Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2005. Том 46, № 5

УДК 517.958

ОЦЕНКА УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДАННЫМИ КОШИ НА ВРЕМЕНИПОДОБНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. Г. Романов

Аннотация: В области, ограниченной в пространстве переменных x, t сверху и снизу некоторыми гладкими поверхностями, а сбоку цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси t, рассматривается линейное волновое уравнение. Для этого уравнения изучается задача Коши с данными на куске времениподобной цилиндрической поверхности. Установлена оценка устойчивости решения задачи.

Ключевые слова: задача Коши, устойчивость, единственность.

§ 1. Постановка задачи, формулировка основных результатов

Вопросы единственности и устойчивости решения задачи Коши с данными на некоторой времениподобной поверхности S рассматривались ранее в работах [1–10]. Изучение этой задачи было основано на использовании техники карлемановских оценок, которая позволяет получить оценки решения только в области, содержащейся строго внутри некоторой характеристической поверхности, опирающейся на S. При приближении к границе характеристической поверхности карлемановские оценки вырождаются. Это не позволяет использовать их при исследовании многих интересных прикладных обратных задач для гиперболических уравнений. Для успешного анализа последних необходимы оценки решения вплоть до характеристической поверхности. Некоторый прогресс в построении таких оценок сделан в работах [11–14] при рассмотрении конкретных обратных задач для дифференциальных уравнений. Настоящая статья, по существу, обобщает частные результаты этих работ в плане построения подобных оценок.

Рассмотрим уравнение

$$\Box u \equiv c^{-2}(x)u_{tt} - \Delta u = F(x,t), \tag{1.1}$$

в котором $u = u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $t \in \mathbb{R}$. Пусть Ω — компактная область в $\mathbb{R}^n$ с $\mathbf{C}^1$-гладкой границей $\partial\Omega$ и $G = \{(x,t) \mid x \in \Omega, z_1(x) < t < z_2(x)\}$ — цилиндрическая область, ограниченная сверху и снизу $\mathbf{C}^2$-гладкими характеристическими

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00171) и программы Минобразования «Университеты России» (код проекта УР 04.01.200).

поверхностями $t = z_2(x)$ и $t = z_1(x)$ соответственно. Пусть на боковой поверхности $S = \{(x,t) \mid x \in \partial\Omega, z_1(x) < t < z_2(x)\}$ этой области заданы функция $u(x,t)$ и ее нормальная производная:

$$u|_S = f(x,t), \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\Big|_S = g(x,t). \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$. Задача заключается в построении оценки решения задачи (1.1), (1.2) в области G вплоть до характеристических поверхностей $t = z_1(x)$ и $t = z_2(x)$.

Заметим, что характеристические поверхности $t = z_1(x)$ и $t = z_2(x)$ удовлетворяют уравнению эйконала:

$$|\nabla z_k|^2 = c^{-2}(x), \quad k = 1, 2. \tag{1.3}$$

Предположим, что область Ω содержится в шаре $B(x^0, r)$ радиуса r с центром в точке x^0 и функция $c(x)$ является $\mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$-гладкой и ограниченной сверху и снизу положительными постоянными: $0 < c_0 \le c(x) \le c_{00} < \infty$. Кроме того, дополнительно предположим, что

$$0 < T = \inf_{x\in\Omega}(z_2(x) - z_1(x)), \quad \sup_{x\in\Omega}(z_2(x) - z_1(x)) \le T_1 < \infty.$$

Введем обозначение $\chi = 4r/(Tc_0)$. Достаточно очевидно, что в силу уравнений (1.3) для параметра T_1 справедлива оценка

$$T_1 \le T + 2r \sup_{x\in\Omega} |\nabla(z_2(x) - z_1(x))| \le T + 4rc_0^{-1} = T(1 + \chi).$$

Теорема 1. *Пусть $\chi < 1$ и выполнены неравенства*

$$\begin{gathered} \sup_{x\in\Omega}[(x - x^0)\cdot\nabla \ln c^2(x)] \le \frac{1-\chi}{4}, \\ \sup_{x\in\Omega} \Delta z_1(x) \ge -\frac{T(1-\chi)}{8r^2}, \quad \sup_{x\in\Omega} \Delta z_2(x) \le \frac{T(1-\chi)}{8r^2}. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Тогда для функции $u(x,t)$, являющейся решением задачи (1.1), (1.2) и принадлежащей пространствам $\mathbf{H}^1(G)$ и $\mathbf{H}^1(\Sigma_1 \cup \Sigma_2)$, существует такая положительная постоянная $C = C(r, T, c_0, c_{00}, n)$, что имеет место оценка

$$\|u\|^2_{\mathbf{H}^1(G)} + \|u\|^2_{\mathbf{H}^1(\Sigma_1 \bigcup \Sigma_2)} \le C\big(\|F\|^2_{\mathbf{L}^2(G)} + \|f\|^2_{\mathbf{H}^1(S)} + \|g\|^2_{\mathbf{L}^2(S)}\big), \tag{1.5}$$

в которой

$$\Sigma_1 = \{(x,t) \mid x \in \Omega, t = z_1(x)\}, \quad \Sigma_2 = \{(x,t) \mid x \in \Omega, t = z_2(x)\}.$$

Из этой теоремы следует единственность продолжения решения уравнения (1.1) с поверхности S в замыкание области G.

