Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2005. Том 46, № 5

УДК 517.95

РЕШЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕРЕЗ ФУНКЦИОНАЛЫ ЛЯПУНОВА

М. М. Лаврентьев (мл.)

Аннотация: Предлагается новый подход к определению понятия решения линейных и нелинейных параболических уравнений. Основная идея состоит в изучении связей между решениями динамических задач, представленных в вариационной форме

$$\rho(x,u,u_x)\,u_t = \frac{d}{dx}\,\frac{\partial\Phi(x,u,u_x)}{\partial u_x} - \frac{\partial\Phi(x,u,u_x)}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_x^2} \geq \delta > 0,$$

и свойствами соответствующих функционалов Ляпунова:

$$J[u](t) = \int\limits_0^1 \Phi(x,u(x,t),u_x(x,t))\,dx,$$

которые строго убывают вдоль траекторий вышеуказанных динамических уравнений, за исключением точек равновесия:

$$\frac{dJ}{dt} = -\int\limits_0^1 \rho(x,u,u_x)\,u_t^2\,dx, \quad \rho > 0.$$

На основе построенных Т. И. Зеленяком семейств функционалов Ляпунова оказалось возможным предложить новый подход к определению решений как линейных, так и нелинейных параболических задач. Все результаты приводятся для случая гладких решений. Отметим, что функционалы Ляпунова могут быть использованы при изучении решений с неограниченными градиентами.

Ключевые слова: параболическое уравнение, функционал Ляпунова.

Памяти Тадея Ивановича Зеленяка

Введение

Для автономного параболического уравнения с одной пространственной переменной в прямоугольнике $(x,t) \in Q_T = [0,1] \times [0,T]$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$u_t = a(x,u,u_x)u_{xx} + b(x,u,u_x), \quad a \geq a_0 > 0; \tag{0.1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{0.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 00–07–90343, 00–15–99092).

где все функции a, b и u_0 считаются достаточно гладкими (для определенности будем считать их из пространства C^3 по всем аргументам) и, кроме того, начальные данные удовлетворяют условиям согласования с краевыми условиями достаточно высокого порядка (см. [1]).

Теоремы существования классических решений уравнения (0.1) с различными краевыми условиями доказаны в 1960-е гг. (см., например, [1–3]). Эти теоремы содержат два типа условий на структуру нелинейности уравнения, т. е. на функции a, b.

Условия первого типа позволяют доказать, что само решение остается ограниченным в равномерной норме

$$\sup_{x,t} |u(x,t)| < M \tag{0.3}$$

(как, например, принцип максимума, теоремы сравнения, энергетические оценки и др.). Условия второго типа позволяют установить оценку первой производной

$$\sup_{x,t} |u_x(x,t)| < M_1 \tag{0.4}$$

в предположении, что оценка (0.3) уже известна. Как отмечалось в [2, 3], при известных оценках (0.3) и (0.4) (напомним, что все коэффициенты считаются достаточно гладкими) теоремы существования классических решений краевых задач для вышеупомянутых квазилинейных уравнений вида (0.1) могут быть доказаны без дополнительных ограничений на нелинейные слагаемые.

Условия второго типа, позволяющие установить оценку (0.4), формулируются в терминах ограничений на порядок роста отношения $b/a(x,u,u_x)$ по переменной u_x. Они имеют следующий вид:

$$\left|\frac{b(x,u,u_x)}{a(x,u,u_x)}\right| \le K\ \varphi(|u_x|), \quad \text{где} \quad \int\limits_0^\infty \frac{\tau\, d\tau}{\varphi(\tau)} = \infty, \tag{0.5}$$

для $x \in [0,1]$, $u \in [-M,M]$ (см., например, [3–7]). Грубо говоря, функция $\varphi(s)$ должна иметь не более чем квадратичный рост, т. е. $\varphi(s) \le 1+s^2$, на бесконечности $s \to \infty$. Допускается также рост порядков $\varphi(s) \sim s^2 \ln s$, $\varphi(s) \sim s^2 \ln s \ln(\ln s)$ и т. д.

Эти ограничения вида (0.5) были известны в вариационном исчислении и теории обыкновенных дифференциальных уравнений еще в начале века [8–10]. Как было доказано, условия на рост вида (0.5) позволяют, в частности, продолжить всякое ограниченное решение задачи Коши

$$y'' = -\frac{b(x,y,y')}{a(x,y,y')}, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \tag{0.6}$$

на полный интервал изменения переменной x для произвольных данных x_0, y_0 и y_1 (см., например, [10–12]).

Такая разрешимость в целом, т. е. продолжимость решений задачи Коши (0.6), оказалась достаточным условием существования семейств функционалов Ляпунова на решениях параболической задачи (0.1), (0.2) [6, 12, 13] (точное определение понятия функционала Ляпунова будет дано ниже). В частности, семейства функционалов Ляпунова позволяют доказать априорные оценки решений вида (0.4) (см., например, [6, 14]).

В случае, когда $b/a(x,u,u_x)$ (см. (0.5)) имеет порядок роста по переменной u_x по крайней мере $2+\varepsilon$, примеры параболических задач, имеющих ограниченные решения с неограниченной производной, предложены в [1, 15]. В настоящее время такие решения известны как «режимы с обострением производных» (РОП) (“derivative blowing-up” solutions — в англоязычной литературе) [16]. Однако со времени построения первых примеров [15] указанное явление в течение ряда лет оставалось неисследованным.

В последние годы решения параболических уравнений, разрушающиеся за конечное или бесконечное время, т. е. режимы с обострением, стали интенсивно изучаться [17, 18]. Так, было отмечено, что режимы с обострением являются важными с точки зрения приложений [17, 18]. Однако большинство публикаций в этой области посвящено решениям, растущим до бесконечности в равномерной норме.

Только сравнительно недавно появились новые примеры РОП-решений для параболических уравнений [16, 19, 20]. Отметим также, что «эффект гиперболичности» (по существу, РОП) был изучен для некоторых вырождающихся уравнений, возникающих в приложениях [21–24].

