Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2005. Том 46, № 5

УДК 517.928

О СУЩЕСТВОВАНИИ ГРАНИЧНОГО ЗНАЧЕНИЯ У ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

В. П. Михайлов

Аннотация: Устанавливаются критерии существования L_2-предела и слабого L_2-предела полигармонической функции на правильной аналитической границе двумерной ограниченной области.

Ключевые слова: полигармоническое уравнение, граничное значение, компактность.

Памяти Тадея Ивановича Зеленяка

Пусть Q — ограниченная двумерная область, $Q \subset \mathbb{R}_2$, $x = (x_1, x_2)$ — точка области Q, $z = (x_1 + ix_2)$ — ее комплексная координата, и пусть $u(x) = u(z)$ — m-гармоническая, $m > 1$, (полигармоническая) в области Q функция, т. е. функция, являющаяся решением уравнения

$$\Delta^m u = 0, \quad x \in Q. \tag{1}$$

Границу ∂Q области Q будем предполагать правильной аналитической кривой, т. е. такой кривой, что для любой точки $z_0 \in \partial Q$ существует такая ее (комплексная) окрестность U_{z_0}, что уравнение попавшего в эту окрестность куска $\partial Q \cap U_{z_0}$ кривой ∂Q имеет вид $z = \lambda(t)$, $t_1 < t < t_2$, где $\lambda(t)$ — аналитическая функция вещественного переменного $t \in (t_1, t_2)$, $z_0 = \lambda(t_0)$, $t_0 \in (t_1, t_2)$, $t_1 = t_1(z_0)$, $t_2 = t_2(z_0)$, причем $\lambda'(t) \neq 0$ для $t \in (t_1, t_2)$.

Обозначим через

$$w = w(z), \quad z \in Q, \tag{2}$$

функцию, осуществляющую конформное отображение области Q комплексной z-плоскости на единичный круг $\{|w| < 1\}$ комплексной w-плоскости, а через

$$z = z(w), \quad |w| < 1, \tag{3}$$

обратную к ней функцию. Прообраз при преобразовании (2) кольца $\{r_0 \leq |w| < 1\}$ при некотором $r_0 \in (0, 1)$ обозначим через Q_{r_0}. Множество Q_{r_0} состоит из точек кривых γ_r, $r_0 \leq r < 1$, являющихся прообразами окружностей $\{|w| = r\}$:

$$\gamma_r = \{z = z(re^{i\varphi}),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \quad r_0 \leq r < 1. \tag{4}$$

Прообразом окружности $\{|w| = 1\}$ является граница ∂Q области Q, которую по аналогии с (4) естественно также обозначить через γ_1:

$$\partial Q = \gamma_1 = \{z = z(e^{i\varphi}),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00988) и гранта НШ–1542.2003.1.

Пусть на множестве Q_{r_0} задана некоторая непрерывная функция $g(z)$ (в частности, исследуемая полигармоническая функция $u(z)$). Будем говорить, что *функция $g(z)$ имеет L_2-предел на границе $\partial Q = \gamma_1$*, если семейство ее следов на кривых γ_r, $r_0 < r < 1$, т. е. множество функций

$$\{g(z(re^{i\varphi})),\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}, \quad r_0 < r < 1, \tag{5}$$

имеет $L_2(0, 2\pi)$-предел при $r \to 1 - 0$. Если множество функций (5) имеет слабый $L_2(0, 2\pi)$-предел при $r \to 1 - 0$, то говорим, что *функция $g(z)$ имеет слабый L_2-предел на границе ∂Q*. Будем также говорить, что *функция $g(z)$ L_2-компактна (слабо L_2-компактна) вблизи границы ∂Q*, если множество ее следов (5) $L_2(0, 2\pi)$-компактно (соответственно слабо $L_2(0, 2\pi)$-компактно). Аналогично говорим, что *функция $g(z)$ L_2-ограничена вблизи границы ∂Q*, если множество ее следов (5) $L_2(0, 2\pi)$-ограничено. Свойства функции $g(z)$ быть слабо L_2-компактной и L_2-ограниченной вблизи границы, естественно, эквивалентны.

Целью настоящей работы является установление критериев существования L_2-предела и слабого L_2-предела полигармонической функции $u(z)$ на границе области Q. А именно, будет установлена справедливость следующих утверждений.

Теорема 1. *Для того чтобы полигармоническая функция $u(z)$, $z \in Q$, имела L_2-предел на границе области Q, необходимо и достаточно, чтобы она была L_2-компактна вблизи ее границы.*

Теорема 2. *Для того чтобы полигармоническая функция $u(z)$, $z \in Q$, имела слабый L_2-предел на границе области Q, необходимо и достаточно, чтобы она была слабо L_2-компактна вблизи ее границы.*

Теоремы 1 и 2 для случая бигармонической функции ($m = 2$) доказаны в работе [1]. Настоящая работа в идейном плане близка к работе [1] и в определенном смысле является ее продолжением.

Для случая, когда двумерная область есть круг, теорема 1 и некоторые другие критерии существования L_2-предельных значений на границе области для полигармонических функций установлены в работе [2]. Аналогичные результаты получены в работе [3] для случая полосы в n-мерном пространстве $\mathbb{R}_n$ при любом $n \ge 2$ для решений линейного эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами порядка $2m$, $m \ge 1$, характеристический многочлен которых отличается от характеристического многочлена для m-гармонического оператора на произвольный многочлен степени, меньшей чем $2m$.