Замечание 1. Если функции $z_1(x)$, $z_2(x)$ удовлетворяют условию $z_1(x) + z_2(x) = \mathrm{const}$, то теорема 1 верна при замене условия теоремы $\chi < 1$ менее ограничительным условием $\chi < 2$ и множителя $1 - \chi$ в неравенствах (1.4) множителем $2 - \chi$.

Справедливость этого замечания следует из замечания 3, сделанного в § 2 после формулы (2.24).

Замечание 2. Из доказательства теоремы 1 следует, что для решения задачи (1.1) фактически имеет место несколько более сильная оценка, чем (1.5).

А именно, существуют положительные постоянные $C' = C'(r, T, c_0, c_{00}, n)$ и $C'' = C''(\chi, c_0, c_{00}, n)$ такие, что выполняется неравенство

$$T(1-\chi)^3 \int\limits_\Omega (|\nabla u'|^2 + |\nabla u''|^2 + r^{-2}(|u'|^2 + |u''|^2))\,dx$$
$$+ (1-\chi)^2 \int\limits_G \left(u_t^2 c^{-2} + |\nabla u|^2 + u^2 r^{-2}\right) dxdt$$
$$\le C' \int\limits_S \left(g^2 + |\nabla^\perp f|^2 + f_t^2 + f^2\right) dSdt + r^2 C'' \int\limits_G F^2(x,t)\,dxdt, \quad (1.6)$$

в котором $u'(x) = u(x, z_1(x))$, $u''(x) = u(x, z_2(x))$, а символ $\nabla^\perp$ означает проекцию градиента на касательную плоскость к поверхности S. Преимущества этой оценки проявляются для областей Ω с малым диаметром. Если зафиксировать параметр χ, то из оценки (1.6) моментально следует справедливость ее также для более общих дифференциальных операторов, содержащих кроме главной части, определяемой уравнением (1.1), линейный дифференциальный оператор первого порядка с ограниченными в Ω коэффициентами.

При рассмотрении вопросов устойчивости решения обратных задач об определении коэффициента $c(x)$ полезно преобразование, отображающее характеристическую поверхность $t = z_1(x)$, $x \in \Omega$, в кусок плоскости $t = 0$. В связи с этим введем функцию $v(x,t) = u(x, t + z_1(x))$. Нетрудно проверить, что эта функция в области $G' = \{(x,t) \mid x \in \Omega,\ 0 < t < z_2(x) - z_1(x)\}$ удовлетворяет уравнению

$$2\nabla v_t \cdot \nabla z_1 - \Delta v + v_t \Delta z_1 = F'(x,t) \quad (1.7)$$

и условиям Коши

$$v|_{S'} = f'(x,t), \quad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}\Big|_{S'} = g'(x,t) \quad (1.8)$$

на боковой границе $S' = \{(x,t) \mid x \in \partial\Omega,\ 0 < t < z_2(x) - z_1(x)\}$. Здесь

$$F'(x,t) = F(x, t + z_1(x)), \quad f'(x,t) = f(x, t + z_1(x)),$$
$$g'(x,t) = g(x, t + z_1(x)) + f_t(x, t + z_1(x))(\nabla z_1(x) \cdot \mathbf{n}).$$

Из теоремы 1 очевидным образом вытекает оценка устойчивости для решения задачи (1.7), (1.8), идентичная оценке (1.5).

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда для функции* $v(x,t)$, *являющейся решением задачи* (1.7), (1.8) *и принадлежащей пространствам* $\mathbf{H}^1(G')$ *и* $\mathbf{H}^1(\Sigma_1' \cup \Sigma_2')$, *существует такая положительная постоянная* $C = C(r, T, c_0, c_{00}, n)$, *что имеет место оценка*

$$\|v\|^2_{\mathbf{H}^1(G')} + \|v\|^2_{\mathbf{H}^1(\Sigma_1' \bigcup \Sigma_2')} \le C\left(\|F'\|^2_{\mathbf{L}^2(G')} + \|f'\|^2_{\mathbf{H}^1(S')} + \|g'\|^2_{\mathbf{L}^2(S')}\right), \quad (1.9)$$

в которой

$$\Sigma_1' = \{(x,t) \mid x \in \Omega,\ t = 0\}, \quad \Sigma_2' = \{(x,t) \mid x \in \Omega,\ t = z_2(x) - z_1(x)\}.$$

Аналогичные приведенным выше оценки устойчивости решения задачи Коши с данными на S могут быть достаточно просто получены и для случая более общих гиперболических уравнений, в частности, описывающих распространение волн в анизотропных средах.