Качественно разные примеры режимов с обострением производных собраны в [25]. Здесь мы приведем два из них. Как показано в [19], для уравнений вида

$$u_t = u_{xx} + f(u_x)$$

при некоторых предположениях о поведении функции $f(s)$ на бесконечности (например, для случая $f(s) = e^s$) возрастание длины интервала изменения x может вызвать возникновение вышеуказанных РОП-решений при краевых условиях Дирихле, т. е. на интервале «малой» длины существует глобальное по времени решение, а при «сверхкритической длине» решение, оставаясь ограниченным в норме C, разрушается за конечное время.

В работе [26] показано, что эффект также зависит и от граничных условий. А именно, для уравнения

$$u_t = u_{xx} - xu_x^3$$

имеют место следующие факты:

(1) для случая граничных условий

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = \alpha \quad \text{при } \alpha > \pi/2$$

решение, остающееся ограниченным, не может обладать ограниченной производной;

(2) для случая граничных условий

$$u(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) - u(1,t) = 0$$

классическое решение существует для всех $t > 0$ при соответствующей гладкости начальных данных $u_0(x)$. Более того, это решение остается равномерно ограниченным вместе со своими производными и стремится к нулю при $t \to \infty$.

Интересно, что примерно в одно время с РОП-решениями динамических (параболических) задач начались интенсивные исследования так называемых «негладких решений» регулярных вариационных задач вида

$$\int_0^1 E(x,u,u_x)\,dx \to \min, \quad u(0) = A, \quad u(1) = B, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial u_x^2} \geq \delta > 0 \tag{0.7}$$

(см., например, [27–30] и имеющуюся там библиографию), которые в ряде случаев определяют стационарные решения параболических уравнений.

В пионерской работе Болла и Майзела [27] был предложен первый пример регулярной вариационной задачи вида (0.7) с положительным и строго выпуклым по градиентной переменной интеграндом E (т. е. с интеграндом «суперлинейного роста»), обладающей абсолютно непрерывным решением с неограниченной производной. В работе [27] этот интегранд $E(x,u,u_x)$ имеет вид

$$E(x,u,u_x) = ru_x^2 + (u^3 - x^2)^2 u_x^{14}. \tag{0.8}$$

Как было доказано, при выборе краевых условий (0.7) $A = 0$, $B = k$ и множителя $r = \left(\frac{2}{3}k\right)^{12}(1-k^3)(13k^3-7)$ (положительная постоянная для каждого $k^3 \in (7/13, 1)$) для k, достаточно близких к 1, точным решением задачи (см. [27]) является функция $u = kx^{2/3}$.

В этом примере решение $u = kx^{2/3}$ является гладким внутри рассматриваемого интервала $x \in (0,1)$ и удовлетворяет граничным условиям, т. е. может рассматриваться как гладкое решение вариационной задачи. Однако в дальнейшем было показано, что производная решения регулярной вариационной задачи может обращаться в бесконечность во внутренней точке (и даже на произвольном множестве нулевой меры). Так (см. [28]), решением задачи

$$\int\limits_0^1 \left(r(k)u_x^2 + (u^5 - x^3)^4 u_x^{32}\right) dx \to \min,$$

$$u(\alpha) = k\alpha^{3/5}, \quad u(\beta) = k\beta^{3/5} \quad (\alpha < 0 < \beta)$$

для $r(k) = (3k/5)^{30}(1-k^5)^3(31k^5-16)$ ($r > 0$ при $k^5 \in (16/31, 1)$) и k, достаточно близких к 1, является функция $u = kx^{3/5}$. Она не удовлетворяет уравнению Эйлера — Лагранжа даже в обобщенном смысле классического интегрального тождества.

Выпишем уравнение Эйлера — Лагранжа для примера (0.7), (0.8) и будем рассматривать его как правую часть параболического уравнения. Нетрудно проверить, что это уравнение Эйлера — Лагранжа удовлетворяет ограничению (0.5) для любой фиксированной пары точек x и u. Однако константа K не может быть выбрана равномерной, она стремится к бесконечности при приближении пары (x,u) к точкам кривой $u = x^{2/3}$. Вместе с тем на самой этой кривой интегранд вырождается вместе с соответствующими производными и ограничение (0.5) выполнено.

Таким образом, классические теоремы о разрешимости параболических задач [1–3, 5] в таких случаях неприменимы.

Отметим, что известные примеры регулярных задач с негладкими решениями из вариационного исчисления обладают следующим свойством. Записав уравнение Эйлера — Лагранжа для них в виде

$$a(x,u,u_x)u_{xx} + b(x,u,u_x) = 0, \tag{0.9}$$

можно увидеть, что функция b удовлетворяет тождеству

$$b(x,u,0) \equiv 0. \tag{0.10}$$

С точки зрения параболических задач тождество (0.9), в частности, означает выполнение строгого принципа максимума для решения задачи Дирихле

($\sup\limits_{x,t}|u(x,t)| \le \sup\limits_{x}|u_0(x)|$ — модуль решения не превосходит максимума модуля начальных данных). В том случае, когда уравнение (0.1) удовлетворяет условию (0.9), множество начальных данных, порождающих корректную задачу (классическое решение существует для всех $t > 0$, РОП не появляются), описано в [31].

Целью данной работы является развитие новых, нестандартных подходов к изучению негладких РОП для параболических уравнений. Концепция так называемых «вязких решений» [32], которые могут быть лишь непрерывными, представляется очень интересной с этой точки зрения.