Отметим, что содержащиеся в теоремах 1 и 2 условия, обеспечивающие существование L_2-предела на границе области у m-гармонической функции, не зависят от m и относятся к любому решению уравнения (1), в том числе и к произвольной гармонической функции. С другой стороны, для гармонических функций, как известно (см. [4, 5], а для решений общих линейных эллиптических уравнений второго порядка с достаточно гладкими коэффициентами в ограниченных областях n-мерного пространства с достаточно гладкой границей см. [6]), критерием существования L_2-предела на границе является условие их принадлежности классу Харди H_2, т. е. в определенном смысле условие их L_2-ограниченности вблизи границы. Это, конечно, не противоречит теореме 1, поскольку для решений эллиптических уравнений второго порядка, как показано в [6], условие их L_2-ограниченности вблизи границы является условием их L_2-компактности. При этом в работах [2, 3] приведены примеры, показывающие, что условие L_2-ограниченности вблизи границы решения уравнения порядка, большего чем 2, критерием быть не может: это условие, конечно, необходимо, но достаточным, вообще говоря, не является.

Одним из основных моментов при изучении интересующего нас вопроса для решений весьма общего линейного уравнения второго порядка является установленная в [6] априорная оценка таких решений. Для решений уравнения более высокого порядка подобной оценки получить не удалось, поэтому приходится ограничивать себя лишь отдельными классами уравнений высокого порядка и пользоваться специальными структурными свойствами их решений.

Поскольку из L_2-компактности (или L_2-слабой компактности) вблизи границы комплекснозначной полигармонической функции $u(z)$, очевидно, вытекает L_2-компактность (соответственно L_2-слабая компактность) вблизи границы вещественнозначных полигармонических функций $\operatorname{Re} u(z)$ и $\operatorname{Im} u(z)$, то сформулированные выше теоремы достаточно доказать для вещественнозначных полигармонических функций. В связи с этим в дальнейшем будем считать функцию $u(z)$ принимающей лишь вещественные значения.

Хорошо известно [7], что для любой вещественнозначной m-гармонической в области Q функции $u(z)$ существуют m аналитических в Q функций $f_0(z)$, $f_1(z), \dots, f_{m-1}(z)$ комплексного переменного z таких, что

$$u(z) = \operatorname{Re}(f_0(z) + \bar{z} f_1(z) + \dots + \bar{z}^{m-1} f_{m-1}(z)), \quad z \in Q. \tag{6}$$

Функции $f_i(z)$, $i = 0, 1, \dots, m-1$, определяются по функции $u(z)$ неоднозначно: они определяются с точностью до слагаемых, которые являются некоторыми многочленами степени не выше чем m. Поскольку добавление к функциям $f_0(z), f_1(z), \dots, f_{m-1}(z)$ многочленов степени m не изменяет их поведения вблизи границы области в интересующем нас смысле, т. е. в смысле существования предельного значения на границе области у функции $u(z)$ или ее L_2-компактности (или ее слабой L_2-компактности) вблизи границы, то в дальнейшем мы ограничимся каким-либо конкретным выбором в равенстве (6) этих функций.

В результате преобразования (2) равенство (6) приобретает вид

$$U(w) = \operatorname{Re}(F_0(w) + \overline{z(w)} F_1(w) + \dots + (\overline{z(w)})^{m-1} F_{m-1}(w)), \quad |w| < 1, \tag{7}$$

где $U(w) = u(z(w))$, $|w| < 1$, — вещественнозначная функция, а $F_0(w) = f_0(z(w))$, $F_1(w) = f_1(z(w)), \dots, F_{m-1}(w) = f_{m-1}(z(w))$ — аналитические в круге $\{|w| < 1\}$ функции.

Согласно принятым выше определениям исследование вопроса о существовании L_2-предела и слабого L_2-предела функции $u(z)$ на границе области Q сводится к изучению поведения множества следов функции $U(w)$ на окружностях $\{|w| = r\}$, $r_0 < r < 1$, т. е. множества функций

$$\{U(re^{i\varphi}),\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}, \quad r_0 < r < 1, \tag{8}$$

а доказательство сформулированных теорем эквивалентно доказательству соответствующих утверждений для функции $U(w)$, т. е. доказательству следующих теорем $1'$ и $2'$.

Теорема $1'$**.** *Для того чтобы множество функций* (8) *имело* $L_2(0, 2\pi)$*-предел при* $r \to 1-0$*, необходимо и достаточно, чтобы это множество было* L_2*-компактным.*

Теорема $2'$. *Для того чтобы множество функций* (8) *имело слабый* $L_2(0,2\pi)$*-предел при* $r\to 1-0$, *необходимо и достаточно, чтобы это множество было слабо* $L_2(0,2\pi)$*-компактным, т. е.* $L_2(0,2\pi)$*-ограниченным.*

В силу предположения о границе ∂Q области Q функция $z(w)$, $|w|<1$, из равенства (3) аналитически продолжается в круг $\{|w|<R\}$ некоторого радиуса $R=R(\partial Q)>1$ и тем самым функция $\overline{z(1/\overline{w})}$ является аналитической по w для $|w|>1/R$. Поскольку нас интересует поведение функции $U(re^{i\varphi})$, $0\le\varphi\le 2\pi$, $r<1$, для r, достаточно близких к $r=1$, то наряду с представлением (7) для функции $U(w)$ в круге $\{|w|<1\}$ можно воспользоваться также другими ее представлениями, имеющими место, может быть, не во всем круге $\{|w|<1\}$, а лишь в некоторой его подобласти, примыкающей к границе $\{|w|=1\}$.