§ 2. Доказательство теоремы 1

Пусть $lu \equiv A \cdot \nabla u + Bu_t + Cu$, где $A = (A_1, \dots, A_n)$. Тогда для гладких A, B, C имеет место равенство

$$2lu\Box u = \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot Q + R, \tag{2.1}$$

в котором

$$\begin{gathered} P = 2c^{-2}u_t[(\nabla u \cdot A) + Cu] + B\big(c^{-2}u_t^2 + |\nabla u|^2\big) - c^{-2}C_t u^2, \\ Q = A\big(|\nabla u|^2 - c^{-2}u_t^2\big) - 2[(\nabla u \cdot A) + Bu_t + Cu]\nabla u + u^2 \nabla C, \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} R = u_t^2 c^{-2}(\nabla \cdot A + A \cdot \nabla \ln c^{-2} - B_t - 2C) + \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i} u_{x_j} [2(A_i)_{x_j} - (\nabla \cdot A + B_t - 2C)\delta_{ij}] \\ + 2u_t[(\nabla B \cdot \nabla u) - c^{-2}(A_t \cdot \nabla u)] + u^2 \Box(C). \end{aligned}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{aligned} 2lu\Box u &\le \varepsilon(lu)^2 + \varepsilon^{-1}(\Box u)^2 \\ &\le \varepsilon(|A|^2 + c^2B^2 + r^2C^2)\big(|\nabla u|^2 + c^{-2}u_t^2 + r^{-2}u^2\big) + \varepsilon^{-1}F^2(x,t). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Из (2.3) получаем

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \cdot Q + R \le \varepsilon(|A|^2 + c^2B^2 + r^2C^2)\big(|\nabla u|^2 + c^{-2}u_t^2 + r^{-2}u^2\big) + \varepsilon^{-1}F^2(x,t). \tag{2.4}$$

Интегрируя (2.4) по области G, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Sigma_1} [-P + Q \cdot \nabla z_1(x)]\,dx + \int\limits_{\Sigma_2} [P - Q \cdot \nabla z_2(x)]\,dx + \int\limits_{S} (Q \cdot \mathbf{n})\,dSdt \\ + \int\limits_{G} R_1\,dxdt \le \varepsilon^{-1} \int\limits_{G} F^2(x,t)\,dxdt, \end{aligned} \tag{2.5}$$

в котором dS — элемент площади $\partial\Omega$,

$$R_1 = R - \varepsilon(|A|^2 + c^2B^2 + r^2C^2)\big(|\nabla u|^2 + c^{-2}u_t^2 + r^{-2}u^2\big).$$

Положим в операторе l и равенствах (2.1)

$$A = x - x^0, \quad B = \frac{p}{2}\Big(t - \frac{z_1 + z_2}{2}\Big), \quad C = \frac{n-1}{2}, \quad p = \frac{1+\chi}{2} \tag{2.6}$$

и оценим отдельно каждый интеграл, стоящий в левой части неравенства (2.5).

При вычислении подынтегрального выражения в первом интеграле обозначим $u'(x) = u(x, z_1(x))$ и воспользуемся вытекающим отсюда равенством

$$(\nabla u + u_t \nabla z_1)_{\Sigma_1} = \nabla u'.$$

Для $(x,t) \in \Sigma_1$ имеем

$$\begin{aligned} -P + Q \cdot \nabla z_1 &= |\nabla u|^2[(A \cdot \nabla z_1) - B] - u_t^2 c^{-2}[(A \cdot \nabla z_1) + B] \\ &\quad - 2(\nabla u \cdot A + Bu_t + Cu)(\nabla u \cdot \nabla z_1) - 2c^{-2}u_t[(\nabla u \cdot A) + Cu] \\ &= \big[|\nabla u'|^2 - 2u_t(\nabla u' \cdot \nabla z_1) + u_t^2 c^{-2}\big][(A \cdot \nabla z_1) - B] \end{aligned}$$

$$-u_t^2c^{-2}[(A\cdot\nabla z_1)+B]-2[(\nabla u'\cdot A)+(B-(A\cdot\nabla z_1))u_t+Cu][(\nabla u'\cdot\nabla z_1)-u_tc^{-2}]$$
$$-2c^{-2}u_t[(\nabla u'\cdot A)-(A\cdot\nabla z_1)u_t+Cu]$$
$$=|\nabla u'|^2[(A\cdot\nabla z_1)-B]-2[(\nabla u'\cdot A)+Cu'](\nabla u'\cdot\nabla z_1). \quad (2.7)$$

Используем представления

$$\nabla u'=c^2(\nabla u'\cdot\nabla z_1)\nabla z_1+\nabla^\perp u', \quad A=c^2(A\cdot\nabla z_1)\nabla z_1+A^\perp. \quad (2.8)$$

Непосредственные вычисления приводят к равенствам

$$(-P+Q\cdot\nabla z_1)_{\Sigma_1}=[c^2(\nabla u'\cdot\nabla z_1)^2+|\nabla^\perp u'|^2][(A\cdot\nabla z_1)-B]$$
$$-2[c^2(\nabla u'\cdot\nabla z_1)(A\cdot\nabla z_1)+(\nabla^\perp u'\cdot A^\perp)+Cu'](\nabla u'\cdot\nabla z_1)$$
$$=-c^2(\nabla u'\cdot\nabla z_1)^2[(A\cdot\nabla z_1)+B]+|\nabla^\perp u'|^2[(A\cdot\nabla z_1)-B]$$
$$-2(\nabla^\perp u'\cdot A^\perp)(\nabla u'\cdot\nabla z_1)-\nabla\cdot[(u')^2C\nabla z_1]+(u')^2C\Delta z_1. \quad (2.9)$$

