Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2005. Том 46, № 5

УДК 517.957

О ЛОКАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕОДНОРОДНЫМ АНИЗОТРОПНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

С. Н. Антонцев, С. И. Шмарев

Аннотация: Рассматривается задача Дирихле для эллиптических уравнений с неоднородным анизотропным вырождением в области конечномерного арифметического пространства, которая может быть неограниченной. Доказано существование обобщенного решения и установлены условия, связывающие характер нелинейности уравнения и геометрические характеристики области, гарантирующие одномерную локализацию обобщенных решений (обращение в тождественный нуль). Показано, что уравнение с анизотропной нелинейностью допускает локализованные решения даже при отсутствии поглощения.

Ключевые слова: нелинейное эллиптическое уравнение, неоднородное вырождение, локализация решения.

Памяти Тадея Ивановича Зеленяка посвящается

1. Введение

В работе рассматривается задача Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения

$$\begin{gathered} -\sum_i D_i(a_i(x,u)|u|^{\alpha_i(x)}D_iu) + c(x,u)|u|^{\sigma(x)-2}u = f(x) \quad \text{в } \Omega\subset\mathbb{R}^n, \\ u=0 \quad \text{на } \partial\Omega. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Уравнения вида (1.1) возникают в математическом описании различных физических процессов. В качестве примера рассмотрим процесс фильтрации идеального баротропного газа в неоднородной пористой среде. Уравнение состояния газа имеет вид $p=\rho^{\gamma(x)}$, где p — давление, ρ — плотность, а показатель $\gamma(x)$ — заданная функция. Для неизотермического процесса уравнение состояния принимает вид $p=\rho^{\gamma(\theta(x))}$, причем функция θ может быть как заданной, так и неизвестной, определяемой из некоторых дополнительных условий. Предположим, что скорость газа задается нелинейным законом Дарси $V=-K(x,p)\nabla p$, в котором $K(x,p)$ — диагональная матрица. Подставляя эти соотношения в уравнение неразрывности движения

$$\operatorname{div}(\rho V)=h,$$

The first author was supported by the Mathematical center of the University of Beira Interior (Portugal), the second by the research grants MTM–2004-05417 (Spain) and HPRN–CT–2002–00274 (EC).

приходим к уравнению для давления p:

$$\operatorname{div}(K(x,p)p^{1/\gamma(\theta(x))}\nabla p) = h,$$

в котором функция h может зависеть от плотности ρ. В общем случае, когда

$$h = \mathbf{b}(x,\rho)\nabla\rho - c(x,\rho)|\rho|^{\sigma(x)-2}\rho + f(x),$$

$\mathbf{b}\nabla\rho$ описывает диффузию массы, а члены $c|\rho|^{\sigma(x,t)-2}\rho$ и f моделируют наличие источников или стоков массы. Более сложные модели механики сплошной среды, приводящие к уравнениям с неоднородными нелинейностями, обсуждаются в [1–3].

Вопросы существования, единственности и качественного поведения решений эллиптических уравнений вида (1.1) с постоянными показателями нелинейности, а также параболических уравнений с эллиптическими частями подобного типа исследовались в работах многих авторов, см. [4–10] и цитированную там литературу.

Насколько нам известно, в настоящее время отсутствуют какие-либо результаты о существовании и качественном поведении решений эллиптических уравнений вида (1.1) с переменными показателями нелинейности. Параболические уравнения с переменными показателями нелинейности в эллиптической части изучались в работах [11, 12], а параболические уравнения с сингулярно возмущенными показателями нелинейности и коэффициентами рассматривались в [13–15].

Целью настоящей работы является доказательство существования обобщенных решений уравнений с неоднородными анизотропными нелинейностями и исследование их свойств локализации (обращения в тождественный нуль) как в ограниченных, так и в неограниченных областях. Доказана теорема существования ограниченного п. в. обобщенного решения и установлена зависимость свойств локализации решений от характера анизотропности уравнения и от геометрических характеристик области Ω. Для неограниченных областей Ω указано условие, связывающее «асимптотический размер» области на бесконечности и характер нелинейности уравнения, при выполнении которого задача (1.1) разрешима для любой финитной правой части $f \in L^p(\Omega)$ с $p > n/2$ или $p = \infty$ в зависимости от вида уравнения (1.1). При нарушении этого условия задача разрешима для правых частей f, удовлетворяющих условию $\|f\| < \varepsilon^*$ с параметром ε^*, зависящим от геометрии области Ω и свойств показателей нелинейности $\alpha_i(x)$ и $\sigma(x)$.

Уравнение (1.1) принято называть уравнением типа «диффузия — поглощение». Пусть v — неотрицательное решение уравнения (1.1) с изотропным и однородным диффузионным оператором: $-\Delta v^m + v^\lambda = 0$ во внешней области Ω. Тогда $u = v^m$ является решением полулинейного уравнения $-\Delta u + u^{\sigma-1} = 0$, $\sigma - 1 = \lambda/m$, для которого справедлива следующая альтернатива:

$$2 \le \sigma \Longleftrightarrow \text{справедлив строгий принцип максимума [16]},$$

$$1 < \sigma < 2 \Longleftrightarrow \text{носитель решения компактен [17]}.$$

Оказывается, эта альтернатива не выполнена для решений уравнения с анизотропным диффузионным оператором даже в том случае, когда показатели нелинейности постоянны: локализация решения уравнения (1.1) может быть вызвана как наличием в уравнении младших членов («сильным поглощением»), так и анизотропностью диффузионного оператора в отсутствие поглощения.

При изучении свойств решений применяется метод локальных энергетических оценок [5].

1.1. Обобщенные пространства Лебега. В дальнейшем используются некоторые известные факты из теории обобщенных пространств Лебега, называемых также *пространствами Орлича — Лебега.* Мы приводим эти сведения без доказательств, которые можно найти в работах [18, 19] (см. также [20–23]).

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с липшицевой границей, и пусть функция $p(x) \in C^0(\Omega)$ удовлетворяет условиям

$$1 < p^- < \inf_{\Omega} p(x) \le p(x) \le \sup_{\Omega} p(x) < p^+ < \infty.$$

Через $L^{p(x)}(\Omega)$ обозначается пространство измеримых на Ω функций $f(x)$ таких, что

$$A_{p(\cdot)}(f) = \int\limits_{\Omega} |f(x)|^{p(x)}\, dx < \infty.$$

Пространство $L^{p(x)}(\Omega)$, снабженное нормой

$$\|f\|_{p(\cdot)} \equiv \|f\|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf\{\lambda > 0 :\ A_{p(\cdot)}(f/\lambda) \le 1\},$$

становится банаховым пространством. Непосредственно из определения следует, что

$$\min\bigl\{A_{p(\cdot)}^{\frac{1}{p^-}}, A_{p(\cdot)}^{\frac{1}{p^+}}\bigr\} \le \|f\|_{p(\cdot)} \le \max\bigl\{A_{p(\cdot)}^{\frac{1}{p^-}}, A_{p(\cdot)}^{\frac{1}{p^+}}\bigr\}. \tag{1.2}$$

Справедливо неравенство Гёльдера: для любых $f \in L^{p(x)}(\Omega)$, $g \in L^{q(x)}(\Omega)$ с показателями $p(x)$, $q(x)$,

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = 1, \quad 1 < p^- \le p(x) \le p^+ < \infty,\ 1 < q^- \le q(x) \le q^+ < \infty,$$

выполнено неравенство

$$\int\limits_{\Omega} |fg|\, dx \le 2\|f\|_{p(\cdot)}\|g\|_{q(\cdot)}. \tag{1.3}$$

2. Существование решения

Рассмотрим задачу

$$-\sum_i D_i(a_i(x,u)|u|^{\alpha_i(x)}D_i u) + c(x,u)|u|^{\sigma(x)-2}u = f(x) \quad \text{в } \Omega, \tag{2.1}$$

$$u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega.$$

Относительно области Ω и коэффициентов уравнения (2.1) предположим следующее:

1) $a_i(x,r)$ и $c(x,r)$ — функции Каратеодори (измеримые по x для всех $r \in \mathbb{R}$ и непрерывные по r для п. в. $x \in \Omega$,

$$\forall x \in \Omega,\ r \in \mathbb{R} \quad 0 < a_0 \le a_i(x,r) \le A_0 < \infty, \quad 0 \le c_0 \le c(x,r) \le C_0 < \infty \tag{2.2}$$

с некоторыми постоянными a_0, c_0, A_0, C_0).

2) $\alpha_i(x)$ и $\sigma(x)$ — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_i(x) \in l(\alpha_i^-, \alpha_i^+ r) \subseteq (\alpha^-, \alpha^+) \subset (-1, \infty), \quad \sigma(x) \in (\sigma^-, \sigma^+) \subset (1, \infty), \tag{2.3}$$

$\alpha_i^{\pm}$, $\alpha^{\pm}$, $\sigma^{\pm}$ — известные постоянные,

3) если не оговорено обратное, то $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с липшицевой границей Γ.

Решение задачи (2.1) понимается следующим образом.