Здесь мы предлагаем другой подход к введению понятия решения параболического уравнения. Представленные результаты должны рассматриваться как первый шаг в указанном направлении. Основная идея состоит в том, чтобы использовать семейства функционалов Ляпунова для определения решений параболических уравнений. Семейства таких функционалов предложены и построены Т. И. Зеленяком [6, 12, 13] для изучения поведения решений при большом времени. Фактически были построены вариационные множители $\rho(x,u,u_x)$ для решений параболических уравнений. Это отличные от нуля функции $\rho \ge \delta > 0$ такие, что после умножения на них правая часть уравнения (0.1) превращается в уравнение Эйлера — Лагранжа для соответствующего интегранда $\Phi(x,u,u_x)$. Другими словами, уравнение (0.1) может быть записано в вариационной форме:

$$\rho(x,u,u_x)\cdot u_t = \frac{d}{dx}\frac{\partial\Phi(x,u,u_x)}{\partial u_x} - \frac{\partial\Phi}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial u_x^2} \ge \delta > 0.$$

Прямые вычисления показывают, что каждый из этих множителей ρ порождает функционал Ляпунова на решении динамической задачи (0.1), (0.2):

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \Phi(x,u,u_x)\,dx = -\int_0^1 \rho(x,u,u_x)u_t^2\,dx. \tag{0.11}$$

Идея представляемых результатов состоит в обратном шаге. Предположим, нам известно, что функция $u(x,t)$ удовлетворяет равенствам (0.10) для всех интеграндов Φ (с соответствующим множителем ρ для каждого), которые порождают одно и то же уравнение Эйлера — Лагранжа (0.8). Как мы докажем, в ряде случаев это означает, что $u(x,t)$ является решением параболического уравнения (0.1).

Статья построена следующим образом. В § 1 мы рассматриваем обычное уравнение теплопроводности, для того чтобы продемонстрировать основные идеи доказательств. В § 2 описывается идея дискретных функционалов Ляпунова и вводится используемое в дальнейшем понятие обобщенной выпуклости функций. Наконец, в § 3 содержится основной результат — теорема об альтернативном способе определения решений для нелинейных параболических уравнений.

1. Решение уравнения теплопроводности

В прямоугольнике $(x,t) \in Q_T = (0,1)\times(0,T]$ рассмотрим задачу Дирихле для уравнения теплопроводности:

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x). \tag{1.2}$$

Предположим, что начальные данные достаточно гладкие, а именно $u_0(x) \in C^3[0,1]$, и удовлетворяют условиям согласования $u_0(0) = u_0(1) = 0$. Кроме того, будем считать, что функция $u_0(x)$ либо строго выпукла, либо строго вогнута:

$$u_0''(x) \neq 0, \quad x \in (0,1).$$

Известно [1], что при сделанных предположениях существует классическое решение $u(x,t)$ задачи (1.1), (1.2). Всюду в Q_T это решение соответственное выпукло или вогнуто по x:

$$u_{xx}(x,t) \neq 0, \tag{1.3}$$

и в силу уравнения монотонно по t:

$$u_t(x,t) \neq 0. \tag{1.4}$$

Определение 1. Будем говорить, что пара функций $\rho, \Phi(x,\xi,\eta) \in C^2$ *порождает функционал Ляпунова* на решениях задачи (1.1), (1.2), если для всякого ее решения $u(x,t) \in C^{2,1}(Q_T)$ выполняется следующее тождество:

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \Phi(x,u,u_x)\,dx = -\int_0^1 \rho(x,u,u_x)u_t^2\,dx, \tag{1.5}$$

причем $\rho(x,\xi,\eta) \geq 0$.

Легко видеть, что для уравнения теплопроводности (1.1) построенная по любой гладкой функции $\rho(\eta)$ пара вида

$$\rho = \rho(\eta), \quad \Phi(\eta) = \int_0^\eta (\eta - \tau)\rho(\eta)\,d\tau \tag{1.6}$$

с $\rho \geq \rho_0 > 0$ порождает функционал Ляпунова на решениях задачи (1.1), (1.2).

Отметим, что для любой гладкой функции $u(x,t) \in C^{2,1}(Q_T)$ (не обязательно являющейся решением уравнения (1.1), но удовлетворяющей краевым условиям (1.2)) выполняются тождества (см. (1.6))

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \Phi(u_x)\,dx = \int_0^1\int_0^{u_x} \rho(\eta)\,d\eta u_{xt}\,dx = -\int_0^1 \rho(u_x)u_{xx}u_t\,dx. \tag{1.7}$$

Вернемся к решениям задачи (1.1), (1.2). Зафиксируем произвольное значение временно́й переменной $t^* \in (0,T]$. В силу «выпуклости» (1.3) для данного $t = t^*$ существует гладкое и строго монотонное взаимно однозначное соответствие $\varphi^*(\xi)$, отображающее значения следа производной $u_x(x,t^*)$ на интервал $[0,1]$ по следующему правилу:

$$\varphi^*(u_x(x,t^*)) = x. \tag{1.8}$$

Для каждого $x^* \in (0,1)$ выберем последовательность функций $\{\psi_n^*(\tau)\}$, сходящуюся к δ-функции, сосредоточенной в точке $x = x^*$:

$$\psi_n^*(\tau) = \frac{n}{\pi^{1/2}}\exp\{-n^2(\tau - x^*)^2\}. \tag{1.9}$$

Рассмотрим семейство пар ρ_n, Φ_n (1.6) при

$$\rho_n(\eta) = \psi_n^*(\varphi^*(\eta)), \tag{1.10}$$

где множители ρ_n не являются отделенными от нуля.

