Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2005. Том 46, № 5

УДК 517.983

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ЯДЕРНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В. Б. Коротков

Аннотация: Доказывается критерий ядерности линейного оператора и устанавливается вид наибольшего двустороннего идеала множества всех вполне непрерывных ахиезеровских интегральных операторов в L_2 и множества всех ахиезеровских интегральных операторов в L_2.

Ключевые слова: ядерный оператор, интегральный оператор Гильберта — Шмидта, карлемановский интегральный оператор, ахиезеровский интегральный оператор, двусторонний идеал.

Пусть (X, μ) — пространство с положительной конечной мерой μ, не имеющей атомов, $L_0 = L_0(X, \mu)$ — совокупность всех определенных на X μ-измеримых μ-п.в. конечных функций (с обычным отождествлением функций, отличающихся одна от другой лишь на множестве меры 0), $L_2 = L_2(X, \mu)$ — пространство всех $f \in L_0$ с конечной нормой

$$\|f\| = \left(\int_X |f(t)|^2 \, d\mu(t) \right)^{1/2}.$$

Интеграл понимается в лебеговом смысле. Через (f, g) обозначим скалярное произведение функций f, g из L_2:

$$(f, g) = \int_X f(t)\overline{g(t)} \, d\mu(t).$$

Далее предполагается, что L_2 — сепарабельное пространство. Под оператором в L_2 будем понимать линейный непрерывный оператор, определенный на L_2 и действующий в L_2. Оператор T в L_2 называется *интегральным*, если существует определенная на $X \times X$ $(\mu \times \mu)$ — измеримая $(\mu \times \mu)$-п.в. конечная функция $K(s, t)$ такая, что для всех $f \in L_2$

$$Tf(s) = \int_X K(s, t) f(t) \, d\mu(t)$$

для μ-п.в. $s \in X$. Функция $K(s, t)$ называется *ядром интегрального оператора* T. Интегральный оператор называется *карлемановским*, если его ядро $K(s, t)$ удовлетворяет условию Т. Карлемана

$$\int_X |K(s, t)|^2 \, d\mu(t) < \infty \quad \text{для } \mu\text{-п.в. } s \in X.$$

Если ядро $K(s,t)$ интегрального оператора T удовлетворяет условию Гильберта — Шмидта

$$\int\limits_X \int\limits_X |K(s,t)|^2 \, d\mu(t) d\mu(s) < \infty,$$

то T называется *интегральным оператором Гильберта — Шмидта.* Совокупность всех интегральных операторов Гильберта — Шмидта обозначим через C_2. *Ядерным оператором* называется оператор в L_2, представимый в виде произведения двух операторов из C_2. Совокупность всех ядерных операторов обозначим через C_1. Интегральный оператор назовем *ахиезеровским*, если его ядро $K(s,t)$ удовлетворяет условию Н. И. Ахиезера [1]: существует неотрицательная функция $\Lambda \in L_0$ такая, что $|K(s,t)| \le \Lambda(s)\Lambda(t)$ для $(\mu \times \mu)$-п.в. $(s,t) \in X \times X$. Обозначим через $\widetilde{K}$ совокупность всех операторов ортогонального проектирования в L_2, являющихся, кроме того, карлемановскими интегральными операторами.

Лемма 1. *Пусть T — оператор в L_2. Если для любого $W \in \widetilde{K}$ оператор TW принадлежит C_2, то $T \in C_2$.*

Доказательство. Предположим, что $T \notin C_2$. По аналогии с [2, с. 562; 3, с. 43] построим разбиение $\{e_n\}$ множества X на попарно не пересекающиеся множества с положительными мерами так, чтобы (здесь и далее $P_e f = \chi_e f$, где χ_e — характеристическая функция множества e) $TP_{\tilde{e}_m} \notin C_2$ для всех $m = 1, 2, 3, \ldots$, где

$$\tilde{e}_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} e_n.$$

Пусть $\{w_{n,k}\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольный ортонормированный базис в $L_2(e_n)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Продолжим функции $w_{n,k}$ нулем на $X \setminus e_n$ и за продолженными функциями сохраним их прежнее обозначение. Так как носители функций $w_{n,k}$ при фиксированном k попарно не пересекаются, то для каждого k оператор

$$D_k f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, w_{n,k}) w_{n,k}$$

принадлежит $\widetilde{K}$. Следовательно, $TD_k \in C_2$, поэтому для любого $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Tw_{n,k}\|^2 < \infty. \tag{1}$$