Определение 2.1. Локально интегрируемая в Ω функция $u(x)$ называется *обобщенным решением задачи* (2.1), если

1) $u \in L^\infty(\Omega)$, $|u|^{\alpha_i(x)/2}|D_i u| \in L^2(\Omega)$ $(i = 1, \dots, n)$,

2) $u = 0$ на Γ в смысле следов,

3) для любой пробной функции $\eta \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^{\sigma(x)}(\Omega)$ выполнено интегральное тождество

$$\sum_i \int_\Omega a_i(x,u)|u|^{\alpha_i(x)} D_i u D_i \eta \, dx + \int_\Omega c(x,u)|u|^{\sigma(x)-2} u\eta \, dx = \int_\Omega f\eta \, dx. \tag{2.4}$$

Относительно функции f предположим, что

$$\begin{gathered} f \in L^p(\Omega) \text{ с } p > n/2, \quad \text{если } \alpha_i(x) \geq 0 \text{ в } \Omega, \\ f \in L^\infty(\Omega), \quad \text{если } \min_i \inf_\Omega \alpha_i(x) < 0. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* (2.2), (2.3) *и дополнительно к этим условиям*

$$\|D_i \alpha_i(x)\|_{2,\Omega} \leq C, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{2.6}$$

Предположим, что либо $\alpha_i(x) \geq 0$ в Ω, либо $\alpha_i(x) > -1$ в Ω и $c_0 > 0$. Тогда при любой правой части f, удовлетворяющей условию (2.5), *задача* (2.1) *имеет ограниченное п. в. обобщенное решение, для которого справедливы неравенства*

$$\sum_i \||u|^{\alpha_i(x)/2} D_i u\|_{2,\Omega} + \sum_i \||u|^{\alpha_i(x)} D_i u\|_{2,\Omega} + c_0\|u\|_{\sigma(\cdot),\Omega} + \|u\|_{\infty,\Omega} \leq \Lambda \tag{2.7}$$

с постоянной Λ, определяемой через $\|f\|$, $|\Omega|$, n и постоянные в условиях (2.2), (2.3).

Замечание 2.1. Как показано ниже, условие (2.6) можно существенно ослабить и требовать его выполнения в следующем виде:

$$\|D_i \alpha_i(x)\|_{2,\Omega_i^-} \leq C, \quad \Omega_i^- = \{x \in \Omega : \alpha_i(x) \leq 0\}.$$

2.1. Регуляризованная задача. Рассмотрим вспомогательную нелинейную эллиптическую задачу

$$\begin{gathered} -\sum_i D_i(A_i(\varepsilon, M, x, u) D_i u) + C(\varepsilon, M, x, u)u = f(x) \quad \text{в } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{на } \Gamma \end{gathered} \tag{2.8}$$

с положительными параметрами ε, M и коэффициентами

$$0 < C_i'(\varepsilon, M, \alpha^\pm) \leq A_i \equiv a_i(x,u)(\varepsilon^2 + \min\{u^2, M^2\})^{\alpha_i(x)/2} \leq C_i''(\varepsilon, M, \alpha^\pm) < \infty,$$

$$0 \leq C'(\varepsilon, M, \sigma^\pm) \leq C \equiv c(x,u)(\varepsilon^2 + \min\{u^2, M^2\})^{(\sigma(x)-2)/2} \leq C''(\varepsilon, M, \sigma^\pm) < \infty.$$

Лемма 2.1. *При любых $\varepsilon > 0$, $\tau \in [0,1]$, $f(x) \in L^p(\Omega)$ с $p > n/2$ задача* (2.8) *имеет решение $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \cap L^{\sigma(x)}(\Omega)$, для которого справедлива оценка*

$$c_0\|u\|_{\sigma(\cdot)} + \|u\|_{\infty,\Omega} \le C \tag{2.9}$$

с постоянной C, не зависящей от M и ε.

Существование обобщенного решения задачи (2.8) доказывается при помощи принципа неподвижной точки Шаудера [24, гл. 4, § 10]. Рассмотрим линейную задачу

$$\begin{gathered} -\sum_i D_i(A_i(\varepsilon, M, x, v)D_i u) + C(\varepsilon, M, x, v)u = \tau f(x) \quad \text{в } \Omega, \\ u = 0 \text{ на } \Gamma, \quad \tau \in [0,1], \quad v \in L^2(\Omega). \end{gathered} \tag{2.10}$$

Для любой заданной $v \in L^2(\Omega)$ и любых $\varepsilon > 0$, $M \ge 1$ и $\tau \in [0,1]$ задача (2.10) имеет единственное решение $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ [24, гл. 3], удовлетворяющее интегральному тождеству

$$\forall \eta \in W_0^{1,2}(\Omega) \quad \sum_i \int\limits_\Omega A_i D_i u D_i \eta \, dx + \int\limits_\Omega C u \eta \, dx = \tau \int\limits_\Omega f \eta \, dx. \tag{2.11}$$

Обозначим $\mathscr{B}_R = \{v : \|v\|_{L^2(\Omega)} < R\}$. Задача (2.10) определяет отображение $(v, \tau) \mapsto u$, которое в силу линейности по τ можно представить в виде

$$u = \tau\Phi(v) : \mathscr{B}_R \times [0,1] \mapsto L^2(\Omega).$$

Решение задачи (2.8) оказывается тогда неподвижной точкой отображения $\Phi(\cdot)$. В соответствии с принципом Шаудера отображение $\Phi(v)$ имеет по крайней мере одну неподвижную точку в шаре $\mathscr{B}_R$, если

(1) отображение $\Phi(v) : \mathscr{B}_R \mapsto \mathscr{B}_R$ вполне непрерывно,

(2) для всех $\tau \in [0,1)$ все возможные решения уравнения $u = \tau\Phi(v)$ удовлетворяют оценке $\|u\|_{2,\Omega} < R$.

Лемма 2.2. *Отображение $\Phi(v) : \mathscr{B}_R \mapsto \mathscr{B}_R$ вполне непрерывно.*

Доказательство. Отображение $\Phi(v)$ компактно вследствие компактности вложения $W_0^{1,2}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Непрерывность Φ вытекает из непрерывности коэффициентов A_i и C по переменной v. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть $\alpha_i(x) \ge 0$ и $f \in L^p(\Omega)$ с $p > n/2$. Тогда решение регуляризованной задачи* (2.10) *с параметром $M \ge 1$ удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_{\infty,\Omega} \le K \equiv \left(1 + \frac{C}{a_0}\|f\|_{p,\Omega}^{\frac{2}{n}-\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1+\frac{2}{n}-\frac{1}{p}}{\frac{2}{n}-\frac{1}{p}}} \tag{2.12}$$

с не зависящей от M постоянной C.

Доказательство. Возьмем произвольное число $k \ge 1$ и рассмотрим функцию $\zeta = \max\{0, u - k\}$. Функция ζ является допустимой пробной функцией в тождестве (2.11), причем

$$\nabla\zeta = \begin{cases} 0, & \text{если } u \le k, \\ \nabla u, & \text{если } u > k. \end{cases}$$

Обозначим $\Omega_k = \Omega \cap \{u > k\}$. Подставляя ζ в интегральное тождество (2.11) и учитывая неравенство $u \cdot \zeta \geq 0$, получаем

$$I := \sum_i \int\limits_{\Omega_k} a_i(x,u)(\varepsilon^2 + \min\{u^2, M^2\})^{\alpha_i(x)/2} |D_i u|^2 \, dx \leq \int\limits_{\Omega_k} f(u-k)\, dx.$$

В силу (2.2) и (2.3) на множестве Ω_k справедливо неравенство

$$\varepsilon^2 + \max\{k^2, M^2\} \geq \varepsilon^2 + \min\{u^2, M^2\} \geq \varepsilon^2 + \min\{k^2, M^2\} \geq 1,$$

поэтому

$$(\varepsilon^2 + \min\{u^2, M^2\})^{\alpha_i(x)/2} \geq \frac{1}{k}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega_k} |\nabla u|^2 \, dx \leq \frac{k}{a_0} \int\limits_{\Omega_k} f(u-k)\, dx \equiv \frac{k}{a_0} I_3.$$

Оценивая I_3 по неравенству Гёльдера, а затем применяя теорему вложения, приходим к оценке

$$|I_3| \leq |\Omega_k|^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}} \|u-k\|_{2,\Omega_k} \|f\|_{p,\Omega} \leq C|\Omega_k|^{\frac{1}{2} + \frac{2}{n} - \frac{1}{p}} \|f\|_{p,\Omega} \|\nabla u\|_{2,\Omega_k}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\Omega_k} |\nabla u|^2 \, dx \leq k^2 \left(\frac{C}{a_0}\right)^2 |\Omega_k|^{1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{p}} \|f\|^2_{p,\Omega}$$

с не зависящей от M постоянной C. Применяя [24, гл. 2, лемма 5.3], заключаем, что при $p > n/2$ выполнено неравенство $\|u\|_{\infty,\Omega} \leq K$ с постоянной K, зависящей от n, p, $1/a_0$ и $\|f\|_{p,\Omega}$ следующим образом [24, гл. 2, лемма 5.1]:

$$1 \leq K \leq \left(1 + \frac{C}{a_0} \|f\|_{p,\Omega}^{\frac{2}{n} - \frac{1}{p}}\right)^{\frac{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{p}}{\frac{2}{n} - \frac{1}{p}}}. \quad \square$$

Лемма 2.4. *Пусть $c_0 > 0$ и $f \in L^\infty(\Omega)$. Тогда решение регуляризованной задачи (2.10) с параметром $M \geq 1$ удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_{\infty,\Omega} \leq K \equiv \max\left\{1, \left(\frac{1}{c_0} \|f\|_{\infty,\Omega}\right)^{\frac{1}{\sigma^- - 1}}\right\}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве леммы 2.3, выберем в качестве пробной функцию $\zeta = \max\{u-k, 0\}$ с параметром $k \geq 1$. Подставив ζ в интегральное тождество (2.11), получаем неравенство

$$\sum_i \int\limits_{\Omega_k} A_i |D_i u|^2 \, dx + c_0 \int\limits_{\Omega_k} \min\{k, M\}^{\sigma(x)-1}(u-k)\, dx \leq \tau \int\limits_{\Omega_k} f(u-k)\, dx,$$

из которого следует оценка

$$0 \geq (c_0 k^{\sigma^- - 1} - \tau \|f\|_{\infty,\Omega}) \int\limits_{\Omega_k} (u-k)\, dx.$$

Увеличивая k, заключаем, что с необходимостью $|\Omega_k| = 0$ при

$$k \geq k_0 \equiv \left(\frac{1}{c_0}\|f\|_{\infty,\Omega}\right)^{1/(\sigma^- - 1)}.$$

Аналогичным способом устанавливается неравенство $-u \leq k_0$ п. в. в Ω. $\square$

Полученные оценки максимума решения задачи (2.8) не зависят от M, что позволяет выбрать $M = K$. Тогда коэффициенты в уравнениях (2.8)–(2.10) принимают вид

$$A_i(\varepsilon, M, x, w) = (\varepsilon^2 + w^2)^{\alpha_i(x)/2}, \quad C(\varepsilon, M, x, w) = (\varepsilon^2 + w^2)^{(\sigma(x)-2)/2}$$

и (2.8) превращается в задачу с единственным параметром регуляризации ε. Не оговаривая этого специально, в дальнейшем будем всегда считать, что $M = K$ с постоянной K из (2.13) или (2.12).