Покажем, что первые три слагаемых последнего равенства допускают следующую оценку:

$$-c^2(\nabla u'\cdot\nabla z_1)^2[(A\cdot\nabla z_1)+B]+|\nabla^\perp u'|^2[(A\cdot\nabla z_1)-B]$$
$$-2(\nabla^\perp u'\cdot A^\perp)(\nabla u'\cdot\nabla z_1)\geq-[B+\sup_{x\in\Omega}(|A|c^{-1})]|\nabla u'|^2. \quad (2.10)$$

Действительно, в частном случае, когда $A^\perp=0$, эта оценка очевидна, так как справедливо неравенство

$$-|A\cdot\nabla z_1|\geq-\sup_{x\in\Omega}(|A|c^{-1}).$$

Покажем, что она верна и в общем случае. Положим

$$\lambda=-(A\cdot\nabla z_1)+\sup_{x\in\Omega}(|A|c^{-1}).$$

Очевидно, что $\lambda\geq 0$ для всех $x\in\Omega$, причем $\lambda=0$ только в тех точках $x\in\Omega$, для которых выполняются следующие равенства:

$$A=|A|c\nabla z_1, \quad |A|c^{-1}=\sup_{x\in\Omega}(|A|c^{-1}).$$

При выполнении первого из этих равенств необходимо следует, что $A^\perp=0$. В этом случае оценка (2.10) выполнена. В точках $x\in\Omega$, для которых $\lambda>0$, справедливо неравенство

$$-c^2(\nabla u'\cdot\nabla z_1)^2[(A\cdot\nabla z_1)+B]+|\nabla^\perp u'|^2[(A\cdot\nabla z_1)-B]-2(\nabla^\perp u'\cdot A^\perp)(\nabla u'\cdot\nabla z_1)$$
$$\geq-c^2(\nabla u'\cdot\nabla z_1)^2[(A\cdot\nabla z_1)+B+\lambda]-|\nabla^\perp u'|^2[B-(A\cdot\nabla z_1)+|A^\perp|^2c^{-2}\lambda^{-1}].$$

Так как

$$(A\cdot\nabla z_1)-|A^\perp|^2c^{-2}\lambda^{-1}=\frac{(A\cdot\nabla z_1)\sup_{x\in\Omega}(|A|c^{-1})-(A\cdot\nabla z_1)^2-|A^\perp|^2c^{-2}}{\sup_{x\in\Omega}(|A|c^{-1})-(A\cdot\nabla z_1)}$$
$$=\frac{(A\cdot\nabla z_1)\sup_{x\in\Omega}(|A|c^{-1})-|A|^2c^{-2}}{\sup_{x\in\Omega}(|A|c^{-1})-(A\cdot\nabla z_1)}\geq-\sup_{x\in\Omega}(|A|c^{-1}),$$

из выполнения этого неравенства следует оценка (2.10). Из равенства (2.9) и полученной оценки вытекает, что

$$(-P+Q\cdot\nabla z_1)_{\Sigma_1} \geq -[B+\sup_{x\in\Omega}(|A|c^{-1})]|\nabla u'|^2-\nabla\cdot[(u')^2C\nabla z_1]+(u')^2C\Delta z_1. \quad (2.11)$$

Принимая во внимание, что на Σ_1 выполнены соотношения

$$-B=\frac{p}{4}(z_2(x)-z_1(x))\geq\frac{pT}{4}, \quad \sup_{x\in\Omega}(|A|c^{-1})\leq\frac{r}{c_0},$$

$$-B-\sup_{x\in\Omega}(|A|c^{-1})\geq\frac{pT}{4}-\frac{r}{c_0}=\frac{T}{4}(p-\chi)=\frac{T}{8}(1-\chi),$$

приходим к следующей оценке:

$$(-P+Q\cdot\nabla z_1)_{\Sigma_1}\geq\frac{T}{8}(1-\chi)|\nabla u'|^2-\nabla\cdot[(u')^2C\nabla z_1]+(u')^2C\Delta z_1. \quad (2.12)$$

Интегрируя это неравенство по Σ_1 и применяя формулу Гаусса — Остроградского, находим, что

$$\int\limits_{\Sigma_1}(-P+Q\cdot\nabla z_1)\,dx\geq\int\limits_{\Omega}\left[\frac{T}{8}(1-\chi)|\nabla u'|^2+\frac{n-1}{2}(u')^2\Delta z_1\right]dx$$
$$-\frac{n-1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}(u')^2(\nabla z_1\cdot\mathbf{n})dS. \quad (2.13)$$

Так как имеет место очевидное неравенство $|\nabla z_1\cdot\mathbf{n}|\leq c^{-1}(x)$, последний интеграл в этой формуле допускает оценку

$$\frac{n-1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}(u')^2(\nabla z_1\cdot\mathbf{n})\,dS\leq\frac{n-1}{2c_0}\int\limits_{\partial\Omega}(u')^2\,dS. \quad (2.14)$$

Преобразуем первый из интегралов в правой части неравенства (2.13), представив его в виде

$$\int\limits_{\Omega}\left[\frac{T(1-\chi)}{8}|\nabla u'|^2+\frac{n-1}{2}(u')^2\Delta z_1\right]dx$$
$$=\frac{T(1-\chi)(n-1)}{16n}\int\limits_{\Omega}(|\nabla u'|^2+r^{-2}|u'|^2)\,dx$$
$$+\int\limits_{\Omega}\left\{|\nabla u'|^2\frac{T(1-\chi)(n+1)}{16n}-|u'|^2r^{-2}(n-1)\left[\frac{T(1-\chi)}{16n}-\frac{1}{2}r^2\Delta z_1\right]\right\}dx\equiv J_1+J_2.$$