Для получения одного из таких представлений, справедливого в кольце $\{1/R<|w|<1\}$, рассмотрим многочлен (по ζ)

$$P(z,\zeta)=f_0(z)+\zeta f_1(z)+\dots+\zeta^{m-1}f_{m-1}(z)$$

с аналитическими по z в области Q коэффициентами и представим его согласно формуле Тейлора в виде

$$P(z,\zeta)=P(z,a)+\frac{1}{1!}\frac{\partial P(z,\zeta)}{\partial\zeta}\bigg|_{\zeta=a}(\zeta-a)+\dots+\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1}P(z,\zeta)}{\partial\zeta^{m-1}}\bigg|_{\zeta=a}(\zeta-a)^{m-1},$$

где a — произвольное комплексное число. Полагая в этом равенстве $z=z(w)$, $\zeta=\overline{z(w)}$, $a=\overline{z(1/\overline{w})}$, где $w\in\{1/R<|w|<1\}$, получим

$$P(z(w),\overline{z(w)})=G_0(w)+G_1(w)A(w)+\dots+G_{m-1}(w)(A(w))^{m-1},\quad \frac{1}{R}<|w|<1, \tag{9}$$

где

$$A(w)=\overline{z(w)}-\overline{z(1/\overline{w})}, \tag{10}$$

а

$$\begin{aligned}G_0(w)&=P(z(w),\overline{z(1/\overline{w})})\\&=f_0(z(w))+\overline{z(1/\overline{w})}f_1(z(w))+\dots+(\overline{z(1/\overline{w})})^{m-1}f_{m-1}(z(w))\\&=F_0(w)+\overline{z(1/\overline{w})}F_1(w)+\dots+(\overline{z(1/\overline{w})})^{m-1}F_{m-1}(w),\quad \frac{1}{R}<|w|<1,\dots,\\ G_k(w)&=\frac{1}{k!}\frac{\partial^k P(z(w),\zeta)}{\partial\zeta^k}\bigg|_{\zeta=\overline{z(1/\overline{w})}},\quad k=0,1,\dots,m-1,\ \frac{1}{R}<|w|<1.\end{aligned} \tag{11}$$

Замечая, наконец, что $U(w)=\operatorname{Re}P(z(w),\overline{z(w)})$ при $1/R<|w|<1$, приходим к искомому представлению функции $U(w)$ в кольце $1/R<|w|<1$:

$$U(w)=\operatorname{Re}(G_0(w)+G_1(w)A(w)+\dots+G_{m-1}(w)(A(w))^{m-1}),\quad \frac{1}{R}<|w|<1. \tag{12}$$

Поскольку функция $z(w)$ аналитична в круге $\{|w|<R\}$, а функция $\overline{z(1/\overline{w})}$ аналитична вне круга $\{|w|\le 1/R\}$, то функция $A(w)$ как функция вещественных переменных $w_1=\operatorname{Re}w$ и $w_2=\operatorname{Im}w$ ($w=w_1+iw_2=re^{i\varphi}$) бесконечно дифференцируема в кольце $\{1/R<|w|<R\}$, $A(w)\in C^\infty\big(1/R^2<w_1^2+w_2^2<R^2\big)$, причем

$$A(re^{i\varphi})|_{r=1}=\left(\overline{z(re^{i\varphi})}-\overline{z\left(\frac{1}{r}e^{i\varphi}\right)}\right)\bigg|_{r=1}=0,\quad 0\le\varphi\le 2\pi.$$

При любом $k = 0, 1, \ldots, m-1$ функция $G_k(w)$ является аналитической в кольце $\{1/R < |w| < 1\}$, и пусть лорановское разложение в этом кольце функции $G_k(w)$ имеет вид

$$G_k(w) = H_k(w) + \widetilde{H}_k(w), \quad \frac{1}{R} < |w| < 1, \ k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{13}$$

где

$$H_k(w) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(k)} w^n, \quad |w| < 1, \ k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{14}$$

— правильная часть ряда Лорана функции $G_k(w)$, а

$$\widetilde{H}_k(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{h}_n^{(k)} \frac{1}{w^n}, \quad |w| > \frac{1}{R}, \ k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{$\widetilde{14}$}$$

— главная его часть.

Подставляя (13), (14) и ($\widetilde{14}$) в (12), получаем равенство, с которым будем в дальнейшем работать:

$$U(w) = V(w) + U_0(w) + U_1(w) + \cdots + U_{m-1}(w), \quad \frac{1}{R} < |w| < 1. \tag{15}$$

В этом равенстве

$$V(w) = \mathrm{Re}(\widetilde{H}_0(w) + A(w)\widetilde{H}_1(w) + \cdots + (A(w))^{m-1}\widetilde{H}_{m-1}(w)), \quad \frac{1}{R} < |w| < 1, \tag{16}$$

$$U_0(w) = \mathrm{Re}(H_0(w)), \quad \frac{1}{R} < |w| < 1, \tag{17}$$

$$U_k(w) = \mathrm{Re}((A(w))^k H_k(w)), \quad \frac{1}{R} < |w| < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{18}$$

Из (16), ($\widetilde{14}$) и (10) вытекает, что функция $V(w)$ непрерывна в $\{1/R < |w| \le 1\}$, а из (17) и (14) (при $k = 0$) следует, что функция $U_0(w)$ как вещественная часть аналитической в круге $\{|w| < 1\}$ функции гармонична в этом круге.