Так как функции $w_{n,k}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, $n = m,\ m+1,\ m+2, \ldots$, образуют ортонормированный базис в $L_2(\tilde{e}_m)$, то из $TP_{\tilde{e}_m} \notin C_2$ следует, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \|Tw_{n,k}\|^2 = \infty.$$

Отсюда и из (1) вытекает, что для любого $m = 1, 2, 3, \ldots$ найдутся индексы $k_m < k_{m+1}$ такие, что $k_1 = 0$ и

$$\sum_{k=k_m+1}^{k_{m+1}} \sum_{n=m}^{\infty} \|Tw_{n,k}\|^2 > m. \tag{2}$$

В силу того, что носители функций $w_{n,k}$ при любом фиксированном k попарно не пересекаются, для каждого $j = 1, 2, 3, \dots$ и $s \in e_j$ имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=k_m+1}^{k_{m+1}} \sum_{n=m}^{\infty} |w_{n,k}(s)|^2 \le \sum_{k=1}^{k_{j+1}} |w_{j,k}(s)|^2 < \infty.$$

Отсюда и из следствия IV.2.4 в [4, с. 121] вытекает, что оператор ортогонального проектирования

$$W_0 f = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=k_m+1}^{k_{m+1}} \sum_{n=m}^{\infty} (f, w_{n,k}) w_{n,k}$$

карлемановский. Следовательно, $W_0 \in \widetilde{K}$. Тогда $TW_0 \in C_2$ и

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=k_m+1}^{k_{m+1}} \sum_{n=m}^{\infty} \|Tw_{n,k}\|^2 < \infty,$$

что противоречит (2).

Лемма 2. *Пусть T — оператор в L_2. Если для любого $W \in \widetilde{K}$ оператор TW принадлежит C_1, то $T \in C_1$.*

Доказательство. Пусть $T = U_0|T|$ — полярное разложение оператора T [5, с. 420]. В силу [5, с. 421] $|T| = U_0^* T$, и поэтому $T \in C_1$ тогда и только тогда, когда $|T| \in C_1$. Покажем, что $|T| \in C_1$.

Для любого $W \in \widetilde{K}$ имеем $|T|W = U_0^* TW \in C_1$, где

$$Wf = \sum_{n=1}^{\infty} (f, v_n) v_n,$$

$\{v_n\}$ — ортонормированная система в L_2. Поэтому по теореме 15.5.7 из [6, с. 246]

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(|T|Wv_n, v_n)| < \infty.$$

Отсюда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \, |T|^{1/2} W v_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} (|T|^{1/2} W v_n, |T|^{1/2} W v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (|T| W v_n, v_n) < \infty.$$

Пусть $\{z_n\}$ — ортонормированный базис в L_2, содержащий последовательность $\{v_n\}$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \| \, |T|^{1/2} W z_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \| \, |T|^{1/2} W v_n\|^2 < \infty.$$

Значит, $|T|^{1/2} W \in C_2$. Тогда по лемме 1 $|T|^{1/2} \in C_2$. Следовательно, $|T| = |T|^{1/2} |T|^{1/2} \in C_1$ и $T \in C_1$.

Лемма 3. *Пусть T — оператор в L_2. Если для любого вполне непрерывного карлемановского оператора V оператор TV принадлежит C_1, то $T \in C_1$.*

Доказательство. Пусть $W \in \widetilde{K}$ и Z — произвольный вполне непрерывный (не обязательно карлемановский) оператор в L_2. По лемме о правом умножении [4, с. 122] WZ — карлемановский оператор. Тогда $TWZ \in C_1$. Пусть

$TW = U|TW|$ — полярное разложение оператора TW. По теореме Дж. Неймана [1, с. 322] оператор $|TW|$ можно представить в виде $|TW| = \Gamma + Q$, где $\Gamma \in C_2$,

$$Qf = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (f, p_n) p_n,$$

$\{p_n\}$ — ортонормированная система. Так как $|TW|Z = U^*TWZ \in C_1$ и $\Gamma \in C_2$, то $QZ \in C_2$ для любого вполне непрерывного оператора Z. Пусть $\{\zeta_n\}$ — произвольная сходящаяся к 0 числовая последовательность, и пусть

$$Zf = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n (f, p_n) p_n.$$

Тогда

$$QZf = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n \lambda_n (f, p_n) p_n.$$