Оценим второй из интегралов правой части этого неравенства. Воспользуемся для этого неравенством

$$(n-1)\int\limits_{\Omega}(u')^2\,dx\leq r^2\int\limits_{\Omega}|\nabla u'|^2\,dx+r\int\limits_{\partial\Omega}(u')^2\,dS,$$

вытекающим из соотношений

$$\nabla\cdot[(x-x^0)(u')^2]=n(u')^2+2u'(x-x^0)\cdot\nabla u'\geq(n-1)(u')^2-r^2|\nabla u'|^2, \quad x\in\Omega.$$

Следовательно, если $\Delta z_1 \le 0$, то

$$J_2 \ge \int\limits_{\Omega} |\nabla u'|^2 \left\{ \frac{T(1-\chi)}{16} + \frac{1}{2} r^2 \Delta z_1 \right\} dx - \int\limits_{\partial\Omega} \left[\frac{T(1-\chi)}{16nr} - \frac{1}{2} r \Delta z_1 \right] (u')^2 \, dS$$

и при выполнении условия (1.4) теоремы на функцию $z_1(x)$ первый интеграл справа неотрицателен. Тогда

$$J_2 \ge -\frac{T(1-\chi)}{8nr} \int\limits_{\partial\Omega} (u')^2 \, dS.$$

Если же $\Delta z_1 \ge 0$, то это неравенство тем более выполнено. Из полученных соотношений следует оценка

$$\int\limits_{\Sigma_1} (-P + Q \cdot \nabla z_1) \, dx \ge \frac{T(1-\chi)}{32} \int\limits_{\Omega} (|\nabla u'|^2 + r^{-2} |u'|^2) \, dx - C_1 \int\limits_{\partial\Omega} (u')^2 \, dS, \quad (2.15)$$

в которой $C_1 = (n-1)/(2c_0) + T(1-\chi)/(8nr)$.

Оценим теперь значения подынтегральной функции в интеграле по Σ_2, используя аналогичные выкладки. Обозначим $u''(x) = u(x, z_2(x))$ и воспользуемся равенствами

$$(\nabla u + u_t \nabla z_2)_{\Sigma_2} = \nabla u'', \quad \nabla u'' = c^2 (\nabla u'' \cdot \nabla z_2) \nabla z_2 + \nabla^{\perp} u'',$$
$$A = c^2 (A \cdot \nabla z_2) \nabla z_2 + A^{\perp}.$$

Тогда для $(x,t) \in \Sigma_2$ получим формулу, аналогичную (2.9):

$$P - Q \cdot \nabla z_2 = c^2 (\nabla u'' \cdot \nabla z_2)^2 [B + (A \cdot \nabla z_2)] + |\nabla^{\perp} u''|^2 [B - (A \cdot \nabla z_2)]$$
$$+ 2(\nabla^{\perp} u'' \cdot A^{\perp})(\nabla u'' \cdot \nabla z_2) + \nabla \cdot [(u'')^2 C \nabla z_2] - (u'')^2 C \Delta z_2. \quad (2.16)$$

Как в предыдущем случае, покажем, что для первых трех слагаемых этого равенства справедлива оценка

$$c^2 (\nabla u'' \cdot \nabla z_2)^2 [B + (A \cdot \nabla z_2)] + |\nabla^{\perp} u''|^2 [B - (A \cdot \nabla z_2)]$$
$$+ 2(\nabla^{\perp} u'' \cdot A^{\perp})(\nabla u'' \cdot \nabla z_2) \ge [B - \sup_{x \in \Omega} (|A| c^{-1})] |\nabla u''|^2. \quad (2.17)$$

При любом $\mu > 0$ имеем

$$c^2 (\nabla u'' \cdot \nabla z_2)^2 [B + (A \cdot \nabla z_2)] + |\nabla^{\perp} u''|^2 [B - (A \cdot \nabla z_2)] + 2(\nabla^{\perp} u'' \cdot A^{\perp})(\nabla u'' \cdot \nabla z_2)$$
$$\ge c^2 (\nabla u'' \cdot \nabla z_2)^2 [B + (A \cdot \nabla z_2) - \mu] + |\nabla^{\perp} u''|^2 [B - (A \cdot \nabla z_2) - |A^{\perp}|^2 c^{-2} \mu^{-1}]. \quad (2.18)$$