С поточечным функциональным равенством (15) естественно связано равенство следов соответствующих функций: след функции U на окружности $\{|w| = r\}$ есть сумма следов на этой окружности функций $V, U_0, \ldots, U_{m-1}$. Поэтому с являющимся предметом нашего рассмотрения при доказательстве теорем $1'$ и $2'$ множеством следов функции $U(w)$ (8), в котором положим

$$r_0 = \frac{2}{R+1}, \quad r_0 \in (1/R, 1),$$

естественно связать соответствующие множества следов функций $V(w)$, $U_0(w)$, $\ldots, U_{m-1}(w)$:

$$\{V(re^{i\varphi}), \ 0 \le \varphi \le 2\pi\}, \quad \frac{2}{R+1} < r < 1, \tag{19}$$

$$\{U_0(re^{i\varphi}), \ 0 \le \varphi \le 2\pi\}, \quad \frac{2}{R+1} < r < 1, \tag{20}$$

. . . .

$$\{U_k(re^{i\varphi}), \ 0 \le \varphi \le 2\pi\}, \quad \frac{2}{R+1} < r < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1. \tag{21}$$

Пусть

$$z(w)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k, \quad |w|<R, \tag{22}$$

— разложение в ряд Тейлора функции $z(w)$, осуществляющей преобразование (3). Для коэффициентов этого разложения справедливы оценки Коши: для любого ρ, $0<\rho<R$,

$$|a_k| \le \frac{M}{\rho^k}, \quad \text{где } M=M(\rho)=\max_{|w|=\rho} |z(w)|,\ k\ge 0. \tag{23}$$

Аналогичные оценки имеют место и для тейлоровских коэффициентов разложений (14) функций $H_p(w)$: для любого ρ_1, $0<\rho_1<1$, и любого $p=0,1,\dots,m-1$

$$\bigl|h_k^{(p)}\bigr| \le \frac{M_p}{{\rho_1}^k}, \quad \text{где } M_p=M_p(\rho_1)=\max_{|w|=\rho_1} |H_p(w)|,\ k\ge 0,\ p=0,1,\dots,m-1. \tag{24}$$

В дальнейшем будем считать, что

$$\rho=\frac{1+R}{2}>1, \quad \rho_1=\frac{3+R}{2(1+R)}<1 \tag{25}$$

и тем самым

$$\rho_1\rho=\frac{3+R}{4}>1. \tag{26}$$

Подставляя разложение (22) в формулу (10), получим равенство

$$\begin{aligned} A(re^{i\varphi}) &= \sum_{k=0}^{\infty} \bar a_k r^k e^{-ik\varphi} - \sum_{k=0}^{\infty} \bar a_k r^{-k} e^{-ik\varphi} = \sum_{k=1}^{\infty} \bar a_k (r^k - r^{-k}) e^{-ik\varphi} \\ &= (r-r^{-1}) \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)}(r) e^{-ik\varphi}, \quad \frac{2}{R+1}<r\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi, \end{aligned} \tag{27}$$

в котором коэффициенты

$$a_k^{(1)}(r)=\bar a_k (r^{k-1}+r^{k-3}+\dots+r^{-(k-1)})$$

можно оценить с помощью неравенств (23):

$$\bigl|a_k^{(1)}(r)\bigr| \le |a_k|(r^{k-1}+\dots+r^{-(k-1)}) \le \frac{M}{\rho^k}\frac{k}{r^{k-1}}, \quad k\ge 1, \tag{28}$$

где $\rho=\frac{1+R}{2}$, а r — произвольное число из $\bigl(\frac{2}{R+1},1\bigr]$.

Для квадрата функции $A(re^{i\varphi})$ имеем

$$\begin{aligned} A^2(re^{i\varphi}) &= (r-r^{-1})^2 \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)}(r) e^{-ik\varphi} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^{(1)}(r) e^{-im\varphi} \\ &= (r-r^{-1})^2 \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{(2)}(r) e^{-in\varphi}, \quad \frac{2}{R+1}<r\le 1,\ 0\le\varphi\le 2\pi, \end{aligned}$$

где коэффициент

$$a_n^{(2)}(r)=\sum_{k=1}^{n-1} a_k^{(1)}(r) a_{n-k}^{(1)}(r)$$

удовлетворяет в силу (28) неравенству

$$\left|a_n^{(2)}(r)\right| \le \sum_{k=1}^{n-1}\left|a_k^{(1)}(r)\right|\left|a_{n-k}^{(1)}(r)\right| \le \sum_{k=1}^{n-1}\frac{M}{\rho^k}\frac{k}{r^{k-1}}\frac{M}{\rho^{n-k}}\frac{n-k}{r^{n-k-1}}$$

$$= \frac{M^2}{\rho^n r^{n-2}}\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k) \le \frac{M^2}{\rho^n r^{n-2}}n^3, \quad n \ge 2,$$

в котором $\rho = \frac{1+R}{2}$, а r — любое число из $\left(\frac{2}{R+1}, 1\right]$.

Аналогично для любого $p \ge 1$ получим разложение

$$A^p(re^{i\varphi}) = (r - r^{-1})^p \sum_{n=p}^{\infty} a_n^{(p)}(r)e^{-in\varphi}, \quad \frac{2}{R+1} < r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \tag{29}$$

коэффициенты $a_n^{(p)}(r)$ которого удовлетворяют неравенствам

$$\left|a_n^{(p)}(r)\right| \le \frac{M^p}{\rho^n r^{n-p}}n^{2p-1}, \quad n \ge p, \tag{30}$$

где $\rho = \frac{1+R}{2}$, а r — любое число из $\left(\frac{2}{R+1}, 1\right]$.

Соотношения (29) и (30) проще всего доказать методом математической индукции: предполагая справедливость этих соотношений для некоторого $p \ge 1$, докажем, что

$$A^{p+1}(re^{i\varphi}) = (r - r^{-1})^{p+1} \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n^{(p+1)}(r)e^{-in\varphi}, \quad \frac{2}{R+1} < r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi, \tag{29$'$}$$

где

$$\left|a_n^{(p+1)}(r)\right| \le \frac{M^{p+1}}{\rho^n r^{n-p-1}}n^{2p+1} \tag{30$'$}$$

при $\rho = \frac{1+R}{2}$ и всех $r \in \left(\frac{2}{R+1}, 1\right]$.