По выбору функций ρ_n (см. (1.10), (1.8), (1.9)) для данного $t = t^*$ на решении $u(x,t^*)$ задачи (1.1), (1.2) последовательность $\{\rho_n(u_x(x,t^*))\}$ сходится к сосредоточенной в точке $x = x^*$ δ-функции:

$$\rho_n(u_x(x,t^*)) \to \delta(x^*) \quad \text{при } n \to \infty. \tag{1.11}$$

Если нам известно, что для всех пар функций (1.6) выполнено тождество (1.5), то согласно (1.7) для произвольной функции ρ мы получаем тождество

$$\int\limits_0^1 \rho(u_x) u_{xx} u_t \, dx = \int\limits_0^1 \rho(u_x) u_t^2 \, dx.$$

Полагая здесь $\rho = \rho_n$ (см. (1.10)), для каждого $t \in (0,T]$ имеем

$$\int\limits_0^1 \rho_n(u_x) u_{xx} u_t \, dx = \int\limits_0^1 \rho_n(u_x) u_t^2 \, dx. \tag{1.12}$$

Рассмотрим последовательность тождеств (1.12) для $t = t^*$ и перейдем к пределу при $n \to \infty$. В силу (1.11) будем иметь

$$u_{xx}(x^*,t^*) u_t(x^*,t^*) = u_t^2(x^*,t^*).$$

Отсюда и из свойства монотонности (1.4) можно заключить, что

$$u_t(x^*,t^*) = u_{xx}(x^*,t^*). \tag{1.13}$$

Поскольку точка $(x^*,t^*) \in (0,1) \times (0,T]$ была выбрана произвольно, это значит, что уравнение (1.1) выполняется всюду в Q_T.

Следовательно, доказана

Теорема 1.1. *Предположим, что гладкая функция $u(x,t) \in C^{2,1}(Q_T)$ строго выпукла (или строго вогнута) по переменной x для всех $t \in (0,T]$ (см.* (1.3)*), строго монотонна по переменной t для всех $x \in (0,1)$ (см.* (1.4)*) и удовлетворяет краевым условиям* (1.2)*. Кроме того, предположим, что для всех пар ρ, Φ вида* (1.6) *выполняются тождества* (1.5).

Тогда функция $u(x,t)$ является решением уравнения (1.1) *для $(x,t) \in (0,1) \times (0,T]$.*

Замечание 1.1. В условиях теоремы 1.1 функция $u(x,t)$ — решение задачи (1.1), (1.2) с начальными данными $u_0(x) = u(x,0)$.

2. Вспомогательные построения

В прямоугольнике $(x,t) \in Q_T$ рассмотрим следующую задачу для автономного квазилинейного параболического уравнения:

$$u_t = a(x,u,u_x) u_{xx} + b(x,u,u_x), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{2.1}$$

$$\alpha_i u_x(i,t) + \varphi_i(u(i,t)) = 0, \quad i = 0,1, \ t > 0, \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1). \tag{2.3}$$

Предположим, что все «нелинейности» являются достаточно гладкими, а именно $a, b, \varphi_i \in C^3$, функция a отделена от нуля:

$$a(x,\xi,\eta) \geq \delta > 0, \quad (x,\xi,\eta) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2,$$

граничные условия невырожденны:

$$\alpha_i^2 + \varphi_i'^2(\xi) \ge \delta > 0, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

и начальные данные принадлежат множеству

$$u_0(x) \in E = \{u_0(x) \in C^2[0,1],\ \alpha_i u_0'(i) + \varphi_i(u_0(i)) = 0,\ i = 0,1\}$$

(предположения о гладкости и условия согласования).

Отметим, что при сделанных предположениях существует классическое решение задачи (2.1)–(2.3) (см., например, [1–3, 5]) по крайней мере для достаточно малых t (разрешимость в малом). Всюду в дальнейшем будем предполагать, что это решение $u(x,t)$ определено и регулярно во всем прямоугольнике Q_T (разрешимость в целом).

Нам потребуется следующее

Определение 2.1. Будем говорить, что задача (2.1)–(2.3) *удовлетворяет условию* **(B)**, если решение $\varphi(x_0, x, y_0, y_1)$ задачи Коши

$$y'' = -\frac{b(x,y,y')}{a(x,y,y')}, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \tag{2.4}$$

может быть регулярно продолжено на весь интервал $x \in [0,1]$ изменения переменной x при произвольных данных Коши $(x_0, y_0, y_1) \in [0,1] \times \mathbb{R}^2$.

При выполнении условия **(B)** в работах [6, 12, 13] доказано существование семейств функционалов Ляпунова на решениях квазилинейных параболических уравнений:

Теорема 2.1. *Предположим, что задача* (2.1)–(2.3) *удовлетворяет условию* **(B)**.

Тогда существует семейство функционалов Ляпунова (1.5) *на решениях задачи* (2.1)–(2.3) (*см. определение* 1.1). *Эти функционалы Ляпунова могут быть построены в соответствии со следующими формулами:*

$$\Phi(x,\xi,\eta) = \int_0^\eta (\eta - \tau)\rho a(x,\xi,\tau)\, d\tau + \eta z_1(x,\xi) + z_2(x,\xi), \tag{2.5}$$

$$\rho = \Psi[A, B(x,\xi,\eta)] F_0(x,\xi,\eta). \tag{2.6}$$

Здесь

(a) *сомножитель* F_0 *в* (2.6) *имеет вид*

$$F_0(x,\xi,\eta) = \exp\left\{ -\int_{x_0}^x F(x_0, x, y_0, y_1)\, dx \right\}\Bigg|_{\substack{x_0 = 0 \\ y_0 = A(x,\xi,\eta) \\ y_1 = B(x,\xi,\eta)}}, \tag{2.7}$$

(b) *функции* $z_i(x,\xi)$ *в* (2.6) *определяются из соотношений*

$$z_{2\xi}(x,\xi) - z_{1x}(x,\xi) = -\rho b(x,\xi,0), \tag{2.8}$$

$$z_1(x,\xi) = -x \int_0^{h_1(\xi)} \rho a|_{x=1}\, d\xi + (x-1) \int_0^{h_0(\xi)} \rho a|_{x=0}\, d\xi, \tag{2.9}$$

где $h_i(\xi) = 0$ *в случае* $\alpha_i = 0$ *и* $h_i(\xi) = -\varphi_i(\xi)/\alpha_i$ *в случае* $\alpha_i \neq 0$*;*

(c) *множитель* Ψ *в* (2.7) *может быть выбран как произвольная гладкая положительная функция двух переменных* (*наличие этого произвольного множителя и обеспечивает существование целого семейства функционалов Ляпунова*)*;*

(d) *через* $A(x, y, y')$, $B(x, y, y')$ *в* (2.6) *обозначены независимые первые интегралы уравнения* (2.4)*;*

(e) *интегранд* F *в* (2.6) *определяется соотношением*

$$F(x_0, x, y_0, y_1) = \frac{\eta a_\xi + a_x - b_\eta}{a}\bigg|_{\substack{\xi=\varphi(x_0,x,y_0,y_1)\\ \eta=\varphi_x(x_0,x,y_0,y_1)}}, \tag{2.10}$$

где через $\varphi(x_0, x, y_0, y_1)$ *обозначено решение задачи Коши* (2.5).