Положим $\mu = (A \cdot \nabla z_2) + \sup\limits_{x \in \Omega} (|A| c^{-1}) \ge 0$. Равенство $\mu(x) = 0$ имеет место только для тех точек $x \in \Omega$, для которых выполняются следующие условия:

$$A = -|A| c \nabla z_2, \quad |A| c^{-1} = \sup_{x \in \Omega} (|A| c^{-1}).$$

В этом случае $A^{\perp} = 0$ и неравенство (2.17) очевидно. При $\mu > 0$ справедлива оценка

$$-(A \cdot \nabla z_2) - |A^{\perp}|^2 c^{-2} \mu^{-1} = -\frac{(A \cdot \nabla z_2) \sup\limits_{x \in \Omega} (|A| c^{-1}) + (A \cdot \nabla z_1)^2 + |A^{\perp}|^2 c^{-2}}{\sup\limits_{x \in \Omega} (|A| c^{-1}) + (A \cdot \nabla z_2)}$$
$$= -\frac{(A \cdot \nabla z_2) \sup\limits_{x \in \Omega} (|A| c^{-1}) + |A|^2 c^{-2}}{\sup\limits_{x \in \Omega} (|A| c^{-1}) + (A \cdot \nabla z_2)} \ge -\sup_{x \in \Omega} (|A| c^{-1}).$$

Поэтому из (2.18) следует оценка (2.17). Из равенства (2.16) и полученной оценки вытекает, что

$$(P - Q\cdot\nabla z_2)_{\Sigma_2} \ge [B - \sup_{x\in\Omega}(|A|c^{-1})]|\nabla u''|^2 + \nabla\cdot[(u'')^2 C\nabla z_2] - (u'')^2 C\Delta z_2. \quad (2.19)$$

На Σ_2 справедливы соотношения

$$B = \frac{p}{4}[z_2(x) - z_1(x)] \ge \frac{pT}{4},$$

поэтому из (2.19) получим, что

$$(P - Q\cdot\nabla z_2)_{\Sigma_2} \ge \frac{T}{8}(1-\chi)|\nabla u''|^2 + \nabla\cdot[(u'')^2 C\nabla z_2] - (u'')^2 C\Delta z_2. \quad (2.20)$$

Интегрируя это неравенство по Σ_2, приходим к неравенству

$$\int\limits_{\Sigma_2}(P - Q\cdot\nabla z_2)\,dx \ge \int\limits_{\Omega}\left[\frac{T}{8}(1-\chi)|\nabla u''|^2 - \frac{n-1}{2}(u'')^2\Delta z_2\right]dx + \frac{n-1}{2}\int\limits_{\partial\Omega}(u'')^2(\nabla z_2\cdot\mathbf{n})\,dS. \quad (2.21)$$

Используя выкладки, подобные выполненным при оценке интеграла по Σ_1, находим, что при условии (1.4) на функцию $z_2(x)$ имеет место оценка, полностью аналогичная оценке (2.15):

$$\int\limits_{\Sigma_2}(P - Q\cdot\nabla z_2)\,dx \ge \frac{T(1-\chi)}{32}\int\limits_{\Omega}(|\nabla u''|^2 + r^{-2}|u''|^2)\,dx - C_1\int\limits_{\partial\Omega}(u'')^2\,dS \quad (2.22)$$

с то же самой постоянной C_1.

Выражение для R имеет вид

$$R = u_t^2 c^{-2}(\nabla\cdot A + A\cdot\nabla\ln c^{-2} - B_t - 2C) + \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i}u_{x_j}[2(A_i)_{x_j} - (\nabla\cdot A + B_t - 2C)\delta_{ij}] + 2u_t[(\nabla B\cdot\nabla u) - c^{-2}(A_t\cdot\nabla u)]. \quad (2.23)$$

Так как

$$B_t = \frac{p}{2},\quad A_t = 0,\quad \nabla\cdot A = n,\quad (A_i)_{x_j} = \delta_{ij},\quad C = \frac{n-1}{2},$$

$$\nabla B = -\frac{p}{4}\nabla[z_1(x) + z_2(x)],\quad |\nabla B|^2 \le \frac{p^2}{8}[\nabla z_1|^2 + \nabla z_2|^2] = \frac{p^2}{4}c^{-2},$$

$$2u_t(\nabla B\cdot\nabla u) \ge -\frac{p}{2}u_t^2c^{-2} - \frac{2}{p}|\nabla u|^2|\nabla B|^2c^2 \ge -\frac{p}{2}\left[u_t^2c^{-2} + |\nabla u|^2\right]$$

и по условию теоремы $\sup\limits_{x\in\Omega}[(x-x^0)\cdot\nabla\ln c^2(x)] \le (1-\chi)/4$, то

$$R \ge u_t^2c^{-2}(1 - p - (x-x^0)\cdot\nabla\ln c^2) + |\nabla u|^2(1-p) \ge \frac{1-\chi}{4}\left(u_t^2c^{-2} + |\nabla u|^2\right). \quad (2.24)$$

Замечание 3. Если $z_1(x) + z_2(x)$=const, то $\nabla B = 0$ в формуле (2.23) и в связи с этим в оценке (2.24) можно всюду заменить p на $p/2$. Следствием этого является более слабое ограничение на p, а именно $p < 2$. Поэтому в формулах

(2.6) можно переопределить p, положив $p = (2+\chi)/2$, и принять, что $\chi < 2$. При этом $1-p/2 = (2-\chi)/4$, $p-\chi = (2-\chi)/2$ и в неравенствах (2.15), (2.22), (2.24), а также и во всех последующих выкладках этого параграфа роль множителя $1-\chi$ будет играть множитель $2-\chi$.