Лемма 2.5. *При $c_0 > 0$ неподвижные точки отображения Φ удовлетворяют неравенству*

$$c_0 \int\limits_\Omega |u|^{\sigma(x)}\,dx \leq K\|f\|_{\infty,\Omega}|\Omega|$$

с постоянной K из (2.13).

Доказательство. Подставим u в (2.11) в качестве пробной функции и отбросим неотрицательный член в левой части возникающего равенства:

$$c_0 \int\limits_\Omega (\varepsilon^2 + u^2)^{(\sigma(x)-2)/2} u^2\,dx \leq \int\limits_\Omega |f||u|\,dx \leq K|\Omega|\|f\|_{\infty,\Omega}. \quad \square$$

Доказательство леммы 2.1 закончено.

2.2. Предельный переход.

Лемма 2.6. *При выполнении условия* (2.5) *решения задачи* (2.8) *удовлетворяют неравенствам*

$$\sum_i \|\sqrt{A_i} D_i u\|^2_{2,\Omega} \leq C, \quad \sum_i \|A_i D_i u\|^2_{2,\Omega} \leq C \tag{2.14}$$

с не зависящей от ε постоянной C.

Доказательство. Первое из неравенств (2.14) следует из (2.11) при $\eta = u$. Для доказательства второго воспользуемся вытекающим из (2.12), (2.13) неравенством

$$\left(\frac{\varepsilon^2 + u^2}{\varepsilon^2 + K^2}\right)^{\alpha_i(x)/2} \leq \left(\frac{\varepsilon^2 + u^2}{\varepsilon^2 + K^2}\right)^{\alpha^-/2} \quad \text{п. в. в } \Omega.$$

Введем функцию

$$\phi(u) \equiv A_0 \int\limits_0^u (\varepsilon^2 + s^2)^{\alpha^-/2}\,ds \in L^\infty(\Omega) \cap W^{1,2}_0(\Omega).$$

При $\alpha^- > -1$ функция $|\phi(u)|$ равномерно по ε ограничена сверху постоянной $\phi(K)$. Подставляя $\phi(u)$ в (2.11) в качестве пробной функции, получаем неравенство

$$\sum_i \int\limits_\Omega A_i(\varepsilon^2 + u^2)^{\alpha^-/2}|D_i u|^2\,dx + c_0 \int\limits_\Omega (\varepsilon^2 + u^2)^{(\sigma(x)-2)/2} u\phi(u)\,dx \leq \int\limits_\Omega |f||\phi(u)|\,dx.$$

Замечая, что $u\phi(u) \geq 0$, имеем

$$\int\limits_\Omega A_i^2 |D_i u|^2\, dx \leq \sum_i \int\limits_\Omega a_i^2(x,u)(\varepsilon^2+u^2)^{\alpha_i(x)}|D_i u|^2\, dx$$

$$\leq \phi(K)\begin{cases} |\Omega|\|f\|_{\infty,\Omega} & \text{при } f \in L^\infty(\Omega), \\ |\Omega|^{1/p'}\|f\|_{p,\Omega} & \text{при } f \in L^p(\Omega). \end{cases} \qquad \square$$

Обозначим через $\{u_\varepsilon\}$ последовательность решений регуляризованной задачи (2.8). Оценки (2.9) и (2.14) позволяют выделить из $\{u_\varepsilon\}$ подпоследовательность (которую мы будем предполагать совпадающей со всей последовательностью), обладающую свойствами:

$$\begin{gathered} A_i D_i u_\varepsilon \to B_i(x) \quad \text{слабо в } L^2(\Omega), \\ u_\varepsilon \to u \quad \text{п. в. в } \Omega, \\ \left(\varepsilon^2+u_\varepsilon^2\right)^{(\sigma(x)-2)/2} u_\varepsilon \to |u|^{\sigma(x)-2}u \quad \text{слабо в } L^2(\Omega). \end{gathered} \tag{2.15}$$

Учитывая (2.15) и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в тождестве (2.11), получаем, что для любой $\eta \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\sum_i \int\limits_\Omega B_i(x) D_i\eta\, dx + \int\limits_\Omega c(x,u)|u|^{\sigma(x)-2}u\eta\, dx = \int\limits_\Omega f\eta\, dx.$$

Остается показать, что $B_i(x) = |u|^{\alpha_i(x)}D_i u$. Рассмотрим функции

$$G_i(u) = (\varepsilon^2+u^2)^{\alpha_i(x)}u.$$

Легко подсчитать, что

$$D_i G_i(u) = \left[1+\alpha_i\frac{u^2}{\varepsilon^2+u^2}\right](\varepsilon^2+u^2)^{\alpha_i/2}D_i u + \frac{1}{2}u(\varepsilon^2+u^2)^{\alpha_i/2}D_i\alpha_i \ln(\varepsilon^2+u^2),$$

$$|D_i G_i(u)|^2 \leq C[|A_i|^2|D_i u|^2 + |D_i\alpha_i(x)|^2].$$

В силу (2.14) $\|D_i G_i(u_\varepsilon)\|_{2,\Omega} \leq C$ равномерно по ε. Это позволяет выделить подпоследовательность $\{u_\varepsilon\}$ такую, что $D_i G_i(u_\varepsilon) \to D_i H_i$ слабо в $L^2(\Omega)$. Таким образом, для любой пробной функции ζ

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_\Omega D_i G_i(u_\varepsilon)\zeta\, dx = \int\limits_\Omega D_i H_i\zeta\, dx = -\lim_{\varepsilon\to 0} G_i(u_\varepsilon)D_i\zeta\, dx = -\int\limits_\Omega |u|^{\alpha_i(x)}uD_i\zeta\, dx,$$

что дает равенство

$$D_i H_i = D_i(|u|^{\alpha_i(x)}u) = (1+\alpha_i(x))|u|^{\alpha_i(x)}D_i u + \frac{1}{2}|u|^{\alpha_i(x)}u(\ln u^2)D_i\alpha_i(x).$$

Далее,

$$A_i(\varepsilon, M, x, u_\varepsilon)D_i u_\varepsilon = a_i(x,u_\varepsilon)\frac{\varepsilon^2+u_\varepsilon^2}{(1+\alpha_i(x))u_\varepsilon^2+\varepsilon^2}$$

$$\times\left[D_i G_i(u_\varepsilon) - \frac{1}{2}u\left(\varepsilon^2+u_\varepsilon^2\right)^{\alpha_i(x)/2}D_i\alpha_i(x)\ln\left(\varepsilon^2+u_\varepsilon^2\right)\right],$$

откуда следует, что для любой $\eta \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$\sum_i \int\limits_\Omega A_i(\varepsilon, M, x, u_\varepsilon)D_i u_\varepsilon D_i\eta\, dx \to \sum_i \int\limits_\Omega a_i(x,u)|u|^{\alpha_i(x)}D_i u D_i\eta\, dx \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Доказательство замечания 2.1. Условие (2.6) было использовано только для обоснования предельного перехода в задаче (2.8). Покажем, что на множествах $\{x \in \Omega : \alpha_i(x) > 0\}$ предельный переход возможен и без этого условия. Не ограничивая общности, предположим, что $\alpha^- > 0$. Представим первое слагаемое в левой части (2.11) следующим образом:

$$I := \sum_i \int_\Omega a_i(x, u_\varepsilon)\big(\varepsilon^2 + u_\varepsilon^2\big)^{\alpha_i(x)/2} D_i u_\varepsilon D_i \eta \, dx = I^{(1)}_{\delta,\varepsilon} + I^{(2)}_{\delta,\varepsilon} \equiv \sum_i \int_{\Omega_\delta} \dots + \sum_i \int_{\Omega\setminus\Omega_\delta} \dots,$$

где $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : |u_\varepsilon| > \delta\}$ и $\delta > 0$ — произвольное достаточно малое число. Легко видеть, что при выполнении (2.2), (2.3) и (2.14)

$$\mu(\delta) \sum_i \int_{\Omega_\delta} |D_i u_\varepsilon|^2 \, dx \le \sum_i \int_{\Omega_\delta} a_i(x, u_\varepsilon)\big(\varepsilon^2 + u_\varepsilon^2\big)^{\alpha_i(x)/2} |D_i u_\varepsilon|^2 \, dx \le C$$

с постоянной $\mu(\delta) > 0$. Следовательно, последовательности $\{D_i u_\varepsilon\}$ сходятся слабо в $L^2(\Omega_\delta)$, в то время как последовательности

$$\big\{a_i(x, u_\varepsilon)\big(\varepsilon^2 + u_\varepsilon^2\big)^{\alpha_i(x)/2}\big\}, \quad i = 1, \dots, n,$$