Действительно,

$$A^{p+1}(re^{i\varphi}) = A(re^{i\varphi})A^p(re^{i\varphi}) = (r - r^{-1})^{p+1}\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(1)}(r)e^{-ik\varphi}\sum_{m=p}^{\infty} a_n^{(p)}(r)e^{-im\varphi}$$

$$= (r - r^{-1})^{p+1}\sum_{n=p+1}^{\infty} e^{-in\varphi}\sum_{k=1}^{n-p} a_k^{(1)}(r)a_{n-k}^{(p)}(r),$$

т. е. имеет место равенство (29$'$), в котором

$$a_n^{(p+1)}(r) = \sum_{k=1}^{n-p} a_k^{(1)}(r)a_{n-k}^{(p)}(r),$$

причем

$$\left|a_n^{(p+1)}(r)\right| \le \sum_{k=1}^{n-p}\frac{M}{\rho^k}\frac{k}{r^{k-1}}\frac{M^p}{\rho^{n-k}}\frac{(n-k)^{2p-1}}{r^{n-k-p}}$$

$$\le \frac{M^{p+1}}{\rho^n r^{n-p-1}}\sum_{k=1}^{n-p}k(n-k)^{2p-1} \le \frac{M^{p+1}}{\rho^n r^{n-p-1}}n^{2p+1},$$

т. е. справедлива оценка (30′), что и требовалось установить.

Далее, при любом $p = 1, 2, \dots, m-1$, любых $r \in \left(\frac{2}{R+1}, 1\right)$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$ в силу (14) и (29)

$$H_p(re^{i\varphi})A^p(re^{i\varphi}) = (r - r^{-1})^p \sum_{k=0}^{\infty} h_k^{(p)} r^k e^{ik\varphi} \sum_{n=p}^{\infty} a_n^{(p)}(r) e^{-in\varphi}$$

$$= (r - r^{-1})^p \sum_{n=-p}^{\infty} g_n^{(p)}(r) e^{in\varphi}, \quad (31)$$

где для всех $p = 1, \dots, m-1$, $n \geq -p$, всех $r \in \left(\frac{2}{R+1}, 1\right)$ и $\varphi \in [0, 2\pi]$

$$g_n^{(p)}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} h_{p+k+n}^{(p)} r^{p+k+n} a_{p+k}^{(p)}(r). \quad (32)$$

Коэффициенты $g_n^{(p)}(r)$ разложения (31) в силу соотношений (24) и (30) удовлетворяют при всех $p = 1, 2, \dots, m-1$, $n \geq -p$, $r \in \left(\frac{2}{R+1}, 1\right)$ неравенствам

$$\left|g_n^{(p)}(r)\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M_p r^{p+k+n}}{\rho_1^{p+k+n}} \frac{M^p (p+k)^{2p-1}}{\rho^{p+k} r^{p+k-p}} = \frac{M_p M^p r^{p+n}}{\rho_1^{p+n} \rho^p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p+k)^{2p-1}}{\rho_1^k \rho^k},$$

в которых ρ и ρ_1 определены в (25) и, следовательно, в силу (26) ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p+k)^{2p-1}}{{\rho_1}^k \rho^k}$$

сходится при любом $p = 1, \dots, m-1$. Таким образом, при любом $p = 1, \dots, m-1$ и любом $n \geq -p$ существует постоянная $C_n(p, R) > 0$ такая, что для всех $r \in \left(\frac{2}{R+1}, 1\right)$

$$\left|g_n^{(p)}(r)\right| \leq C_n(p, R), \quad p = 1, \dots, m-1, \ n \geq -p, \ r \in \left(\frac{2}{R+1}, 1\right). \quad (33)$$

Из (14) при $k = 0$ и (17) вытекает, что

$$U_0(re^{i\varphi}) = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\infty} h_n^{(0)} r^n e^{in\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(h_n^{(0)\prime} \cos n\varphi - h_n^{(0)\prime\prime} \sin n\varphi\right) r^n, \quad (34)$$

где $h_n^{(0)\prime} = \operatorname{Re} h_n^{(0)}, h_n^{(0)\prime\prime} = \operatorname{Im} h_n^{(0)}$, $n = 0, 1, \dots$.

Аналогично из (18) и (31) для всех $1 \leq p \leq m-1$ имеем

$$U_p(re^{i\varphi}) = (r - r^{-1})^p \operatorname{Re} \sum_{n=-p}^{\infty} g_n^{(p)}(r) e^{in\varphi}$$

$$= (r - r^{-1})^p \sum_{n=-p}^{\infty} \left(g_n^{(p)\prime}(r) \cos n\varphi - g_n^{(p)\prime\prime}(r) \sin n\varphi\right),$$

где $g_n^{(p)\prime}(r) = \operatorname{Re} g_n^{(p)}$, $g_n^{(p)\prime\prime}(r) = \operatorname{Im} g_n^{(p)}$, $n = -p, -p+1, \dots$. Следовательно,

$$U_p(re^{i\varphi}) = (r - r^{-1})^p \Bigg[\sum_{n=-p}^{-1} \left(g_n^{(p)\prime}(r) \cos n\varphi - g_n^{(p)\prime\prime}(r) \sin n\varphi\right)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\big(g_n^{(p)\prime}(r)\cos n\varphi - g_n^{(p)\prime\prime}(r)\sin n\varphi\big)\Bigg]$$

$$= (r-r^{-1})^p\Bigg[\sum_{n=1}^{p}\big(g_{-n}^{(p)\prime}(r)\cos n\varphi + g_{-n}^{(p)\prime\prime}(r)\sin n\varphi\big)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\big(g_n^{(p)\prime}(r)\cos n\varphi - g_n^{(p)\prime\prime}(r)\sin n\varphi\big)\Bigg]$$

$$= (r-r^{-1})^p\Bigg[g_0^{(p)\prime} + \sum_{n=1}^{p}\big(g_n^{(p)\prime}(r) + g_{-n}^{(p)\prime}(r)\big)\cos n\varphi$$

$$+\sum_{n=1}^{p}\big(g_{-n}^{(p)\prime\prime}(r) - g_n^{(p)\prime\prime}(r)\big)\sin n\varphi + \sum_{n=p+1}^{\infty}\big(g_n^{(p)\prime}(r)\cos n\varphi - g_n^{(p)\prime\prime}(r)\sin n\varphi\big)\Bigg]. \quad (35)$$