Так как $QZ \in C_2$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\zeta_n \lambda_n|^2 < \infty$. В силу произвольности $\{\zeta_n\}$ имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$. Тем самым $Q \in C_2$. Следовательно, $|TW|$ — вполне непрерывный оператор. Тогда $TW = U|TW|$ — вполне непрерывный оператор. Пусть

$$TWf = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n (f, u_n) h_n$$

— его представление Шмидта, и пусть

$$\tau f = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n (f, u_n) u_n,$$

где $\{\sigma_n\}$ — произвольная сходящаяся к 0 последовательность положительных чисел. Тогда

$$TW\tau f = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sigma_n (f, u_n) h_n.$$

Так как $TW\tau \in C_1$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n \sigma_n < \infty$. В силу произвольности $\{\sigma_n\}$ имеем $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n < \infty$ и, следовательно, $TW \in C_1$. Отсюда по лемме 2 $T \in C_1$.

Обозначим через Δ_1 множество всех ахиезеровских интегральных операторов в L_2, через Δ_2 — множество всех вполне непрерывных операторов из Δ_1, через Δ_3 — множество карлемановских операторов из Δ_1, через Δ_4 — множество всех вполне непрерывных операторов из Δ_3.

Теорема. *Пусть T — оператор в L_2. Для того чтобы $T \in C_1$, необходимо и достаточно, чтобы для любых операторов $K \in \Delta_2$, $L \in \Delta_4$ и любого вполне непрерывного карлемановского интегрального оператора M в L_2 оператор $KLTM$ принадлежал Δ_1.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Будем доказывать теорему методом от противного. Предположим, что T — не ядерный оператор. Тогда по лемме 3 найдется вполне непрерывный карлемановский оператор M_0 в L_2 такой, что $TM_0 \notin C_1$. Имеем

$$TM_0 f = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (f, \varphi_n)\psi_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n = \infty, \tag{3}$$

где $\{\mu_n\} \downarrow 0$, $\{\varphi_n\}$, $\{\psi_n\}$ — ортонормированные последовательности из L_2. Ортонормированная последовательность $\{s_n\}$ из L_2 называется *системой абсолютной сходимости* для l_2, если для любой последовательности $\{a_n\} \in l_2$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|s_n(t)|$ сходится μ-п.в., причем множество сходимости ряда зависит от $\{a_n\}$ [7]. Выберем ортонормированную систему $\{w_n\}$ абсолютной сходимости для l_2 так, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n |w_n(s)|^2 = \infty$$

для всех s из некоторого множества $e \subset X$, $\mu e > 0$. Существование такой системы вытекает из $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu_n = \infty$ и теоремы 13 из [7]. Тогда найдутся множество $e_0 \subset e$, $\mu e_0 > 0$, и последовательность $\{\alpha_n\} \downarrow 0$ такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n |w_n(s)|^2 = \infty \quad \text{для всех } s \in e_0. \tag{4}$$

Рассмотрим операторы

$$L_0 f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{1/2} (f, \psi_n) \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}, \quad K_0 f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{1/2} \left(f, \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}\right) w_n,$$

где $\{e_n\}$ — какая-нибудь последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с положительными мерами, $\{\psi_n\}$ — ортонормированная система из (3). Так как множества e_n, $n = 1, 2, 3, \dots$, попарно не пересекаются, то L_0 — карлемановский интегральный оператор в L_2 с ядром

$$L_0(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{1/2} \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \overline{\psi_n(t)}.$$

Это ядро удовлетворяет условию Н. И. Ахиезера. Действительно,

$$|L_0(s,t)| \le \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{1/2} n^2 \frac{\chi_{e_n}(s)}{\sqrt{\mu e_n}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |\psi_n(t)| = A(s)B(t) \le \Lambda(s)\Lambda(t),$$

где $\Lambda(\sigma) = \max(A(\sigma), B(\sigma))$. Итак, $L_0 \in \Delta_4$.