сходятся почти всюду, поэтому для любого фиксированного $\delta > 0$ существует

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I^{(1)}_{\delta,\varepsilon} = \sum_i \int_{\Omega_\delta} a(x, u)|u|^{\alpha_i(x)} D_i u D_i \eta \, dx.$$

Учитывая (2.2) и (2.14), оценим $I^{(2)}_{\delta,\varepsilon}$ следующим образом:

$$\big|I^{(2)}_{\delta,\varepsilon}\big| \le \sqrt{A_0}(\delta^2 + \varepsilon^2)^{\alpha^-/2} \|\sqrt{A_i} D_i u_\varepsilon\|_{2,\Omega} \|D_i \eta\|_{2,\Omega} \le C(\delta^2 + \varepsilon^2)^{\alpha^-/2}.$$

Таким образом, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \big|I^{(2)}_{\varepsilon,\delta}\big| \le C\delta^{\alpha^-}$ и для любого $\delta > 0$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I = \sum_i \int_{\Omega_\delta} a_i(x, u)|u|^{\alpha_i(x)} D_i u D_i \eta \, dx + o(\delta^{\alpha^-}).$$

Учитывая оценки (2.14) и применяя теорему Лебега о предельном переходе, окончательно получаем

$$\lim_{\delta \to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} |I| = \sum_i \int_\Omega a_i(x, u)|u|^{\alpha_i(x)} D_i u D_i \eta \, dx. \qquad \square$$

3. Одномерная локализация в случае $n = 2$

Рассмотрим задачу (2.1) в случае $n = 2$. Будем предполагать, что ограниченная односвязная область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ определена соотношениями

$$\begin{gathered} \Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 \in (0, L), x_2 \in (g(x_1), h(x_1)]\}, \quad L = \text{const}, \\ h, g \in C^{0,1}[0, L], \quad h(t) > g(t) \text{ при } t \in (0, L), \\ h(0) \ge g(0), \quad h(L) \ge g(L). \end{gathered} \tag{3.1}$$

3.1. Энергетическое тождество. Пусть в условиях теоремы 2.1 функция $f(x)$ такова, что

$$f(x) = 0 \quad \text{при п. в. } x \in \Omega \cap \{x_1 \ge l\} \tag{3.2}$$

с некоторой постоянной $0 < l < L$. Пусть $u(x)$ — обобщенное решение задачи (2.1). Функция u может быть выбрана в качестве пробной функции в интегральном тождестве (2.11), что приводит к энергетическому соотношению

$$\sum_i \int_\Omega a_i(x,u)|u|^{\alpha_i(x)}|D_i u|^2\,dx + \int_\Omega c(x,u)|u|^{\sigma(x)}\,dx = \int_\Omega fu\,dx. \tag{3.3}$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *и условия* (3.1), (3.2). *Тогда для п. в.* $t > l$

$$-\int_{g(t)}^{h(t)} u|u|^{\alpha_1(x)} D_1 u|_{x_1=t}\,dx_2 = \int_t^L dx_1 \int_{g(x_1)}^{h(x_1)} \Big(\sum_i a_i(x,u)|u|^{\alpha_i(x)}|D_i u|^2\,dx_2 + c(x,u)|u|^{\sigma(x)}\Big)\,dx_2. \tag{3.4}$$

Доказательство. Введем функцию

$$\psi_k(x_1,t) = \begin{cases} 1 & \text{при } x_1 > t+1/k,\\ k(x_1-t) & \text{при } x_1 \in [t, t+1/k],\\ 0 & \text{при } x < t, \quad k = 1,2,\dots. \end{cases}$$

Подставляя в (2.11) $\eta = \psi(x_1,t)u(x)$ в качестве пробной функции, при $t > l$ имеем

$$-I_k(t) \equiv -k \int_t^{t+1/k} dx_1 \int_{g(x_1)}^{h(x_1)} u|u|^{\alpha_1(x)} D_1 u\,dx_2 = \sum_i \int_t^L dx_1 \int_{g(x_1)}^{h(x_1)} a_i(x,u)|u|^{\alpha_i(x)}|D_i u|^2\,dx_2 + \int_t^L dx_1 \int_{g(x_1)}^{h(x_1)} c(x,u)\psi(x_1)|u|^{\sigma(x)}\,dx_2. \tag{3.5}$$

Обозначим

$$J(r) = \int_{g(r)}^{h(r)} u|u|^{\alpha_1(x)} D_1 u|_{x_1=t}\,dx_2, \quad I_k(t) = k\int_t^{t+1/k} J(r)\,dr.$$

Из неравенства

$$\int_t^L |J(r)|dr \le A_0 \int_\Omega |u|^{\alpha_1(x)+1}|D_1 u|\,dx \le A_0\|u\|_{2,\Omega}\||u|^{\alpha_1(x)}D_1 u\|_{2,\Omega} \le A_0 K\sqrt{|\Omega|}\||u|^{\alpha_1(x)}D_1 u\|_{2,\Omega}$$

и теоремы 2.1 следует, что $\|J(r)\|_{1,(l,L)} \le C$. Тогда по теореме Лебега о предельном переходе существует

$$\lim_{k\to\infty} I_k(t) = J(t)$$

и (3.4) следует в результате предельного перехода в (3.5) при $k \to \infty$. $\square$

3.2. Дифференциальное неравенство. Оценим левую часть (3.4):

$$|J(t)| \le \int\limits_{g(t)}^{h(t)} (|u|^{(\alpha_1+2)/2})(|u|^{\alpha_1/2}|D_1 u|)\, ds, \tag{3.6}$$

и воспользуемся представлением

$$|u|^{(\alpha_2^+ +2)/2} = (u^2)^{(\alpha_2^+ +2)/4} = \int\limits_{g(t)}^{s} D_2((u^2)^{(\alpha_2^+ +2)/4})d\xi$$

$$= \frac{\alpha_2^+ + 2}{4} \int\limits_{g(t)}^{s} (u^2)^{(\alpha_2^+ -2)/4} D_2 u^2 d\xi = \frac{\alpha_2^+ + 2}{2} \int\limits_{g(t)}^{s} |u|^{(\alpha_2^+ -2)/2} u D_2 u d\xi. \tag{3.7}$$

Тогда для п. в. $t \in (l, L)$ на сечении $x_1 = t$

$$|u| \le \left(\frac{\alpha_2^+ + 2}{2}\right)^{\frac{2}{\alpha_2^+ + 2}} \phi^{\frac{1}{2(\alpha_2^+ + 2)}}(t) \left(\int\limits_{g(t)}^{h(t)} |u|^{\alpha_2^+} |D_2 u|^2\, dx_2 \right)^{\frac{1}{\alpha_2^+ + 2}}.$$

Подставляя это неравенство в (3.6), а затем оценивая правую часть по неравенству Гёльдера, приходим к неравенству

$$|J(t)| \le \int\limits_{g(t)}^{h(t)} \left(\frac{\alpha_2^+ + 2}{2}\right)^{\frac{\alpha_1(x)+2}{\alpha_2^+ + 2}} \phi^{\frac{\alpha_1(x)+2}{4(\alpha_2^+ + 2)}}(t)$$

$$\times \left(\int\limits_{g(t)}^{h(t)} |u|^{\alpha_2^+} |D_2 u|^2\, dx_2 \right)^{\frac{\alpha_1(x)+2}{2(\alpha_2^+ + 2)}} (|u|^{\alpha_1(x)/2}|D_1 u|)\, dx_2$$

$$\le \left[\int\limits_{g(t)}^{h(t)} \left(\frac{\alpha_2^+ + 2}{2}\right)^{2\frac{\alpha_1(x)+2}{\alpha_2^+ + 2}} \phi^{\frac{\alpha_1(x)+2}{2(\alpha_2^+ + 2)}}(t) \left(\int\limits_{g(t)}^{h(t)} |u|^{\alpha_2^+} |D_2 u|^2\, dx_2 \right)^{\frac{\alpha_1(x)+2}{\alpha_2^+ + 2}} \right]^{1/2}$$

$$\times \left(\int\limits_{g(t)}^{h(t)} |u|^{\alpha_1(x)} |D_1 u|^2\, dx_2 \right)^{1/2}.$$

Введем обозначения

$$\Phi(t) = \int\limits_{g(t)}^{h(t)} |u|^{\alpha_1(x)} |D_1 u|^2\, dx_2 + \int\limits_{g(t)}^{h(t)} |u|^{\alpha_2^+} |D_2 u|^2\, dx_2,$$

$$
\begin{gathered}
q(x)=\frac{\alpha_1(x)+2}{2(\alpha_2^+ +2)}, \quad x=(t,x_2),\\
0<q^-<\inf_{\Omega\cap\{t\geq l\}} q(x)\leq q(x)\leq \sup_{\Omega\cap\{t\geq l\}} q(x)<q^+<\infty,
\end{gathered}
\tag{3.8}
$$

$$
\psi(t)=\left[\int\limits_{g(t)}^{h(t)}\left(\frac{\alpha_2^+ +2}{2}\right)^{4q(t,x_2)}\phi^{q(t,x_2)}(t)\,dx_2\right]^{1/2}. \tag{3.9}
$$

В этих обозначениях оценка для $|J(t)|$ принимает вид

$$
|J(t)|\leq \psi(t)\max\{\Phi^{q^+}(t),\Phi^{q^-}(t)\}\Phi^{1/2}(t).
$$

Введем в рассмотрение функцию

$$
\Psi(t)=\int\limits_t^L \Phi(s)ds, \quad \Psi'(t)=-\Phi(t)\leq 0 \quad \text{для п. в. } t\in(l,L).
$$

Учитывая, что $|u|\leq K$ п. в. в Ω с постоянной $K\geq 1$, получаем

$$
\begin{aligned}
E(t)\equiv\sum_i\int\limits_t^L ds\int\limits_{g(s)}^{h(s)}|u|^{\alpha_i(x)}|D_iu|^2\,dx_2 &\geq \int\limits_t^L ds\int\limits_{g(s)}^{h(s)}|u|^{\alpha_1(x)}|D_1u|^2\,dx_2\\
&+K^{\alpha_2^- -\alpha_2^+}\int\limits_t^L ds\int\limits_{g(s)}^{h(s)}|u|^{\alpha_2^+}|D_2u|^2\,dx_2\geq C\big(K,\alpha_2^\pm\big)\Psi(t).
\end{aligned}
$$

Объединяя это неравенство с оценкой для $J(t)$, приходим к следующему утверждению.

