ясно, что

$$(A-A^*)U = \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\left[\int_0^x (x-t)^{1/\rho-1}U(t)\,dt - \int_x^1 (t-x)^{1/\rho-1}U(t)\,dt\right] + C_0x^{1/\rho-1} + C_1(1-x)^{1/\rho-1}$$

не имеет тривиального решения. Это и показывает, что оператор A простой.

Замечание. (a) Из неотрицательности ядра при $\rho<1$ следует, что теория, развитая в [7], может быть применена к оператору $A_\rho^{[\rho,\rho]}$. Это позволяет, в частности, полностью ответить на важнейшие вопросы, связанные с нулями функции $E_\rho(\lambda,\rho^{-1})$ при $\rho<1$.

(b) Из простоты оператора $A_\rho^{[\rho,\rho]}$ при $\rho>1$ вытекает, что оператор $A_\rho^{[\rho,\rho]}$ полностью определяется своей характеристической матрицей-функцией.

Чтобы не создалось впечатление, что указанным методом можно исследовать только функции вида $E_\rho(\lambda,\rho^{-1})$, изучим оператор

$$A_\rho^{[\alpha^{-1},\rho]}U(x) = \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\int_0^x (x-t)^{1/\rho-1}U(t)\,dt - \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\int_0^x x^{1/\rho-1}(1-t)^{\alpha-1}U(t)\,dt.$$

Лемма 1′. *Число λ_j будет собственным значением оператора $A_\rho^{[\alpha^{-1},\rho]}$ тогда и только тогда, когда $E_\rho(\lambda_j;\alpha)=0$.*

Доказательство. Пусть $U_j(x)$ — собственная функция оператора $A_\rho^{[\alpha^{-1},\rho]}$, а λ_j^{-1} — соответствующее собственное значение. Тогда

$$\lambda_j^{-1}U_j(x)=\frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\int\limits_0^x(x-t)^{1/\rho-1}U_j(t)\,dt-\frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\int\limits_0^1 x^{1/\rho-1}(1-t)^{\alpha-1}U_j(t)\,dt.$$

Введем обозначение

$$C_j=\int\limits_0^1(1-t)^{\alpha-1}U(t)\,dt.$$

Тем самым

$$U_j(x)=-C_j\lambda_j x^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda_j x^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)$$

или, что то же самое,

$$U_j(x)=-\lambda_j x^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda_j x^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)\int\limits_0^1(1-t)^{\alpha-1}U_j(t)\,dt. \tag{6}$$

Из (6) определим λ_j. Для этого обе части (6) умножим на $(1-x)^{\alpha-1}$ и проинтегрируем результат по отрезку [0, 1]. Тогда

$$\int\limits_0^1(1-t)^{\alpha-1}U_j(t)\,dt=-\lambda_j\int\limits_0^1 t^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda_j t^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)(1-t)^{\alpha-1}\,dt\int\limits_0^1(1-t)^{\alpha-1}U_j(t)\,dt. \tag{7}$$

Из (7) следует, что

$$1=-\lambda_j\int\limits_0^1 t^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda_j t^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)(1-t)^{\alpha-1}\,dt. \tag{8}$$

Так как

$$\int\limits_0^1 t^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda_j t^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)(1-t)^{\alpha-1}\,dt=\Gamma(\alpha)E_\rho\left(\lambda_j;\frac{1}{\rho}+\alpha\right),$$

равенство (8) можно переписать в виде

$$1=-\lambda_j\Gamma(\alpha)E_\rho\left(\lambda_j;\frac{1}{\rho}+\alpha\right), \tag{9}$$

откуда вытекает, что

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}+\lambda_jE_\rho\left(\lambda_j;\frac{1}{\rho}+\alpha\right)=0$$

или, что то же самое, $E_\rho(\lambda_j;\alpha)=0$.

Пусть λ_j — нуль функции $E_\rho(\lambda,\alpha)$. Покажем, что функция

$$U_j(x)=x^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda_j x^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)$$

является собственной функцией оператора $A_\rho^{[\rho,\alpha^{-1}]}$, т. е. что имеет место соотношение

$$\frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\left[\int\limits_0^x (x-t)^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda_j t^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)t^{1/\rho-1}\,dt\right.$$
$$\left.-\int\limits_0^1 x^{1/\rho-1}(1-t)^{\alpha-1}E_\rho\left(\lambda_j t^{1/\rho-1};\frac{1}{\rho}\right)t^{1/\rho-1}\,dt\right] = \lambda_j^{-1}x^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda_j x^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right).$$

Для этого найдем следующие интегралы:

$$I_1 = \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\int\limits_0^x (x-t)^{1/\rho-1}E_\rho\left(\lambda_j t^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)t^{1/\rho-1}\,dt,$$
$$I_2^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\int\limits_0^1 x^{1/\rho-1}(1-t)^{\alpha-1}E_\rho\left(\lambda_j t^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\right)t^{1/\rho-1}\,dt.$$

Непосредственным вычислением с использованием уже приведенной формулы М. М. Джрбашяна нетрудно показать, что

$$I_1 = x^{2/\rho-1}E_\rho\left(\lambda_j x^{1/\rho};\frac{2}{\rho}\right),\quad I_2^\alpha = -\frac{1}{\Gamma(\rho^{-1})}\lambda_j^{-1}x^{1/\rho-1}.$$

Отсюда, учитывая, что λ_0 — нуль функции $E_\rho(\lambda,\alpha)$, получаем, что функция $x^{1/\rho-1}E_\rho\big(\lambda_j x^{1/\rho};\frac{1}{\rho}\big)$ является собственной функцией оператора $A_\rho^{\rho,\alpha^{-1}}$.