Для доказательства сформулированных теорем нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Семейство функций* (8) ($r_0 = \frac{2}{R+1}$) $L_2(0,2\pi)$*-ограничено (слабо* $L_2(0,2\pi)$*-компактно) тогда и только тогда, когда* $L_2(0,2\pi)$*-ограничены (слабо* $L_2(0,2\pi)$*-компактны) семейство функций* $\{U_0(re^{i\varphi}),\ 0\le\varphi\le 2\pi\}$, $\frac{2}{R+1} < r < 1$ (20), *и семейство функций* $\left\{\sum\limits_{k=1}^{m-1} U_k(re^{i\varphi}),\ 0\le\varphi\le 2\pi\right\}$, $\frac{2}{R+1} < r < 1$ (21).

Напомним, что семейство функций $\{V(re^{i\varphi}), 0\le\varphi\le 2\pi\}$, $\frac{2}{R+1} < r < 1$ (19), $L_2(0,2\pi)$-ограничено, поскольку $V(w)\in C\big(\frac{2}{R+1}\le |w|\le 1\big)\subset C(1/R<|w|\le 1)$, поэтому в доказательстве нуждается лишь утверждение леммы о необходимости.

Пусть

$$A = \sup_{\frac{2}{R+1}<r<1}\|U(re^{i\varphi})\|_{L_2(0,2\pi)} < \infty, \quad A_1 = \sup_{\frac{2}{R+1}<r<1}\|V(re^{i\varphi})\|_{L_2(0,2\pi)}.$$

Тогда в силу (15)

$$\left\|U_0(re^{i\varphi}) + \sum_{k=1}^{m-1}U_k(re^{i\varphi})\right\|^2_{L_2(0,2\pi)} \le 2\big(A^2+A_1^2\big), \quad \frac{2}{R+1} < r < 1,$$

и тем самым согласно (34) и (35) для всех $r\in\big(\frac{2}{R+1},1\big)$

$$\frac{2\big(A^2+A_1^2\big)}{\pi} \ge 2\left(h_0^{(0)\prime} + \sum_{p=1}^{m-1}(r-r^{-1})^p g_0^{(p)\prime}(r)\right)^2$$

$$+\sum_{n=1}^{m-1}\left(h_n^{(0)\prime}r^n + \sum_{p=n}^{m-1}(r-r^{-1})^p\big(g_n^{(p)\prime}(r)+g_{-n}^{(p)\prime}(r)\big) + \sum_{p=1}^{n-1}(r-r^{-1})^p g_n^{(p)\prime}(r)\right)^2$$

$$+\sum_{n=1}^{m-1}\left(-h_n^{(0)\prime\prime}r^n + \sum_{p=n}^{m-1}(r-r^{-1})^p\big(g_{-n}^{(p)\prime\prime}(r)-g_n^{(p)\prime\prime}(r)\big) - \sum_{p=1}^{n-1}(r-r^{-1})^p g_n^{(p)\prime\prime}(r)\right)^2$$

$$+\sum_{n=m}^{\infty}\left(h_n^{(0)\prime}r^n + \sum_{p=1}^{m-1}(r-r^{-1})^p g_n^{(p)\prime}(r)\right)^2$$

$$+\sum_{n=m}^{\infty}\left(h_n^{(0)''}r^n+\sum_{p=1}^{m-1}(r-r^{-1})^p g_n^{(p)''}(r)\right)^2.$$

Следовательно, при любом $N\geq m$ и при всех $r\in\left(\frac{2}{R+1},1\right)$

$$\frac{2(A^2+A_1^2)}{\pi}\geq 2\left(h_0^{(0)'}+\sum_{p=1}^{m-1}(r-r^{-1})^p g_0^{(p)'}(r)\right)^2$$
$$+\sum_{n=1}^{m-1}\left(h_n^{(0)'}r^n+\sum_{p=n}^{m-1}(r-r^{-1})^p\bigl(g_n^{(p)'}(r)+g_{-n}^{(p)'}(r)\bigr)+\sum_{p=1}^{n-1}(r-r^{-1})^p g_n^{(p)'}(r)\right)^2$$
$$+\sum_{n=1}^{m-1}\left(-h_n^{(0)''}r^n+\sum_{p=n}^{m-1}(r-r^{-1})^p\bigl(g_{-n}^{(p)''}(r)-g_n^{(p)''}(r)\bigr)-\sum_{p=1}^{n-1}(r-r^{-1})^p g_n^{(p)''}(r)\right)^2$$
$$+\sum_{n=m}^{N}\left(h_n^{(0)'}r^n+\sum_{p=1}^{m-1}(r-r^{-1})^p g_n^{(p)'}(r)\right)^2$$
$$+\sum_{n=m}^{N}\left(h_n^{(0)''}r^n+\sum_{p=1}^{m-1}(r-r^{-1})^p g_n^{(p)''}(r)\right)^2. \quad (36)$$

В силу неравенств (33) для любого $N\geq 1$ существует постоянная

$$C(N)=\max_{1\leq p\leq m-1}\max_{-p\leq n\leq N}C_n(p,R)$$

такая, что для всех $p=1,\dots,m-1$, $n\in[-p,N]$, $r\in\left(\frac{2}{R+1},1\right)$ будет

$$\bigl|g_n^{(p)}(r)\bigr|\leq C(N),$$

и тем самым имеют место неравенства

$$\bigl|g_n^{(p)'}(r)\bigr|\leq C(N),\quad \bigl|g_n^{(p)''}(r)\bigr|\leq C(N),$$
$$p=1,\dots,m-1,\quad n=-p,-p+1,\dots,N,\quad r\in(2/(R+1),1).$$