Для $(x,t) \in G$ имеет место оценка

$$|A|^2 + c^2B^2 + r^2C^2 \le r^2 + \left[\frac{c_{00}(1-\chi)T_1}{8}\right]^2 + \left[\frac{(n-1)r}{2}\right]^2$$
$$= r^2\left[1 + \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{c_{00}(1-\chi^2)}{2\chi c_0}\right)^2\right] = C_2.$$

Полагая $\varepsilon = \delta(1-\chi)/(4C_2)$, где $\delta \in (0,1)$, находим, что

$$\int\limits_G R_1\,dxdt \ge \int\limits_G \left\{\left[\frac{1-\chi}{4} - \varepsilon C_2\right](u_t^2c^{-2} + |\nabla u|^2) - \varepsilon C_2u^2r^{-2}\right\} dxdt$$
$$= \frac{1-\chi}{4}\int\limits_G \left[(1-\delta)\left(u_t^2c^{-2} + |\nabla u|^2\right) - \delta u^2r^{-2}\right)]\,dxdt = \frac{1-\chi}{4}J_3. \quad (2.25)$$

Преобразуем последний интеграл. Воспользуемся для этого неравенством

$$\nabla\cdot[(x-x^0)u^2] \ge (n-1)u^2 - r^2|\nabla u|^2, \quad (x,t) \in G.$$

Интегрируя его по области G, получаем, что

$$(n-1)\int\limits_G u^2\,dxdt \le r^2\int\limits_G |\nabla u|^2\,dxdt + r\int\limits_S u^2\,dSdt + rc_0^{-1}\int\limits_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} u^2\,dx. \quad (2.26)$$

Для любого $\alpha \in (0,1)$ имеет место соотношение

$$J_3 \ge (1-\delta)\alpha\int\limits_G \left(u_t^2c^{-2} + |\nabla u|^2 + \delta u^2r^{-2}\right) dxdt$$
$$+ \int\limits_G [(1-\delta)(1-\alpha)|\nabla u|^2 - \delta u^2r^{-2}((1-\delta)\alpha+1)]\,dxdt \equiv J_4 + J_5. \quad (2.27)$$

Из (2.26) следует оценка

$$J_5 \ge \left\{(1-\delta)(1-\alpha) - \frac{\delta[(1-\delta)\alpha+1]}{n-1}\right\}\int\limits_G |\nabla u|^2\,dxdt$$
$$- \frac{\delta[(1-\delta)\alpha+1]}{r(n-1)}\left\{\int\limits_S u^2\,dSdt + c_0^{-1}\int\limits_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} u^2\,dx\right\}. \quad (2.28)$$

Числовой множитель, стоящий перед первым интегралом, неотрицателен, если выполнено неравенство $\alpha \le \alpha^*(\delta,n)$, в котором функция $\alpha^*(\delta,n)$ определена формулой

$$\alpha^*(\delta,n) = 1 - \frac{\delta(1-2\delta)}{(1-\delta)(n-1-\delta)}.$$

Так как $n \le 2$, имеем $\alpha^*(\delta,n) \ge \alpha^*(\delta,2) = 2-1/(1-\delta)^2$. Положим $\alpha = \alpha^*(1/4,n)$ и примем, что $\delta \le 1/4$. Тогда $1 \ge \alpha \ge \alpha^*(1/4,2) = 2/9$ и

$$(1-\delta)\alpha \ge \frac{1}{6}, \quad \frac{\delta[(1-\delta)\alpha+1]}{(n-1)} < 2\delta.$$

Поэтому из неравенств (2.27), (2.28) следует, что

$$J_3 \geq \frac{1}{6}\int\limits_G \left(u_t^2 c^{-2} + |\nabla u|^2 + \delta u^2 r^{-2}\right) dxdt - \frac{2\delta}{r}\left\{\int\limits_S u^2\, dSdt + c_0^{-1}\int\limits_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} u^2\, dx\right\}. \quad (2.29)$$

Из (2.25) находим, что при любом $\delta \in (0, 1/4]$ имеет место оценка

$$\int\limits_G R_1\, dxdt \geq \frac{1-\chi}{24}\int\limits_G \left(u_t^2 c^{-2} + |\nabla u|^2 + \delta u^2 r^{-2}\right) dxdt - \frac{(1-\chi)\delta}{2r}\left\{\int\limits_S u^2\, dSdt + c_0^{-1}\int\limits_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} u^2\, dx\right\}. \quad (2.30)$$

Оценим интеграл по боковой поверхности области G. На S имеют место соотношения

$$|Q\cdot\mathbf{n}| \geq -|Q| \geq -\left[|\nabla u|^2(3|A| + |B| + C) + u_t^2(|A|c^{-2} + |B|) + u^2 C\right] \geq -C_3\left(|\nabla u|^2 + u_t^2 + u^2\right),$$

в которых $C_3 = \max\bigl(3r + T_1(1-\chi)/8 + (n-1)/2, rc_0^{-2} + T_1(1-\chi)/8, (n-1)/2\bigr)$. Поэтому

$$\int\limits_S (Q\cdot\mathbf{n})\, dSdt \geq -C_3\int\limits_S \left(|\nabla u|^2 + u_t^2 + u^2\right) dSdt. \quad (2.31)$$