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда решения задачи* (2.1) *удовлетворяют дифференциальному неравенству*

$$
C\Psi(t)\leq\psi(t)\max\{(-\Psi'(t))^{q^+},(-\Psi'(t))^{q^-}\}(-\Psi'(t))^{1/2} \text{для п. в. } t\in(l,L) \tag{3.10}
$$

с постоянной $C=K^{\alpha_2^- -\alpha_2^+}\in(0,1]$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1, $f=0$ *при п. в.* $x\in\Omega\cap\{x_1>l\}$, *а показатели* $\alpha_i(x)$ *таковы, что*

$$
\alpha_1^- >\alpha_2^+. \tag{3.11}
$$

Тогда можно указать ε, *зависящее от* $\alpha_i^\pm$ *и свойств функций* $h(t)$, $g(t)$, *такое, что любое решение задачи* (2.1), *удовлетворяющее условию* $E(t)\leq\varepsilon$, *локализовано по переменной* x_1: $u(x,t)=0$ *для п. в.* $x\in\Omega\cap\{x_1>t^*\}$ *с* $t^*\in(l,L)$, *определяемым через* ε *и* $\alpha_i^\pm$.

Доказательство. Для решений задачи (2.1) справедливо дифференциальное неравенство (3.10). Заметим, что

$$
\max\{(-\Psi'(t))^{q^+},(-\Psi'(t))^{q^-}\}=\begin{cases}(-\Psi'(t))^{q^-}, & \text{если } \Phi(t)<1,\\ (-\Psi'(t))^{q^+}, & \text{если } \Phi(t)\geq 1.\end{cases}
$$

Это позволяет переписать неравенство (3.10) в виде

$$\min\{(C\psi^{-1}(t)\Psi(t))^{\frac{2}{1+2q^-}}, (C\psi^{-1}(t)\Psi(t))^{\frac{2}{1+2q^+}}\} + \Psi'(t)) \le 0 \quad \text{для п. в. } t \in (l, L). \tag{3.12}$$

Применяя неравенства

$$\frac{2}{1+2q^+} \le \frac{2}{1+2q^-} < 1, \quad \frac{\Psi(t)}{\varepsilon K^{\alpha_2^+ - \alpha_2^-}} \le \frac{E(t)}{\varepsilon} \le 1$$

и учитывая вид коэффициента C в (3.10), заключаем, что

$$\begin{aligned} &\min\{(C\psi^{-1}(t)\Psi(t))^{\frac{2}{1+2q^-}}, (C\psi^{-1}(t)\Psi(t))^{\frac{2}{1+2q^+}}\} \\ &\ge \min\{(C\varepsilon\psi^{-1}(t))^{\frac{2}{1+2q^-}}, (C\varepsilon\psi^{-1}(t))^{\frac{2}{1+2q^+}}\}\left(\frac{\Psi(t)}{\varepsilon K^{\alpha_2^+ - \alpha_2^-}}\right)^{\frac{2}{1+2q^-}} \\ &\ge \min\{1, \varepsilon^{\frac{2}{1+2q^+} - \frac{2}{1+2q^-}}\} \min\{\psi^{\frac{-2}{1+2q^-}}(t), \psi^{\frac{-2}{1+2q^+}}(t)\}\Psi^{\frac{2}{1+2q^-}}(t). \end{aligned}$$

Неравенство (3.12) можно продолжить теперь следующим образом:

$$D\Psi^{\frac{2}{1+2q^-}} + z(t)\Psi'(t) \le 0 \quad \text{для п. в. } t \in (l, L) \tag{3.13}$$

с коэффициентами

$$D = \begin{cases} 1 & \text{при } \varepsilon \le 1, \\ \varepsilon^{\frac{2}{1+2q^+} - \frac{2}{1+2q^-}} & \text{при } \varepsilon > 1, \end{cases} \quad z(t) \equiv \max\{\psi^{\frac{2}{1+2q^-}}(t), \psi^{\frac{2}{1+2q^+}}(t)\}. \tag{3.14}$$

Интегрируя (3.13) в пределах (l, t) и учитывая, что $\Psi(l) \le \varepsilon K^{\alpha_2^+ - \alpha_2^-}$, получаем неравенство

$$0 \le \Psi^{\frac{2q^- - 1}{2q^- + 1}}(t) \le (\varepsilon K^{\alpha_2^+ - \alpha_2^-})^{\frac{2q^- - 1}{2q^- + 1}} - D\frac{2q^- - 1}{2q^- + 1}\int_l^t \frac{ds}{z(x)} \equiv G(t, \varepsilon).$$

По определению $\Psi(t)$ — монотонно убывающая функция, поэтому $\Psi(t) \equiv 0$ при всех $t \ge t_*$, где t^* — корень уравнения $G(t, \varepsilon) = 0$. Это уравнение всегда имеет решение в интервале (l, L), если $\varepsilon < \varepsilon^*$, а в качестве ε^* выбран корень уравнения $G(L, \varepsilon^*) = 0$. $\square$

Замечание 3.1. Пусть в условиях теоремы 3.2 $\alpha_i = \text{const}$. Тогда уравнение $G(t, \varepsilon)$ имеет решение в интервале (l, L) при любом $\varepsilon > 0$, если

$$\int_l^L \frac{ds}{h(s) - g(s)} = \infty.$$

Примером такой области является область с угловой точкой при $x_1 = L$: $h(t) - g(t) \sim L - t$ при $t \to L-$.

4. Одномерная локализация в случае $n \ge 3$

Пусть $n \ge 3$. Предположим, что область Ω обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered} \text{для любого } t \in (0, L) \text{ сечение } \omega(t) = \Omega \cap \{x_1 = t\} \text{ —} \\ \text{односвязная область в } \mathbb{R}^{n-1} \text{ с липшицевой границей } \partial\omega(t), \\ \text{существует } \kappa \in (0, 1) \text{ такое, что } \kappa\lambda(t) \le \operatorname{diam}\omega(t) \le \lambda(t), \\ \lambda(0) \ge 0,\ \lambda(L) \ge 0, \text{где } \lambda(t) \text{ — заданная непрерывная функция.} \end{gathered} \tag{4.1}$$

Условимся обозначать $x = (x_1, x')$, $x' = (x_2, \dots, x_n)$. Повторяя доказательство теоремы 3.1, несложно проверить, что справедлива

Лемма 4.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1 *и условия* (4.1). *Предположим, что* $f \equiv 0$ *при п. в.* $x \in \Omega \cap \{x_1 \geq l\}$. *Тогда решение задачи* (2.1) *удовлетворяет энергетическому соотношению: для п. в.* $t \in (l, L)$

$$J(t) \equiv -\int\limits_{\omega(t)} u|u|^{\alpha_1(x)} D_1 u \, dx'$$

$$= \int\limits_t^L dr \int\limits_{\omega(r)} \Big(\sum_i a_i(x,u)|u|^{\alpha_i(x)}|D_i u|^2 \, dx' + c(x,u)|u|^{\sigma(x)} \Big) \, dx'. \quad (4.2)$$

Обозначим

$$\Phi(t) = \int\limits_{\omega(t)} |u|^{\alpha_1(x)}|D_i u|^2 \, dx' + \sum_{i \neq 1} \int\limits_{\omega(t)} |u|^{\beta}|D_i u|^2 \, dx',$$

$$\Psi(t) = \int\limits_t^L dr \int\limits_{\omega(r)} |u|^{\alpha_1(x)}|D_i u|^2 \, dx' + \sum_{i \neq 1} \int\limits_t^L dr \int\limits_{\omega(r)} |u|^{\beta}|D_i u|^2 \, dx,$$

$$\gamma(x) = 2\frac{\alpha_1(x) + 2}{\beta + 2}, \quad \beta = \max_{i \neq 1} \alpha_i^+,$$

$$\gamma(x) \in [\inf_{\Omega} \gamma(x), \sup_{\Omega} \gamma(x)] \subset (\gamma^-, \gamma^+).$$

Лемма 4.2. *Пусть* $n \geq 3$. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 2.1, *область* Ω *удовлетворяет условиям* (4.1), *а показатели нелинейности* $\alpha_i(x)$ *удовлетворяют условиям*

$$1 < \frac{\alpha_1^+ + 2}{\beta + 2} \quad \text{при } n = 3, \quad 1 < \frac{\alpha_1^+ + 2}{\beta + 2} \leq \frac{n-1}{n-3} \quad \text{при } n > 3. \quad (4.3)$$

Тогда для обобщенных решений задачи (2.1) *справедливо неравенство*

$$C_0 \Psi(t) \leq C_1 \psi(t) \sqrt{\Phi(t)} \max\{\Phi^{\gamma^-/4}(t), \Phi^{\gamma^+/4}(t)\},$$