Как доказано в [6, 12, 13], в качестве вышеуказанных независимых первых интегралов A, B в (2.6) могут быть выбраны соответственно значения в точке $x = 0$ решения φ задачи (2.4) и его производной

$$A(x, \xi, \eta) = \varphi(x, 0, \xi, \eta), \quad B(x, \xi, \eta) = \frac{\partial}{\partial x_0}\varphi(x, x_0, \xi, \eta)\bigg|_{x_0=0}. \tag{2.11}$$

Ниже мы будем использовать свойства так называемых дискретных функционалов Ляпунова (ДФЛ), которые изучались, например, в работах [33–36]. Остановимся подробнее на этом понятии. Зафиксируем произвольное решение $y(x)$ обыкновенного дифференциального уравнения (2.4) и рассмотрим функцию $z^y(t)$, которая отображает временной интервал $t \in [0, T]$ на количество пересечений решения $u(x, t)$ исходной задачи (2.1)–(2.3) и функции $y(x)$ (пересечения здесь понимаются как перемены знака разности $u(x, t) - y(x)$).

Для точной формулировки результата рассмотрим линейную параболическую задачу

$$\begin{gathered} v_t = d(x,t)v_{xx} + g(x,t)v_x + c(x,t)v; \\ \alpha_i v_x(i,t) - \beta_i(t)v(i,t) = 0, \quad i = 0, 1; \\ v(x, 0) = v_0(x). \end{gathered} \tag{2.12}$$

Всюду в дальнейшем функция $z^v(t)$ будет обозначать число перемен знака решения $v(x, t)$ задачи (2.12) в момент времени t.

В работах [33–35] содержится следующая

Теорема 2.2. *Пусть функции* d, d_t, d_x, d_{xx}, g, g_t, g_x, $c(x, t)$ *непрерывны в* Q_T, $d(x, t) \geq d_0 > 0$, $\beta_i \in C^1[0, T]$, $\alpha_i = \mathrm{const}$ $(\alpha_i^2 + \beta_i^2 \geq d_0 > 0)$. *Пусть, кроме того, функция* $v(x, t)$ *является решением задачи* (2.12).

Тогда либо $v(x, t) \equiv 0$, *либо*

(1) *число* $z^v(t)$ *конечно для всех* $t > 0$, *даже если* $z^v(0) = \infty$*;*

(2) *число* $z^v(t)$ *не возрастает со временем и, более того, строго убывает при прохождении* t *через значение* t_0 *тогда и только тогда, когда функция* $v(x, t_0)$ *имеет кратный нуль в некоторой точке* $x \in [0, 1]$ (*под кратным нулем мы, как обычно, понимаем такое значение* x_0, *что* $v(x_0, t) = v_x(x_0, t) = 0$).

Замечание 2.1. Согласно теореме (2.2) функция $z^v(t)$ принимает натуральные значения при $t > 0$ и, кроме того, $z^v(t)$ — невозрастающая функция. Поэтому функция $z^v(t)$ получила в литературе название ДФЛ.

Для каждого решения $y(x)$ уравнения (2.4) будем рассматривать разность $v(x,t) = u(x,t) - y(x)$ как решение линейной задачи вида (2.12). Коэффициенты уравнения могут быть определены следующим образом:

$$d(x,t) = a(x, y(x), y'(x));$$

$$g(x,t) = \frac{b(x, u(x,t), u_x(x,t)) - b(x, u(x,t), y'(x))}{u_x(x,t) - y'(x)} + \frac{a(x, u(x,t), u_x(x,t)) - a(x, u(x,t), y'(x))}{u_x(x,t) - y'(x)}\, u_{xx}(x,t),$$

если $u_x(x,t) \neq y'(x)$. В точках, где $u_x(x,t) = y'(x)$, коэффициент g определяется дифференцированием:

$$g(x,t) = \frac{\partial}{\partial y'} a(x, u(x,t), y'(x)) u_{xx} + \frac{\partial}{\partial y'} b(x, u(x,t), y'(x)).$$

Коэффициент $c(x,t)$ определяется аналогично в зависимости от того, совпадают или нет значения функций $v(x,t)$ и $y(x)$.

Что касается граничных условий, то эти функции определяются из соотношений

$$\beta_i(t) = \frac{\varphi_i(u(i,t)) - \varphi_i(y(i))}{u(i,t) - y(i)},$$

если $u(i,t) \neq y(i)$, и $\beta_i(t) = \varphi_i'(u(i,t))$, если $u(i,t) = y(i)$.

В наших предположениях решение $u(x,t)$ задачи (2.1)–(2.3) является достаточно гладким, а именно $u(x,t) \in C^{3+\alpha}(Q_T)$. Поэтому указанные выше коэффициенты d, g и c уравнения (2.12) и их производные d_t, d_x, d_{xx}, g_t, g_x обладают всеми свойствами, требуемыми в теореме 2.2.

Поэтому в силу теоремы 2.2 получаем, что для любого решения $y(x)$ задачи (2.5) разность $v(x,t) = u(x,t) - y(x)$ либо тождественно равна нулю, либо имеет конечное число перемен знака для $t > 0$, которое не возрастает с ростом t.