Суммируя полученные оценки интегралов, стоящих в левой части неравенства (2.5), получаем итоговое неравенство в виде

$$\begin{aligned}
&\frac{T(1-\chi)}{32}\int\limits_\Omega (|\nabla u'|^2 + |\nabla u''|^2 + r^{-2}(|u'|^2 + |u''|^2))\, dx \\
&- \frac{(1-\chi)r\delta}{2c_0}\int\limits_\Omega r^{-2}(|u'|^2 + |u''|^2)\, dx + \frac{1-\chi}{24}\int\limits_G \left(u_t^2 c^{-2} + |\nabla u|^2 + \delta u^2 r^{-2}\right) dxdt \\
&\leq C_1\int\limits_{\partial\Omega} [(u')^2 + (u'')^2]\, dS + \frac{(1-\chi)\delta}{2r}\int\limits_S u^2\, dSdt \\
&+ C_3\int\limits_S \left(|\nabla u|^2 + u_t^2 + u^2\right) dSdt + \varepsilon^{-1}\int\limits_G F^2(x,t)\, dxdt, \quad (2.32)
\end{aligned}$$

в котором $\varepsilon = \delta(1-\chi)/(4C_2)$ и $0 < \delta \leq 1/4$. Положим в этом неравенстве $\delta = 1/4$. Тогда

$$\frac{T(1-\chi)}{32} - \frac{(1-\chi)r\delta}{2c_0} = \frac{T(1-\chi)}{32}(1 - 4\chi\delta) = \frac{T(1-\chi)^2}{32}.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{\partial\Omega} [(u')^2 + (u'')^2]\, dS = \int\limits_S \frac{\partial}{\partial t}\left[u^2\frac{2t - z_1(x) - z_2(x)}{z_2(x) - z_1(x)}\right] dSdt \leq \int\limits_S \left[u_t^2 + (1 + 2T^{-1})u^2\right] dSdt.$$

Поэтому неравенство (2.32) можно записать в виде

$$\frac{T(1-\chi)^2}{32}\int\limits_{\Omega}(|\nabla u'|^2+|\nabla u''|^2+r^{-2}(|u'|^2+|u''|^2))\,dx$$
$$+\frac{1-\chi}{24}\int\limits_{G}\left(u_t^2c^{-2}+|\nabla u|^2+\frac{1}{4}u^2r^{-2}\right)dxdt$$
$$\le C_4\int\limits_{S}\left(|\nabla u|^2+u_t^2+u^2\right)dSdt+C_5\int\limits_{G}F^2(x,t)\,dxdt, \quad (2.33)$$

где

$$C_4=C_3+C_1(1+2T^{-1})+\frac{1-\chi}{8r}, \quad C_5=\varepsilon^{-1}=\frac{16C_2}{1-\chi}.$$

Так как на S имеет место равенство

$$|\nabla u|^2+u_t^2+u^2=(\nabla u\cdot\mathbf{n})^2+|\nabla^{\perp}u|^2+u_t^2+u^2=g^2+|\nabla^{\perp}f|^2+f_t^2+f^2,$$

в котором символ $\nabla^{\perp}$ означает проекцию градиента на касательную плоскость к поверхности S, из неравенства (2.33) очевидным образом следует оценка (1.5).

ЛИТЕРАТУРА

1. *John F.* Continuous dependence on data for solutions of partial differential equations with a prescribed bound // Comm. Pure Appl. Math. 1960. N 4. P. 551–585.
2. *John F.* Differential equations with approximate and improper data. New York: Lectures, 1995.
3. *Шишатский С. П.* Априорные оценки в задаче о продолжении волнового поля с цилиндрической времениподобной поверхности // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213, № 1. С. 49–50.
4. *Лаврентьев М. М, Романов В. Г., Шишатский С. П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980.
5. *Hörmander L.* An uniqueness theorem for second order hyperbolic equations // Comm. Partial Differential Equations. 1991. V. 16. P. 789–800.
6. *Robiano L.* Theoreme d'unicite adapte au controle des solutions des problemes hyperboliques // Comm. Partial Differential Equations. 1992. V. 17. P. 699–714.
7. *Tataru D.* A-priori estimates of Carleman's type in domain with boundary // J. Math. Pure Appl. 1994. V. 73. P. 355–387.
8. *Tataru D.* Unique continuation for solutions to PDE's; between Hörmander's theorem and Holmgren's theorem // Comm. Partial Differential Equations. 1995. V. 20, N 5&6. P. 855–884.
9. *Isakov V. M.* Carleman type estimates in an anysotropic case and applications // J. Differential Equations. 1992. V. 8. P. 193–206.
10. *Isakov V. M.* Inverse Problems for Partial Differential Equations. Berlin: Springer-Verl., 1998.
11. *Романов В. Г.* Об оценке устойчивости решения обратной задачи для гиперболического уравнения // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 2. С. 436–449.
12. *Romanov V. G., Yamamoto M.* Multidimensional inverse hyperbolic problem with impulse input and single boundary measurement // J. Inv. Ill-Posed Problems. 1999. V. 7, N 6. P. 573–588.
13. *Романов В. Г.* Оценка устойчивости в обратной задаче определения скорости звука // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 6. С. 1323–1338.
14. *Romanov V. G.* Investigation methods for inverse problems. Utrecht: VSP, 2002.

Статья поступила 2 марта 2005 г.

Романов Владимир Гаврилович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
romanov@math.nsc.ru