Лемма 1$'$ доказана.

Теорема 1$'$. (a) *Ядро оператора* $A_\rho^{[\alpha^{-1},\rho]}$ *при* $\rho<1$, $\alpha<\frac{1}{\rho}$ *неотрицательно.*

(b) *Если* $\rho>1$, *то оператор* $A_\rho^{[\alpha^{-1},\rho]}$ *является вполне несамосопряженным.*

Доказательство. Выпишем ядра $K_\rho^{[\rho,\rho]}(x,t)$ и $K_\rho^{[\alpha^{-1},\rho]}(x,t)$ операторов $A_\rho^{[\rho,\rho]}$ и $A_\rho^{[\alpha^{-1},\rho]}$ соответственно:

$$K_\rho^{[\rho,\rho]}(x,t) = [(1-t)^{1/\rho-1}x^{1/\rho-1}-(x-t)^{1/\rho-1}]\quad \text{при } t\le x,$$
$$K_\rho^{[\alpha^{-1},\rho]}(x,t) = [(1-t)^{\alpha-1}x^{1/\rho-1}-(x-t)^{1/\rho-1}]\quad \text{при } t\le x.$$

Так как $K_\rho^{[\alpha^{-1},\rho]}(x,t)$ неотрицательно при $\rho>1$, то при $\alpha<\frac{1}{\rho}$ ядро $K_\rho^{[\alpha^{-1},\rho]}(x,t)$ тем более будет неотрицательным.

Тот факт, что $K_\rho^{[\alpha^{-1},\rho]}$ при $\rho>1$ является вполне несамосопряженным, проверяется буквально так же, как это делалось в случае оператора $K_\rho^{[\rho,\rho]}$.

Итак, теорема 1$'$ доказана. Из нее, в частности, при $\rho=\alpha$ вытекают утверждения теоремы 1.

Эта теорема позволяет исследовать функции $E_\rho(Z;\mu)$ для любого μ независимо от значения ρ.

Из приведенных примеров, где ядро оператора $A_\rho^{[\alpha,\beta]}$ неотрицательно или сам оператор $A_\rho^{[\alpha,\beta]}$ вполне несамосопряженный, уже ясно, что исследование операторов $A_\rho^{[\alpha,\beta]}$ по схеме, указанной здесь, эффективно решает проблемы, связанные с функциями $E_\rho(Z;\mu)$.

Рассмотрение операторов дробного дифференцирования позволяет также ответить на многие вопросы, связанные с функциями типа Миттаг-Леффлера, хотя и далеко не все функции $E_\rho(Z;\mu)$ могут трактоваться как решения соответствующих дифференциальных уравнений дробного порядка.

Изучение функций $E_\rho(Z;\mu)$ при любых ρ, μ можно свести к исследованию оператора $A_\rho^{[\alpha,\beta]}$ при определенных α, β, ρ. В этом преимущество оператора $A_\rho^{[\alpha,\beta]}$ перед оператором дифференцирования. Но самое важное — операторы дробного дифференцирования не обладают целым комплексом важнейших свойств, присущих операторам $A_\rho^{[\alpha,\beta]}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кехарсаева Э. Р., Алероев Т. С.* Модель деформационно-прочностных характеристик хлорсодержащих полиэфиров на основе производных дробного порядка // Пластические массы. 2001. № 3. С. 35–36.

2. *Кехарсаева Э. Р., Алероев Т. С.* Модель деформационно-прочностных характеристик хлорсодержащих полиарилатов на основе диана // Пластические массы. 2003. № 5. С. 24–25.

3. *Кехарсаева Э. Р., Алероев Т. С.* К вопросу об одной модели деформационно-прочностных характеристик некоторых полиэфиров // Пластические массы. 2003. № 8. С. 35–36.

4. *Нахушев А. М.* Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: Изд-во КБ НЦ РАН, 2000.

5. *Джрбашян М. М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966.

6. *Бродский М. С.* Треугольные и жордановы представления линейных операторов. М.: Наука, 1969.

7. *Красносельский М. А.* Приближенные решения операторных уравнений. М.: Наука, 1969.

Статья поступила 2 декабря 2003 г., окончательный вариант — 9 июня 2004 г.

Алероев Темирхан Султанович
Московская финансово-юридическая академия,
кафедра общематематических дисциплин,
ул. Большая Черемушинская, 17А, Москва 117447