Следовательно, в (36) можно перейти к пределу при $r\to 1-0$. В результате получим справедливое при всех $N\geq m$ неравенство

$$\frac{2\bigl(A^2+A_1^2\bigr)}{\pi}\geq 2\bigl(h_0^{(0)}\bigr)^2+\sum_{n=1}^{N}\bigl(\bigl(h_n^{(0)'}\bigr)^2+\bigl(h_n^{(0)''}\bigr)^2\bigr),$$

из которого вытекает сходимость ряда

$$2(h_0^{(0)})^2+\sum_{n=1}^{\infty}\bigl(\bigl(h_n^{(0)'}\bigr)^2+\bigl(h_n^{(0)''}\bigr)^2\bigr),$$

т. е. в силу (34) семейство функций $\{U_0(re^{i\varphi}),\ 0\leq\varphi\leq 2\pi\}$, $\frac{2}{R+1}<r<1$, $L_2(0,2\pi)$-ограничено. Поскольку семейства функций $\{U(re^{i\varphi}),\ 0\leq\varphi\leq 2\pi\}$, $\frac{2}{R+1}<r<1$, и $\{V(re^{i\varphi}),\ 0\leq\varphi\leq 2\pi\}$, $\frac{2}{R+1}<r<1$, являются $L_2(0,2\pi)$-ограниченными, то $L_2(0,2\pi)$-ограничено и семейство

$$\left\{\sum_{p=1}^{m-1}U_p(re^{i\varphi}),\ 0\leq\varphi\leq 2\pi\right\},\quad \frac{2}{R+1}<r<1.$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Семейство функций* (8) ($r_0 = \frac{2}{R+1}$) $L_2(0,2\pi)$*-компактно тогда и только тогда, когда* $L_2(0,2\pi)$*-компактны семейства функций*

$$\{U_0(re^{i\varphi}),\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}, \quad \frac{2}{R+1} < r < 1,$$

и

$$\left\{\sum_{p=1}^{m-1} U_p(re^{i\varphi}),\ 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}, \quad \frac{2}{R+1} < r < 1.$$

Поскольку семейство функций $\{V(re^{i\varphi}),\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, $\frac{2}{R+1} < r < 1$, очевидно, $L_2(0,2\pi)$-компактно, в доказательстве и этой леммы нуждается лишь утверждение о необходимости.

Из $L_2(0,2\pi)$-компактности семейства (8) следует его $L_2(0,2\pi)$-ограниченность и, следовательно, по лемме 1 $L_2(0,2\pi)$-ограниченность семейства $\{U_0(re^{i\varphi}),\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$, $\frac{2}{R+1} < r < 1$, являющегося семейством следов гармонической функции. Но тогда, как хорошо известно (см., например, [4–6]), это последнее семейство функций $L_2(0,2\pi)$-компактно (и даже имеет $L_2(0,2\pi)$-предел при $\to 1-0$). Поэтому $L_2(0,2\pi)$-компактно и семейство функций

$$\left\{\sum_{p=1}^{m-1} U_p(re^{i\varphi}),\ 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}, \quad \frac{2}{R+1} < r < 1.$$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Если семейство функций*

$$\left\{\sum_{p=1}^{m-1} U_p(re^{i\varphi}),\ 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}, \quad \frac{2}{R+1} < r < 1, \tag{37}$$

$L_2(0,2\pi)$*-ограничено (слабо* $L_2(0,2\pi)$*-компактно), то при* $r \to 1-0$ *существует его слабый* $L_2(0,2\pi)$*-предел, и этот предел равен нулю.*

Поскольку исследуемое в этой лемме семейство функций (37) $L_2(0,2\pi)$-ограничено, то для доказательства утверждения леммы достаточно проверить, что все коэффициенты Фурье по тригонометрической системе, линейная оболочка которой всюду плотна в $L_2(0,2\pi)$, каждой функции $U_p(re^{i\varphi})$, $p=1,\dots,m-1$, стремятся при $r \to 1-0$ к нулю. Для проверки этого факта следует воспользоваться равенством (35). Из него вытекает, что cos-коэффициенты Фурье функций $U_p(re^{i\varphi})$, $p=1,\dots,m-1$, имеют вид

$$I_{n,p}(r) = (U_p(re^{i\varphi}), \cos n\varphi)_{L_2(0,2\pi)} = \pi\big({g_n^{(p)}}'(r) + {g_{-n}^{(p)}}'(r)\big)(r-r^{-1})^p,$$

если $n \le p$, и

$$I_{n,p}(r) = (U_p(re^{i\varphi}), \cos n\varphi)_{L_2(0,2\pi)} = \pi {g_n^{(p)}}'(r)(r-r^{-1})^p,$$

если $n > p$; sin-коэффициенты Фурье функций $U_p(re^{i\varphi})$, $p=1,\dots,m-1$, имеют вид

$$J_{n,p}(r) = (U_p(re^{i\varphi}), \sin n\varphi)_{L_2(0,2\pi)} = \pi\big({g_{-n}^{(p)}}''(r) - {g_n^{(p)}}''(r)\big)(r-r^{-1})^p,$$

если $n \le p$, и

$$J_{n,p}(r) = (U_p(re^{i\varphi}), \sin n\varphi)_{L_2(0,2\pi)} = -\pi {g_n^{(p)}}''(r)(r-r^{-1})^p,$$

если $n > p$; а нулевой коэффициент Фурье функций $U_p(re^{i\varphi})$, $p = 1, \dots, m-1$, имеет вид

$$I_{0,p}(r) = (U_p(re^{i\varphi}), 1)_{L_2(0,2\pi)} = 2\pi {g_0^{(p)}}'(r)(r - r^{-1})^p.$$