в котором C_0 *и* C_1 — *абсолютные постоянные, определяемые только параметрами* $\alpha_i^{\pm}$, K, a_0 *и* c_0, *а функция* $\psi(t)$ *имеет вид*

$$\psi(t) = C\big(K, \alpha_i^{\pm}\big) \|1\|^{1/2}_{\frac{\gamma^+}{\gamma^+ - \gamma(\cdot)}, \omega(t)} \max\{\lambda^{\frac{\gamma^-}{2} + \frac{n-1}{2}(\frac{\gamma^-}{\gamma^+} + \frac{\gamma^-}{2})}(t), \lambda^{\frac{\gamma^+}{2} + \frac{n-1}{2}(1 + \frac{\gamma^+}{2})}(t)\}. \quad (4.4)$$

Доказательство. По неравенству Гёльдера

$$|J(t)| \leq \Big(\int\limits_{\omega(t)} |u|^{\alpha_1(x)+2} \, dx' \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{\omega(t)} |u|^{\alpha_1(x)}|D_1 u|^2 \, dx' \Big)^{1/2} \equiv \sqrt{j_1(t)}\sqrt{j_2(t)}.$$

Обозначим $v = |u|^{\frac{\beta+2}{2}}$ и оценим j_1 при помощи (1.3):

$$j_1(t) \leq \int\limits_{\omega(t)} |v|^{\gamma(x)} \, dx' \leq 2\|v\|_{\frac{\gamma^+}{\gamma(\cdot)}, \omega(t)} \|1\|_{\frac{\gamma^+}{\gamma^+ - \gamma(\cdot)}, \omega(t)}$$

$$\le 2C(|\omega(t)|)\max\Big\{A^{\frac{\gamma^-}{\gamma^+}}_{\frac{\gamma^+}{\gamma(\cdot)},\omega(t)}(|v|^{\gamma(x)}), A_{\frac{\gamma^+}{\gamma(\cdot)},\omega(t)}(|v|^{\gamma(x)})\Big\}$$

$$\le 2C(|\omega(t)|)\max\Big\{A^{\frac{\gamma^-}{\gamma^+}}_{\gamma^+,\omega(t)}(v), A_{\gamma^+,\omega(t)}(v)\Big\}$$

$$\le 2C(|\omega(t)|)\max\big\{\|v\|^{\gamma^-}_{\gamma^+,\omega(t)}, \|v\|^{\gamma^+}_{\gamma^+,\omega(t)}\big\}$$

с постоянной

$$C(|\omega(t)|) = \|1\|_{\frac{\gamma^+}{\gamma^+-\gamma(\cdot)},\omega(t)} \le \max\{|\omega(t)|^{\inf\frac{\gamma^+}{\gamma^+-\gamma(x)}}, |\omega(t)|^{\sup\frac{\gamma^+}{\gamma^+-\gamma(x)}}\}. \tag{4.5}$$

Обозначим $\widetilde{\nabla}v = (D_2v,\dots,D_nv)$. Применяя известные интерполяционные неравенства [24, гл. 2, § 2], запишем оценку

$$\|v\|_{\gamma^+,\omega(t)} \le C(\lambda(t))^{1+(n-1)(\frac{1}{\gamma^+}-\frac{1}{2})}\|\widetilde{\nabla}v\|_{2,\omega(t)}$$

$$\le C(\lambda(t))^{1+(n-1)(\frac{1}{\gamma^+}-\frac{1}{2})}\frac{\beta+2}{2}\Bigg(\sum_{i\ne1}\int\limits_{\omega(t)}|u|^\beta|D_iu|^2\,dx'\Bigg)^{1/2}$$

$$\le C(\lambda(t))^{1+(n-1)(\frac{1}{\gamma^+}-\frac{1}{2})}\sqrt{\Phi(t)}, \quad C\equiv C(K,\beta),$$

с функцией $\lambda(t)$ из условия (4.1). Таким образом,

$$|J(t)| \le C'\big(K,\alpha_i^\pm\big)\sqrt{\Phi(t)}\max\{\Phi^{\gamma^-/4}(t),\Phi^{\gamma^+/4}(t)\}\|1\|^{1/2}_{\frac{\gamma^+}{\gamma^+-\gamma(\cdot)},\omega(t)}$$

$$\times\max\{\lambda^{\frac{\gamma^-}{2}+\frac{n-1}{2}(\frac{\gamma^-}{\gamma^+}+\frac{\gamma^-}{2})}(t), \lambda^{\frac{\gamma^+}{2}+\frac{n-1}{2}(1+\frac{\gamma^+}{2})}(t)\}. \qquad \square$$

По аналогии с (3.12), (3.13) приходим к неравенству

$$C_3\Psi^{4/(2+\gamma^-)}(t) + \phi(t)\Psi'(t) \le 0, \quad \phi(t) = \psi^{4/(2+\gamma^-)} \text{ для п. в. } t\in(l,L). \tag{4.6}$$

Интегрированием этого неравенства по t устанавливается следующая

Теорема 4.1. *Пусть $n\ge3$. Предположим, что выполнены условия теоремы 2.1, область Ω удовлетворяет условиям (4.1), $f=0$ при п. в. $x\in\Omega\cap\{x_1>l\}$, а показатели $\alpha_i(x)$ удовлетворяют условиям (4.3). Тогда можно указать ε, зависящее от $\alpha_i^\pm$ и $\lambda(t)$, такое, что любое решение задачи (2.1), удовлетворяющее условиям $E(t)\le\varepsilon$, $\|u\|_{\infty,\Omega}\le\max\{1,\varepsilon\}$, локализовано по переменной x_1: $u(x,t)=0$ для п. в. $x\in\Omega\cap\{x_1>t^*\}$ с $t^*\in(l,L)$, определяемым через ε и $\alpha_i^\pm$.*

Доказательство повторяет доказательство теоремы 3.2 и может быть опущено. Отметим лишь, что итоговое неравенство для энергетической функции $\Psi(t)$ имеет вид

$$\begin{gathered} 0\le\Psi^\sigma(t)\le(\varepsilon^{1+\min_{i\ne1}\alpha_i^- -\beta})^\sigma - C_3\sigma\int\limits_l^t\frac{ds}{\phi(s)} \equiv \mathscr{F}(\varepsilon,t), \\ \sigma = 1-\frac{4}{2+\gamma^-} \equiv \frac{\gamma^--2}{\gamma^-+2}\in(0,1), \end{gathered} \tag{4.7}$$

что гарантирует наличие эффекта локализации, если $\varepsilon < \varepsilon^*$, а в качестве ε^* выбрано решение уравнения $\mathscr{F}(\varepsilon^*, L) = 0$. Очевидно также, что одномерная локализация заведомо имеет место в том случае, если

$$\int_l^L \frac{ds}{\phi(s)} = \infty.$$

Комбинируя (4.5) с (4.4), несложно проверить, что последнее условие выполнено в областях, удовлетворяющих условиям

$$\lambda(t) \sim (L-t)^\mu \text{ при } t \to L, \quad 1 \ge \mu \ge \frac{\gamma^+}{\gamma^-} \frac{2+\gamma^-}{2(n-1) - \gamma^+(n-3)}.$$

В случае $\alpha_i = \mathrm{const}$ и $n = 2$ это условие совпадает с наложенным в замечании 3.1.

5. Влияние младших членов

Условие (4.3) позволяет установить наличие одномерной локализации решений уравнения (2.1) независимо от свойств младших членов уравнения. Предположим, что условие (4.3) не выполнено. В этом случае неравенство (4.6) становится линейным и его интегрирование не дает никакой информации о возможной локализации решения. Тем не менее эффект одномерной локализации имеет место, если наложить определенные условия на младший член в уравнении (2.1).

Введем энергетические функции

$$\Psi(t) = \int_t^L dr \int_{\omega(r)} |u|^{\alpha_1(x)} |D_1 u|^2 \, dx' + \int_t^L dr \int_{\omega(r)} |u|^{\alpha^+} |\widetilde{\nabla} u|^2 \, dx',$$

$$\Lambda(t) = \int_t^L dr \int_{\omega(r)} |u|^{\sigma^+} \, dx', \quad \Theta(t) = \Phi(t) + \Lambda(t).$$

Функции $\Psi(t)$ и $\Lambda(t)$ неотрицательные монотонно невозрастающие, поэтому для п. в. $t \in (l, L)$ существуют $\Psi'(t)$ и $\Lambda'(t)$.