Для того чтобы прояснить дальнейшие определения, рассмотрим снова простейший случай $a = 1$, $b = 0$. Тогда уравнение (2.1) есть не что иное как уравнение теплопроводности (1.1). Уравнение (2.4) принимает вид

$$y''(x) = 0, \tag{2.13}$$

и его общее решение представляется линейной функцией $y(x) = C_1 x + C_2$. Выпуклость начальных данных $u_0(x)$, требуемая в § 1, означает, что их график пересекает график любого из решений уравнения (2.13) не более чем два раза. Более того, пересечение единственно в случае касания. Таким образом, мы можем вывести хорошо известное свойство выпуклости решения уравнения теплопроводности при $t > 0$ при выпуклых начальных данных из свойств ДФЛ, приведенных в теореме 2.2.

При получении дальнейших результатов не только для уравнения теплопроводности (1.1), но и для случая квазилинейного параболического уравнения (2.1) нам потребуется развить концепцию выпуклости функций. Для этого мы свяжем понятие выпуклости функций непосредственно со свойствами семейства решений (зависящего от двух вещественных параметров) уравнения (2.4), которое определяет стационарные решения уравнения (2.1).

Определение 2.2. Будем говорить, что функция $f(x)$, определенная для $x \in [0,1]$, является *выпуклой по отношению к семейству решений уравнения*

(2.4), если ее график может касаться каждого из решений $y(x)$ уравнения (2.4) не более чем в одной точке при $x \in [0, 1]$.

Замечание 2.2. Как уже отмечалось, выпуклые функции являются выпуклыми по отношению к семейству решений уравнения (2.13), которое определяет стационарные решения уравнения теплопроводности (1.1).

Обратимся вновь к разности $v(x, t) = u(x, t) - y(x)$ между решениями задачи (2.1)–(2.3) и уравнения (2.4). Эта разность является решением задачи (2.12) с вышеуказанными коэффициентами $d(x, t)$, $g(x, t)$, $c(x, t)$. Сформулируем утверждение теоремы 2.2 в терминах решения $u(x, t)$ нелинейной задачи (2.1)–(2.3).

Следствие 2.1. *Если начальные данные $u_0(x)$ являются выпуклыми по отношению к семейству решений уравнения* (2.4), *то решение $u(x, t)$ задачи* (2.1)–(2.3) *сохраняет это свойство для всех фиксированных $t \in (0, T]$.*

Нетрудно видеть, что при соответствующей гладкости коэффициентов производная $u_t(x, t)$ решения задачи (2.1)–(2.3) также является решением линейной задачи вида (2.12). Поэтому из теоремы 2.2 вытекает также

Следствие 2.2. *Предположим, что $a, b, \varphi_i \in C^4$, $u_0(x) \in C^3([0, 1])$, и $u(x, t)$ является решением задачи* (2.1)–(2.3).

Тогда производная $u_t(x, t)0$ либо тождественно нулевая (т. е. функция $u(x, t) \equiv u_0(x)$ является стационарным решением рассматриваемой задачи и динамическая постановка тривиальна), либо имеет лишь конечное число перемен знака на интервале $x \in [0, 1]$ для всех $t \in (0, T]$.

3. Определение понятия решения нелинейного уравнения через функционалы Ляпунова

Используем приведенные в § 1 и 2 подходы для определения решений нелинейного уравнения вида (2.1).

Теорема 3.1. *Предположим, что гладкая функция $u(x, t) \in C^{2,1}(Q_T)$ удовлетворяет граничным условиям* (2.2) *и обладает следующими свойствами:*

(1) *тождество* (1.5) *справедливо для всех пар функций ρ, Φ, построенных в соответствии с формулами* (2.5)–(2.11);

(2) *функция $u(x, t)$ является выпуклой по отношению к семейству решений уравнения* (2.4) *для всех точек $t \in (0, T]$ (см. определение* 2.2*);*

(3) *производная $u_t(x, t)$ имеет конечное число нулей на интервале $x \in [0, 1]$ для каждого $t \in (0, T]$.*

Тогда $u(x, t)$ является классическим решением задачи (2.1)–(2.3) *с начальными данными $u_0(x) = u(x, 0)$.*

Замечание 3.1. В [12, 13] доказан следующий результат. Если задача (2.1)–(2.3) удовлетворяет условию **(B)** (см. определение 1.1), то существует семейство вариационных множителей $\rho(x, \xi, \eta)$ таких, что после умножения правой части стационарного уравнения (2.1) на $\rho(x, u, u_x)$ мы получаем уравнение Эйлера — Лагранжа для соответствующего интегранда Φ. Эти пары ρ, Φ, очевидно, порождают функционалы Ляпунова (1.5).

В дополнительных предположениях (2) и (3) вышеприведенная теорема 3.1 устанавливает обратный результат: если функция $u(x, t)$ удовлетворяет семейству тождеств функционалов Ляпунова (1.5) (с одним и тем же уравнением

Эйлера — Лагранжа для всех интеграндов Φ), то $u(x,t)$ — решение динамической задачи (2.1)–(2.3).

Замечание 3.2. Рассмотрим условия (2) и (3) теоремы 3.1 с точки зрения следствий 2.1 и 2.2.

1. Следствие 2.1 показывает, что если начальные данные $u_0(x)$ являются выпуклыми по отношению к семейству решений уравнения (2.4), то условие (2) теоремы 3.1 необходимо для того, чтобы $u(x,t)$ была решением уравнения (2.1).

2. Следствие 2 означает, что лишь функции, которые удовлетворяют условию (3) теоремы 3.1, могут быть нетривиальными (т. е. нестационарными) решениями параболического уравнения с гладкими коэффициентами.