Покажем, что $K_0 \in \Delta_2$. Для этого проверим, что K_0 — интегральный оператор с ядром

$$K_0(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{1/2} w_n(s) \frac{\chi_{e_n}(t)}{\sqrt{\mu e_n}}.$$

Для каждой функции $f \in L_2$ имеем

$$\int\limits_X |K_0(s,t)|\,|f(t)|\,d\mu(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{1/2} |w_n(s)| \int\limits_X |f(t)| \frac{\chi_{e_n}(t)}{\sqrt{\mu e_n}}\,d\mu(t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \alpha_n^{1/2} |w_n(s)|.$$

Так как $\left\{\frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\mu e_n}}\right\}$ — ортонормированная система и $|f| \in L_2$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$. Отсюда в силу того, что $\{w_n\}$ — система абсолютной сходимости для l_2, следует, что для μ-п.в. $s \in X$

$$\int\limits_X |K_0(s,t)|\,|f(t)|\,d\mu(t) < \infty.$$

Таким образам, K_0 — вполне непрерывный интегральный оператор, $K_0(s,t)$ удовлетворяет условию Н. И. Ахиезера. Итак, $K_0 \in \Delta_2$.

Пусть N_0 — оператор в L_2, определяемый равенством

$$N_0 f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, w_n)\varphi_n,$$

где $\{\varphi_n\}$ — ортонормированная система из (3). Возьмем оператор $K_0L_0TM_0N_0$. Имеем

$$K_0L_0TM_0N_0 f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n (f, w_n) w_n.$$

По лемме о правом умножении [4, с. 122] оператор M_0N_0 карлемановский, поэтому в силу условий доказываемой теоремы оператор $\tau_0 = K_0L_0TM_0N_0$ является ахиезеровским интегральным оператором. Пусть $\tau_0(s,t)$ — ядро τ_0. Тем самым $|\tau_0(s,t)| \le \lambda(s)\lambda(t)$ для $(\mu \times \mu)$-п.в. $(s,t) \in X \times X$. Положим

$$\|f\|_\lambda = \int\limits_X \lambda(t)|f(t)|\,d\mu(t).$$

Тогда для всех f из L_2 с конечной нормой $\|f\|_\lambda$

$$\begin{aligned}\left\|\tau_0^{1/2} f\right\|^2 = (\tau_0 f, f) &\le \int\limits_X \int\limits_X |\tau_0(s,t)|\,|f(t)|\,d\mu(t)|f(s)|\,d\mu(s) \\ &\le \int\limits_X \lambda(t)|f(t)|\,d\mu(t) \int\limits_X \lambda(s)|f(s)|\,d\mu(s) = \|f\|_\lambda^2.\end{aligned}$$

Отсюда по теореме IV.2.13 из [4, с. 125] $\tau_0^{1/2}$ — карлемановский интегральный оператор. При этом

$$\tau_0^{1/2} f = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{1/2} \mu_n^{1/2} (f, w_n) w_n.$$

Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n |w_n(s)|^2 < \infty$$

для μ-п.в. $s \in X$, что противоречит (4).

Доказанная теорема усиливает теорему 2 из [8], теорему из [2] и теорему 3 из [3, с. 41].

Следствие 1. *Каждый двусторонний идеал множества Δ_2 содержится в двустороннем идеале C_1 множества Δ_2.*

Следствие 2. *Каждый двусторонний идеал множества Δ_1 содержится в двустороннем идеале C_1 множества Δ_1.*

Справедливость следствий вытекает из доказанной теоремы и из того, что, как показано в [2, с. 563–564], каждый вполне непрерывный карлемановский интегральный оператор в L_2 есть произведение двух операторов из Δ_4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966.
2. *Коротков В. Б.* Критерий ядерности линейных операторов // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 560–564.
3. *Коротков В. Б.* Введение в алгебраическую теорию интегральных операторов. Владивосток: Колорит, 2000.
4. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
5. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
6. *Пич А.* Операторные идеалы. М.: Мир, 1982.
7. *Никишин Е. М.* Резонансные теоремы и надлинейные операторы // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, № 6. С. 129–191.
8. *Коротков В. Б.* Об алгебраических свойствах ахиезеровских интегральных операторов // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 569–572.

Статья поступила 5 апреля 2005 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090