Лемма 5.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1, *условия* (4.1) *и в условиях* (2.2) $c_0 > 0$. *Предположим, что* $f \equiv 0$ *при п. в.* $x \in \Omega \cap \{x_1 \ge l\}$. *Тогда для решений задачи* (2.1) *справедливо неравенство: для п. в.* $t \in (l, L)$

$$\int_{\omega(t)} |u|^{\alpha_1(x)+1} |D_1 u| \, dx' \ge \min\{a_0, c_0\} \Theta(t).$$

Доказательство. По лемме 4.1 справедливо неравенство (4.2). Оценивая правую часть (4.2) с помощью (2.2) и неравенств

$$|u|^{\alpha_i(x)} \ge K^{\alpha^- - \alpha^+} |u|^{\alpha^+}, \quad |u|^{\sigma(x)} \ge K^{\sigma^- - \sigma^+} |u|^{\sigma^+} \quad \text{для п. в. } x \in \Omega,$$

получаем требуемое. $\square$

Лемма 5.2. *Пусть выполнены условия леммы* 5.1 *и показатели нелинейности* $\alpha_i(x)$ *и* $\sigma(x)$ *таковы, что*

$$\gamma \equiv \frac{2\sigma^+}{\alpha^+ + 2} \in (1,2).$$

Тогда для решений задачи (2.1) *справедливо дифференциальное неравенство*

$$\widetilde{C}\Theta^{\beta}(t) + \rho(t)\Theta'(t) \le 0 \ \text{ для п. в. } t \in (l,L), \quad \beta^{-1} = \frac{\theta}{2} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{2}, \tag{5.1}$$

в котором $\widetilde{C}$ — *абсолютная постоянная,*

$$\theta = \frac{1/\gamma - 1/2}{1/\gamma - (n-3)/2(n-1)} \in (0,1), \quad r(x) = \left(\frac{\alpha^+ + 2}{\alpha_1(x)+2}\right)',$$

а коэффициент $\rho(t)$ *имеет вид* $\rho(t) = R^{\beta}(t)$,

$$R(t) = \|1\|_{r(\cdot),\omega(t)}\lambda^{\mu}(t), \quad \mu = \theta + (1-\theta)(n-1)(1/2 - 1/\gamma).$$

Доказательство. Оценим левую часть полученного в лемме 5.2 неравенства, применяя неравенство Гёльдера (1.3) и неравенство (1.2):

$$\int\limits_{\omega(t)} |u|^{\alpha_1(x)+1}|D_1 u|\,dx' \le \int\limits_{\omega(t)} |u|^{\frac{\alpha_1(x)}{2}+1}\big(|u|^{\frac{\alpha_1(x)}{2}}|D_1 u|\big)\,dx'$$

$$\le \Bigg(\int\limits_{\omega(t)} |u|^{\alpha_1(x)+2}\,dx'\Bigg)^{\frac12}\Bigg(\int\limits_{\omega(t)} |u|^{\alpha_1(x)}|D_1 u|^2\,dx'\Bigg)^{\frac12}$$

$$\le \sqrt{2}\,\big\||u|^{\alpha_1(x)+2}\big\|^{\frac12}_{\frac{\alpha^+ + 2}{\alpha_1(\cdot)+2},\omega(t)}\|1\|^{\frac12}_{(\frac{\alpha^+ + 2}{\alpha_1(\cdot)+2})',\omega(t)}\Bigg(\int\limits_{\omega(t)} |u|^{\alpha_1(x)}|D_1 u|^2\,dx'\Bigg)^{\frac12}$$

$$\le \sqrt{2}\max\Bigg\{\Bigg(\int\limits_{\omega(t)} |u|^{\alpha^+ + 2}\,dx'\Bigg)^{\frac12}, \Bigg(\int\limits_{\omega(t)} |u|^{\alpha^+ + 2}\,dx'\Bigg)^{\frac{\alpha^- + 2}{2(\alpha^+ + 2)}}\Bigg\}$$

$$\times \|1\|^{\frac12}_{r(\cdot),\omega(t)}\Bigg(\int\limits_{\omega(t)} |u|^{\alpha_1(x)}|D_1 u|^2\,dx'\Bigg)^{\frac12}.$$

Обозначим

$$v = |u|^{\frac{\alpha^+ + 2}{2}}, \quad \int\limits_{\omega(t)} |u|^{\alpha^+ + 2}\,dx' = \int\limits_{\omega(t)} v^2\,dx'.$$

При $\gamma \in (1,2)$ можно применить интерполяционное неравенство [5, с. 296]

$$\|v\|_{2,\omega(t)} \le C\lambda^{\mu}(t)\|\nabla v\|^{\theta}_{2,\omega(t)}\|v\|^{1-\theta}_{\gamma,\omega(t)} \le C\lambda^{\mu}(t)(-\Theta'(t))^{\frac{\theta}{2}+\frac{1}{\gamma}}.$$

Объединяя два последних неравенства, приходим к (5.1). □

Замечание 5.1. В специальном случае $\alpha_1(x) = \alpha^+$ в неравенстве (5.1) $\rho(t) \sim \lambda^{\mu}(t)$.

Замечание 5.2. При $\alpha_i(x) = 0$, $\sigma(x) \equiv \sigma^+$ уравнение (2.1) становится полулинейным и наложенные выше условия на показатели нелинейности превращаются в известное условие локализации [17]: $1 < \sigma^+ < 2$.

Обозначим

$$\varepsilon^* = \sup\left\{\varepsilon > 0 : \varepsilon^{1-\beta} < \widetilde{C}(1-\beta)\int\limits_l^L \frac{ds}{R(s)}\right\}.$$

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия леммы* 5.2. *Тогда можно указать* $\delta \equiv \delta(\varepsilon^*, \alpha^\pm, \sigma^+, K)$ *такое, что*

(1) $\delta \to \infty$ *при* $\varepsilon^* \to \infty$,

(2) *любое решение задачи* (2.1), *удовлетворяющее условиям*

$$\int\limits_l^L dr \int\limits_{\omega(r)} \Big(\sum_i |u|^{\alpha_i(x)}|D_i u|^2 + |u|^{\sigma(x)}\Big)\, dx' \le \delta, \quad \|u\|_{\infty,\Omega} \le K,$$

локализовано по переменной x_1*:* $u(x) \equiv 0$ *для п. в.* $x \in \{x \in \Omega : x_1 > T\}$ *с некоторым* $T \in (l, L)$.

Доказательство. Непосредственным подсчетом проверяется, что $\beta < 1$ при любом $1 < \gamma < 2$. Проинтегрируем неравенство (5.1) в интервале (l, t):

$$\Theta^{1-\beta}(t) \le \Theta^{1-\beta}(l) - \widetilde{C}(1-\beta)\int\limits_l^t \frac{ds}{R(s)}. \tag{5.2}$$

В силу ограниченности решения $\Theta(t) \le (K^{\alpha^+-\alpha^-} + K^{\sigma^+-1})\delta$ и при всех $t \ge l$

$$[\delta(K^{\alpha^+-\alpha^-} + K^{\sigma^+-1})]^{1-\beta} \ge \widetilde{C}(1-\beta)\int\limits_l^t \frac{ds}{R(s)}.$$

Выберем $\delta = \varepsilon^*(K^{\alpha^+-\alpha^-} + K^{\sigma^+-1})^{-1}$. Тогда существует $T \in (l, L)$ такое, что $\Theta(T) = 0$, и в силу монотонности $\Theta(t)$ будет $u(x) = 0$ для п. в. $x \in \Omega \cap \{x_1 > T\}$. $\square$

Замечание 5.3. Решение задачи (2.1) локализовано по переменной x_1 всегда, если

$$\int\limits_l^L \frac{ds}{R(s)} = \infty.$$

6. Задачи в неограниченных областях

Рассмотрим задачу (2.1) в случае, когда область Ω неограниченна. Предположим, что $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ односвязна и выполнены условия (4.1) с $L = \infty$:

$$\begin{gathered}\text{при любом } t \in (0, L) \text{ сечение } \omega(t) = \Omega \cap \{x_1 = t\} \text{ —}\\ \text{односвязная область в } \mathbb{R}^{n-1} \text{ с липшицевой границей } \partial\omega(t),\\ \forall t \in (0, L) \quad \kappa\lambda(t) \le \operatorname{diam}\omega(t) \le \lambda(t), \quad \lambda(0) \ge 0, \quad \lim_{t\to\infty}\lambda(t) \ge 0,\\ \kappa \in (0, 1),\ \lambda(t) \text{ — заданная непрерывная функция.}\end{gathered} \tag{6.1}$$

Предположим, что

$$f(x) = 0 \quad \text{для п. в. } x \in \Omega \cap \{x_1 > l\}. \tag{6.2}$$

Все рассмотренные выше уравнения допускают анизотропную нелинейность по переменным x_i. Различие между уравнениями, рассмотренными в § 3, 4 и 5, состоит в том, что при выводе дифференциального неравенства для энергетической функции мы либо используем существенную анизотропность главной части уравнения и пренебрегаем младшим членом:

$$\alpha_1^- > \max_{i\neq 1} \alpha_i^+ \quad \text{и в условии (2.2) } c_0 \geq 0, \tag{6.3}$$

либо опираемся на наличие младшего члена, ослабляя условия на характер нелинейности уравнения:

$$\alpha_1^- \geq \max_{i\neq 1} \alpha_i^+ \quad \text{и в условии (2.2) } c_0 > 0.$$

Положим

$$\varepsilon^* = \begin{cases} \sup\Big\{\varepsilon > 0 : \varepsilon^\sigma < \sigma \int\limits_l^\infty \frac{ds}{\phi(s)}\Big\} & \text{при } n \geq 3, \\ \sup\Big\{\varepsilon > 0 : \varepsilon^{\frac{2q^+-1}{2q^++1}} < \frac{2q^+-1}{2q^++1} \int\limits_l^\infty \frac{ds}{z(s)}\Big\} & \text{при } n = 2 \end{cases}$$

с функциями $\phi(s)$, $z(s)$ и постоянными $\sigma \in (0,1)$, $q^+ > 1/2$, определенными в теоремах 4.1, 3.2.

Теорема 6.1. *Пусть $n \geq 3$ ($n = 2$), выполнены условия (2.2) и (2.3), функция $f(x)$ удовлетворяет условиям (6.2) и (2.5), а $\alpha_i(x)$ удовлетворяют условию (4.3) при $n \geq 3$ ((3.11) при $n = 2$). Тогда можно указать $\delta \equiv \delta(\varepsilon^*)$ такое, что*

(1) $\delta \to \infty$ при $\varepsilon^* \to \infty$,

(2) задача (2.1) разрешима при любой $\|f\|_{s,\Omega} \leq \delta$, где $s = p > n/2$, если $\alpha_i(x) \geq 0$, и $s = \infty$, если $\alpha_i(x) > -1$, и $c_0 > 0$,

(3) существует решение задачи (2.1), локализованное по переменной x_1: $u(x) = 0$ для п. в. $x \in \Omega \cap \{x_1 > T\}$ с некоторым $T \in (l, \infty)$.