Замечание 3.3. Отметим, что уже по одной паре $\rho, \Phi(x,\xi,\eta)$, порождающей функционал Ляпунова (1.5), единственным образом определяется соответствующее параболическое уравнение вида (2.1) такое, что ФЛ (1.5) убывает вдоль его решений согласно (1.5). Действительно, как следует из (2.5)–(2.11) (см. [12]), для каждого интегранда Φ уравнение Эйлера — Лагранжа имеет вид

$$\rho(x,u,u_x)(a(x,u,u_x)u_{xx} + b(x,u,u_x)) = 0,$$

т. е. в уравнении (2.1) имеем

$$a(x,u,u_x) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2\Phi}{\partial u_x^2}, \quad b(x,u,u_x) = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u\partial u_x}u_x + \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial u_x} - \frac{\partial\Phi}{\partial u}\right).$$

Доказательство теоремы 3.1. Зафиксируем произвольную точку $(x^*,t^*) \in (0,1)\times(0,T]$, в которой

$$u_t(x^*,t^*) \neq 0. \tag{3.1}$$

Всюду в дальнейшем функция $y^*(x)$ будет обозначать такое решение уравнения (2.4), что его график касается графика функции $u(x,t^*)$ лишь в заданной точке $x^* \in (0,1)$. Поскольку функция $u(x,t)$ выпукла по отношению к семейству решений уравнения (2.4), графики $u(x,t^*)$ и $y^*(x)$ пересекаются только в точке x^*.

В качестве первых интегралов A, B уравнения (2.4), фигурирующих в формулах (2.5)–(2.11) при построении вариационных множителей $\{\rho(x,u,u_x)\}$, выберем значения следа решения задачи Коши (2.4) и его производной в точке $x = x^*$ (см. (2.11)). Тогда в обозначениях

$$A^u(x,t^*) = A(x,u(x,t^*),u_x(x,t^*)), \quad B^u(x,t^*) = B(x,u(x,t^*),u_x(x,t^*))$$

будем иметь

$$A^u(x,t^*) = A^*, \quad B^u(x,t^*) = B^*,$$

где

$$A^* = y^*(x^*) = u(x^*,t^*), \quad B^* = (y^*)'(x^*) = u_x(x^*,t^*).$$

При этом в силу единственности решения задачи Коши для уравнения (2.4) справедливо свойство:

$$(A^u(x,t^*), B^u(x,t^*)) \neq (A^*,B^*)$$

для $x \neq x^*$.

Теперь для данного $(x^*,t^*) \in Q_T$ построим последовательность вариационных множителей $\{\rho_n^*(x,u,u_x)\}$, которая сходится к сосредоточенной в точке

$x = x^*$ δ-функции переменной x на следе $u(x, t^*)$ решения задачи (2.1)–(2.3). Для этого рассмотрим на плоскости значений пар интегралов (2.11) последовательность гладких положительных функций $\Psi_n^*(A, B)$, которая сходится к δ-функции плоскости (A, B), сосредоточенной в точке (A^*, B^*), и тождественно обращается в нуль вне $1/n$-окрестности точки (A^*, B^*).

Введем обозначения для следов этих функций, а именно положим

$$\lambda_n^*(x) = \Psi_n^*(A^u(x, t^*), B^u(x, t^*)). \tag{3.2}$$

В силу предполагаемой гладкости для достаточно больших значений n функции $\lambda_n^*(x)$ отличны от нуля лишь в окрестности точки x^*, размеры которой убывают с ростом n.

Для упрощения последующих формул введем обозначения (см. (2.6) и (2.11))

$$F_1^*(x) = \exp\left\{ -\int_{x_0}^{x} F(x_0, x, y_0, y_1)\, dx \right\}\Bigg|_{\substack{x_0=0\\ y_0=A^u(x,t^*)\\ y_1=B^u(x,t^*)}}.$$

Положим

$$s_n = \int_0^1 \lambda_n^*(x) F_1^*(x)\, dx$$

и рассмотрим следующую последовательность вариационных множителей вида (2.6):

$$\rho_n^*(x, u, u_x) = s_n^{-1} \Psi_n^*(A, B(x, u, u_x)) F_0(x, u, u_x), \tag{3.3}$$

обладающих по построению свойством нормировки

$$\int_0^1 \rho_n^*(x, u, u_x)|_{t=t^*}\, dx = 1.$$

Согласно свойствам функций Ψ_n^* (см. (3.2)), очевидно, будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \rho_n^*(x, u, u_x)|_{t=t^*} = \delta(x^*). \tag{3.4}$$

В [12, 13] доказано, что функционалы

$$J(u) = \int_0^1 \Phi(x, u, u_x)\, dx,$$

возникающие в левой части (1.5), построенные, как указано в (2.5)–(2.11), удовлетворяют тождеству

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 \Phi(x, u, u_x)\, dx = -\int_0^1 \rho(x, u, u_x)\,(a u_{xx} + b) u_t\, dx. \tag{3.5}$$

Объединяя (1.5) и (3.5), получим интегральное тождество

$$\int_0^1 \rho(x, u, u_x)(a u_{xx} + b - u_t) u_t\, dx = 0. \tag{3.6}$$

Положим в (3.6) $t = t^*$, подставим в качестве ρ элементы $\rho_n^*(x, u, u_x)$ вида (3.3) и перейдем к пределу при $n \to \infty$. В силу (3.4) и (3.1) после вышеуказанной процедуры получим

$$u_t(x^*, t^*) = (au_{xx} + b)\big|_{\substack{x=x^*\\ t=t^*}},$$

т. е. уравнение (2.1) выполняется в любой данной точке $(x^*, t^*) \in Q_T$ такой, что имеет место свойство (3.1).

Согласно условию (3) теоремы 3.1 для данного $t^* \in (0, T]$ неравенство (3.1) нарушается не более чем в конечном числе точек x_j, $j = 1, \dots, N(t^*)$. В силу предполагаемой гладкости $u(x,t) \in C^{2,1}$, переходя к пределу при $x \to x_j$, мы легко покажем, что уравнение (2.1) выполняется во всех точках (x_j, t^*) и, следовательно, во всем прямоугольнике Q_T.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.

2. *Кружков С. Н.* Нелинейные параболические уравнения с двумя независимыми переменными // Тр. Моск. мат. об-ва. 1967. Т. 16. С. 329–346.