Если теперь воспользоваться неравенствами (34) для функций ${g_n^{(p)}}'(r)$ и ${g_n^{(p)}}''(r)$, $p = 1, \dots, m-1$, $n \geq -p$, $r \in \left(\frac{2}{R+1}, 1\right)$, и перейти в полученных для функций $I_{n,p}(r)$, $n \geq 0$, $p = 1, \dots, m-1$, и функций $J_{n,p}(r)$, $n \geq 1, \dots, m-1$, равенствах к пределу при $r \to 1-0$ при произвольно фиксированных n и p, то получим доказательство требуемого утверждения. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы $2'$. В доказательстве, естественно, нуждается лишь утверждение о достаточности. Если множество функций $\{U(re^{i\varphi}),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, $\frac{2}{R+1} < r < 1$, слабо $L_2(0,2\pi)$-компактно, то по лемме 1 множества функций

$$\{U_0(re^{i\varphi}),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \quad \frac{2}{R+1} < r < 1,$$

и

$$\left\{\sum_{p=1}^{m-1} U_p(re^{i\varphi}),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\right\}, \quad \frac{2}{R+1} < r < 1,$$

$L_2(0,2\pi)$-ограничены. По лемме 3 множество

$$\left\{\sum_{p=1}^{m-1} U_p(re^{i\varphi}),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\right\}, \quad \frac{2}{R+1} < r < 1,$$

при $r \to 1-0$ слабо в $L_2(0,2\pi)$ стремится к нулю. А $L_2(0,2\pi)$-ограниченное множество $\{U_0(re^{i\varphi}),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, $\frac{2}{R+1} < r < 1$, следов гармонической функции имеет, как выше отмечалось, даже $L_2(0,2\pi)$-предел при $r \to 1-0$, который в сумме с граничным значением $V(re^{i\varphi})|_{r=1}$ и является слабым $L_2(0,2\pi)$-пределом множества $\{U(re^{i\varphi}),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, $\frac{2}{R+1} < r < 1$, при $r \to 1-0$.

Доказательство теоремы $1'$. При доказательстве этой теоремы также следует остановиться лишь на проверке утверждения о достаточности. Так как семейство функций $\{U(re^{i\varphi}),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$, $\frac{2}{R+1} < r < 1$, является $L_2(0,2\pi)$-компактным, по лемме 2 $L_2(0,2\pi)$-компактны также семейства функций

$$\{U_0(re^{i\varphi}),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}, \quad \frac{2}{R+1} < r < 1,$$

и

$$\left\{\sum_{p=1}^{m-1} U_p(re^{i\varphi}),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\right\}, \quad \frac{2}{R+1} < r < 1.$$

Как уже неоднократно отмечалось, первое семейство имеет $L_2(0,2\pi)$-предел при $r \to 1-0$. Нам остается показать, что $L_2(0,2\pi)$-предел при $r \to 1-0$ имеется и у второго семейства (причем нулевой $L_2(0,2\pi)$-предел). Действительно, это семейство $L_2(0,2\pi)$-ограничено, поэтому по лемме 3 оно, и тем более любое его подсемейство при $r \to 1-0$, слабо в $L_2(0,2\pi)$ сходится к нулю.

Пусть семейство

$$\left\{\sum_{p=1}^{m-1} U_p(re^{i\varphi}),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\right\}, \quad \frac{2}{R+1} < r < 1,$$

не сходится при $r \to 1-0$ к нулю в $L_2(0,2\pi)$. Тогда существуют такое $\varepsilon_0 > 0$ и такая последовательность $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$, $\frac{2}{R+1} < r_n < 1$, $r_n \to 1-0$ при $n \to \infty$, что

$$\left\| \sum_{p=1}^{m-1} U_p(r_n e^{i\varphi}) \right\|_{L_2(0,2\pi)} \geq \varepsilon_0 \quad \text{для всех } n \geq 1. \tag{38}$$

В силу $L_2(0,2\pi)$-компактности семейства функций

$$\left\{ \sum_{p=1}^{m-1} U_p(re^{i\varphi}),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}, \quad \frac{2}{R+1} < r < 1,$$

в последовательности

$$\left\{ \sum_{p=1}^{m-1} U_p(r_n e^{i\varphi}),\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

существует сходящаяся в $L_2(0,2\pi)$ подпоследовательность, которая может сходиться только к нулю, поскольку она сходится к нулю слабо в $L_2(0,2\pi)$. Но тогда для элементов этой подпоследовательности будет нарушаться неравенство (38). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михайлов В. П.* О существовании граничного значения у бигармонической функции // Мат. сб. 2004. Т. 195, № 12. С. 81–94.
2. *Михайлов В. П.* О существовании предельных значений решений полигармонического уравнения на границе области // Мат. сб. 1996. Т. 187, № 11. С. 89–114.
3. *Михайлов В. П.* Существование граничного значения у метагармонических функций // Мат. сб. 1999. Т. 190, № 10. С. 17–48.
4. *Riesz F.* Über die Randwerte eines Analytische Funktion // Math. Z. 1923. Bd 18. S. 87–95.
5. *Привалов И. И.* Граничные свойства однозначных аналитических функций. М.: ГИТТЛ, 1950.
6. *Михайлов В. П.* О граничных значениях решений эллиптических уравнений в областях с гладкой границей // Мат. сб. 1976. Т. 101, № 2. С. 163–188.
7. *Векуа И. Н.* Новые методы решения эллиптических уравнений. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948.

Статья поступила 25 февраля 2005 г.

Михайлов Валентин Петрович
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8, Москва 119991
`vpmih@mi.ras.ru`