Доказательство. Обозначим

$$\Omega^{(k)} = \Omega \cap \{t < k\}, \quad k \in \mathbb{N},$$

и рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{gathered} \sum_i D_i(a_i(x,u)|u|^{\alpha_i(x)} D_i u) + c(x,u)|u|^{\sigma(x)-2} u = f(x) \quad \text{в } \Omega^{(k)}, \\ u = 0 \quad \text{на } \partial\Omega^{(k)}, \quad k = 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{6.4}$$

По теореме 2.1 при каждом конечном k задача (6.4) имеет обобщенное решение $u_k(x)$ в смысле определения 1, для которого выполнены равномерные по k оценки (2.7). Это позволяет выделить из последовательности $\{u_k\}$ подпоследовательность (не ограничивая общности, считаем ее совпадающей со всей последовательностью) такую, что при любом фиксированном $m \in \mathbb{N}$

$$u_k \to u \quad \text{п. в. в } \Omega^{(m)}, \ k \geq m,$$

$$u_k \to u \quad \text{слабо в } L^{\sigma(x)}(\Omega^{(m)}) \text{ с произвольным } m,$$

$$|u_k|^{\alpha_i(x)/2} D_i u_k \to |u|^{\alpha_i(x)/2} D_i u \quad \text{слабо в } L^2(\Omega^{(m)}), \ i = 1, \ldots, n.$$

Более того, условие (6.2) означает, что для всех k начиная с некоторого k_0 решения вспомогательной задачи обладают свойством локализации по переменной x_1: $u_k(x) = 0$ для п. в. $x \in \Omega \cap \{x_1 > l\}$ с некоторым конечным l, не зависящим от k. Это позволяет перейти к пределу при $k \to \infty$ в интегральном тождестве (2.4) для $u_k(x)$ при любой пробной функции $\eta \in W_0^{1,2}(\Omega \cap L^{\sigma(x)}(\Omega))$. $\square$

Замечание 6.1. Если либо $\alpha_i(x) \geq 0$, либо $\alpha_i(x) > -1$ и $c_0 > 0$ и

$$\int_l^\infty \frac{ds}{\phi(s)} = \infty \ (n \geq 3) \quad \text{или} \quad \int_l^\infty \frac{ds}{z(s)} = \infty \ (n = 2),$$

то задача (2.1) разрешима в неограниченной области Ω при любой правой части f, удовлетворяющей условиям (2.5) (6.2).

Пример 1. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

$$-(2|u|u_{x_1})_{x_1} - u_{x_2x_2} = f(x_1, x_2)$$

в области

$$\Omega = \bigl\{(x_1, x_2) : x_1 > 0,\ x_2 \in \bigl(-1 - x_1^\mu, 1 + x_1^\mu\bigr)\bigr\}, \quad \mu = \mathrm{const} > 0.$$

При $\mu \leq 1$ такая задача разрешима при любой функции $f(x) \in L^p(\Omega)$, $p > 1$, удовлетворяющей условию (6.2). При $\mu > 1$ задача имеет локализованное по x_1 решение, если $\|f\|_{p,\Omega}$ достаточно мала. Пусть

$$\Omega = \{x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in (0,1)\}, \quad f(x) = \begin{cases} \varepsilon > 0 & \text{при } x_1 \in (0,1), \\ 0 & \text{при } x_1 \geq 1. \end{cases}$$

В этом случае решение локализовано в области $\Omega \cap \{x_1 > 1 + K\varepsilon^{1/5}\}$ с известной постоянной K.

Аналогичное утверждение справедливо, если условие существенной анизотропности (6.3) не выполнено. Обозначим

$$\varepsilon^* = \sup\left\{\varepsilon > 0 : \varepsilon^{1-\beta} < \widetilde{C}(1-\beta) \int_l^\infty \frac{ds}{\rho(s)}\right\}$$

с функцией $\rho(s)$ и постоянными β, $\widetilde{C}$, определенными в условиях теоремы 5.1.

Теорема 6.2. *Пусть выполнены условия* (2.3) *и* (2.2) *с* $c_0 > 0$, *функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям* (2.5) *и* (6.2), *а показатели* $\alpha_i(x)$ *и* $\sigma(x)$ *таковы, что*

$$\frac{2\sigma^+}{\alpha^+ + 2} \in (1,2).$$

Тогда можно указать $\delta \equiv \delta(\varepsilon^*)$ *такое, что*

(1) $\delta \to \infty$ *при* $\varepsilon^* \to \infty$,

(2) *задача* (2.1) *разрешима при любой* $\|f\|_{s,\Omega} \leq \delta$, *где* $s = p > n/2$, *если* $\alpha_i(x) \geq 0$, *и* $s = \infty$, *если* $\alpha_i(x) > -1$,

(3) *решение задачи* (2.1) *локализовано по переменной* x_1: $u(x) = 0$ *для п. в.* $x \in \Omega \cap \{x_1 > T\}$ *с некоторым* $T \in (l, \infty)$.

Пример 2. Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения

$$-\Delta u + |u|^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin x_1} u = f(x_1, x_2)$$

в области

$$\Omega = \{(x_1, x_2) : x_1 > 0,\ x_2 \in (-1 - x_1^\nu,\ 1 + x_1^\nu)\}, \quad \nu = \mathrm{const} > 0.$$

Для этого уравнения $\rho(t) \sim (1+x_1^\nu)^{14/557}$, поэтому задача разрешима при любой правой части f, если $\nu \le 39\frac{11}{14}$. При $\nu > 39\frac{11}{14}$ локализованное по x_1 решение существует, если $\|f\|_{\infty,\Omega}$ достаточно мала.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородной жидкости. Новосибирск: Наука, 1983.
2. *de Marsily G.* Quantitative hydrogeology. Groundwater hydrology for engineers. London: Acad. Press, 1986.
3. *Růžička M.* Electrorheological fluids: modeling and mathematical theory. Berlin: Springer-Verl., 2000. (Lecture Notes in Math.; V. 1748).
4. *Antontsev S. N.* Quasilinear parabolic equations with non-isotropic nonlinearities: space and time localization // Energy methods in continuum mechanics (Oviedo, 1994). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1996. P. 1–12.
5. *Antontsev S. N., Díaz J. I., Shmarev S.* Energy methods for free boundary problems: Applications to Non-linear PDEs and Fluid Mechanics. Boston: Bikhäuser, 2002. (Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications; V. 48).
6. *Иванов А. В.* Вырождающиеся и неравномерно эллиптические и параболические уравнения второго порядка // Тр. Мат. ин-та. им. В. А. Стеклова, 1982. Т. 160.
7. *Ivanov A. V.* Existence and uniqueness of a regular solution of the Cauchy–Dirichlet problem for doubly nonlinear parabolic equations // Z. Anal. Anwendungen. 1995. V. 14. P. 751–777.
8. *Калашников А. С.* Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Успехи мат. наук. 1987. Т. 42, № 2. С. 135–176.
9. *Lions J.-L.* Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires. Paris: Dunod, 1969.
10. *Tsutsumi M.* On solutions of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations with absorption // J. Math. Anal. Appl. 1988. V. 132. P. 187–212.
11. *Antontsev S. N., Shmarev S. I.* A model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity: existence, uniqueness and localization properties of solutions // Nonlinear Analysis: Theory and Methods. 2005. V. 60. P. 515–545.
12. *Antontsev S. N., Shmarev S. I.* Существование и единственность решений вырождающихся параболических уравнений с переменными показателями нелинейности // Тр. семинара им. И. Г. Петровского (В печати).
13. *Калашников А. С.* О нелинейных эффектах в распространении тепла в средах с источниками или стоками, близкими к линейным // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31, № 2. С. 277–288.
14. *Калашников А. С.* О некоторых задачах нелинейной теории теплопроводности с данными, содержащими малый параметр в показателях // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1995. Т. 35, № 7. С. 1077–1094.
15. *Калашников А. С.* О некоторых задачах математической физики с показателями, близкими к критическим // Тр. семинара им И. Г. Петровского. 1996. Т. 19. С. 73–98.
16. *Vázquez J. L.* A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations // Appl. Math. Optim. 1984. V. 12. P. 191–202.
17. *Pucci P., Serrin J.* The strong maximum principle revisited // J. Differential Equations. 2004. V. 196. P. 1–66.
18. *Kováčik O., Rákosník J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ // Czechoslovak Math. J. 1991. V. 41. P. 592–618.
19. *Musielak J.* Orlicz spaces and modular spaces. Berlin: Springer-Verl., 1983. (Lecture Notes in Math.; V. 1034).
20. *Fan X., Zhao D.* Local $C^{1,0}$ regularity of weak solutions for $p(x)$-Laplacian equations // J. Gansu Education College. 2001. V. 15, N 2. P. 1–5.

21. *Samko S. G.* Differentiation and integration of variable order and the spaces $L^{p(x)}$ // Operator theory for complex and hypercomplex analysis (Mexico City, 1994). Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998. P. 203–219. (Contemp. Math., Amer. Math. Soc.; V. 212).

22. *Самко С. Г.* Плотность $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в обобщенных пространствах Соболева $W^{m,p(x)}(\mathbb{R}^n)$ // Докл. РАН. 1999. Т. 369, № 4. С. 451–454.

23. *Жиков В. В.* О плотности гладких функций в пространствах Соболева — Орлича // Зап. научн. семинаров ПОМИ. 2004. Т. 310. С. 1–14.

24. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.

Статья поступила 5 апреля 2005 г.

Антонцев Станислав Николаевич
Departamento de Matemática, Universidade da Beira Interior, Portugal
anton@ubi.pt

Шмарев Сергей Иванович
Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo, España
shmarev@orion.ciencias.uniovi.es