3. *Кружков С. Н.* Квазилинейные параболические уравнения и системы с двумя независимыми переменными // Тр. семинара И. Г. Петровского. 1979. № 5. С. 217–272.

4. *Олейник О. А., Кружков С. Н.* Квазилинейные параболические уравнения второго порядка со многими независимыми переменными // Успехи мат. наук. 1961. Т. 16, № 5. С. 115–155.

5. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. М.: Наука, 1985.

6. *Зеленяк Т. И.* О качественных свойствах решений квазилинейных смешанных задач для уравнений параболического типа // Мат. сб. 1977. Т. 104, № 3. С. 486–510.

7. *Лаврентьев (мл.) М. М.* Оценка старшей производной для некоторых нелинейных параболических уравнений // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 1. С. 72–81.

8. *Tonelli L.* Fondamenti di calcolo della variazioni. Bologna: Eds. Zanichelli, 1923. V. 2.

9. *Nagumo M.* Uber die gleichmassige Summierbarkeit und ihre Anwendung auf ein Variationsproblema // Japan J. Math. 1929. V. 6. P. 173–182.

10. *Бернштейн С. Н.* Об уравнениях вариационного исчисления // Собрание сочинений. М.: Изд-во Академии наук СССР, 1960. Т. 3. Дифференциальные уравнения, вариационное исчисление и геометрия. С. 191–242.

11. *Zelenyak T. I., Lavrentiev M. M., Jr., Vishnevskii M. P.* Qualitative theory of parabolic equations. Utrecht, The Netherlands: VSP, 1997.

12. *Белоносов В. С., Зеленяк Т. И.* Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1975.

13. *Зеленяк Т. И.* О стабилизации решений граничных задач для параболического уравнения второго порядка с одной пространственной переменной // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 1. С. 34–45.

14. *Lavrentiev Jr. M. M., Broadbridge P., Belov V.* Boundary value problems for strongly degenerate parabolic equations // Comm. Partial Differential Equations. 1997. V. 22, N 1–2. P. 17–38.

15. *Филиппов А. Ф.* Условия существования решений квазилинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1961. Т. 141, № 3. С. 568–570.

16. *Dlotko T.* Examples of parabolic problems with blowing up derivatives // J. Math. Anal. Appl. 1991. V. 154. P. 226–237.

17. *Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P.* Blow-up in quasilinear parabolic equations. Berlin: de Gruyter, 1995. (de Gruyter Exposition in Mathematics; v. 19).

18. *Самарский А. А., Михайлов А. П.* Математическое моделирование. Идеи. Методы. Примеры. М.: Наука, 1997.

19. *Fila M., Lieberman G.* Derivative blow-up and beyond for quasilinear parabolic equations // Differential Integral Equations. 1994. V. 7, N 3/4. P. 811–822.

20. *Angenent S., Fila M.* Interior gradient blow-up in a semilinear parabolic equation // Differential Integral Equations. 1996. V. 9, N 5. P. 865–877.

21. *Bertsch M., Dal Passo R.* A parabolic equation with a mean-curvature type operator // Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States. 3. Eds. N. G. Lloyd et al., Boston; Basel; Berlin: Birkhauser, 1992. P. 89–97.

22. *Bertsch M., Dal Passo R., Franchi B.* A degenerate parabolic equation in noncylindrical domains // Math. Ann. 1992. V. 294, N 3. P. 551–578.

23. *Bertsch M., Dal Passo R.* Hyperbolic phenomena in a strongly degenerate parabolic equation // Arch. Rational Mech. Anal. 1992. V. 117, N 4. P. 349–387.

24. *Barenblatt G. I., Bertsch M., Dal Passo R., Prostokishin V. M., Ughi M.* A mathematical model of turbulent heat and mass transfer in stably stratified shear flow // J. Fluid Mech. 1993. V. 253. P. 34–45.

25. *Lavrentiev Jr. M. M.* “Gradient Blowing-Up" solutions to parabolic problems: Examples and available solvability results. Wollongong, Australia, 1999, 27p. (Preprint / School of Math. and Applied Stat. University of Wollongong; N 3.99)

26. *Вишневский М. П., Зеленяк Т. И., Лаврентьев (мл.) М. М.* Поведение решений нелинейных параболических уравнений при большом времени // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 3. С. 435–453.

27. *Ball J., Mizel V.* Singular minimizers in the calculus of variations // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) 1984. V. 11. P. 143–146.

28. *Сычев М. А.* К вопросу о регулярности решений вариационных задач // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 4. С. 118–142.

29. *Davie A. M.* Singular minimizers in the calculus of variations in one dimension // Arch. Rational Mech. Anal. 1988. V. 101, N 2. P. 161–177.

30. *Сычев М. А.* Характеристика свойств слабой-сильной сходимости интегральных функционалов в терминах интеграндов. Новосибирск, 1994. (Препринт / Институт математики СО РАН; № 11).

31. *Лаврентьев (мл.) М. М.* Разрешимость нелинейных параболических задач // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 6. С. 1110–1116.

32. *Crandall M. G., Ishii H., Lions P. L.* User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. V. 27. P. 1–67.

33. *Matano H.* Nonincrease of the lap–number of a solution for a one-dimensional semilinear parabolic equation // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA. 1982. V. 29, N 2. P. 401–441.

34. *Angenent S.* The zero set of a solution of a parabolic equation // J. Reine Angew. Math. 1988. V. 390. P. 79–96.

35. *Angenent S.* Nodal properties of solutions of parabolic equations // Rocky Mountain J. Math. 1991. V. 21, N 2. P. 585–592.

36. *Brunovsky P., Polacik P., Sandstede B.* Convergence in general periodic parabolic equations in one space dimension // Nonlinear Anal. 1992. V. 18, N 3. P. 209–215.

Статья поступила 19 апреля 2005 г.

Лаврентьев (мл.) Михаил Михайлович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
mmlavr@nsu.ru