Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2005. Том 46, № 5

УДК 516.946+519.632.8

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ НАХОЖДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. И. Кожанов

Аннотация: Исследуется обратная задача нахождения коэффициента теплопроводности вместе с решением уравнения теплопроводности. В качестве условия переопределения задается значение решения в финальный момент времени. Доказывается существование регулярного решения.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности в дивергентной форме, задача с неизвестным коэффициентом теплопроводности, условие финального переопределения, регулярное решение.

Процесс распространения тепла в стержне описывается следующим общим уравнением теплопроводности:

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(p(x)u_x) - q(x)u + f(x,t),$$

в котором функция $u(x,t)$ характеризует температуру в точке x в момент времени t, ρ, p и q характеризуют свойства материала, функция $f(x,t)$ определяется внешними источниками, см. [1]. Если свойства материала или (и) внешней среды заранее неизвестны, то в указанном уравнении наряду с решением $u(x,t)$ неизвестными могут оказаться один или несколько коэффициентов или (и) функция $f(x,t)$. В математике задачи теории уравнений с частными производными, в которых неизвестными являются и решение уравнения, и один или несколько его коэффициентов или (и) правая часть, называются *обратными задачами*. Как правило, в подобных задачах вместе с граничными условиями, характерными для той или иной прямой задачи (задачи с известными коэффициентами и известной правой частью), задается дополнительная информация, обусловленная наличием дополнительной неизвестной функции (функций). Если ограничиться моделями, в которых неизвестные коэффициенты не зависят от переменной t или же правая часть $f(x,t)$ содержит неизвестную составляющую, не зависящую от переменной t (такие модели вполне адекватно описывают реальные процессы, см. [1]), то применительно к уравнению теплопроводности условия прямой задачи соответствуют условиям той или иной начально-краевой задачи для параболического уравнения. Дополнительная же информация представляет собой, как правило, либо информацию о состоянии среды (т. е. о температуре) в определенный момент времени, либо информацию об усредненной температуре. В первом случае обратную задачу называют *задачей с финальным*

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00819).

переопределением, во втором же — *задачей с интегральным переопределением.* Обратные задачи одного из указанных типов для уравнения теплопроводности достаточно хорошо изучены в случаях

1) неизвестной правой части — в [2–9];
2) неизвестного коэффициента $q(x)$ — в [8–13];
3) неизвестного коэффициента $\rho(x)$ — в [10, 11];
4) неизвестного коэффициента $q(x)$ и неизвестной правой части — в [14, 15];
5) неизвестных коэффициентов $\rho(x)$ и $q(x)$ — в [16].

Задачи нахождения вместе с решением неизвестного коэффициента $p(x)$ в рамках рассматриваемых обратных задач с финальным или интегральным переопределением ранее не изучались. Восполнить этот пробел хотя бы частично мы и попытаемся в настоящей работе. Более точно, настоящая работа будет посвящена получению достаточных, т. е. не обязательно минимальных, условий, обеспечивающих разрешимость обратной задачи нахождения вместе с решением уравнения теплопроводности коэффициента $p(x)$ при выполнении условия финального переопределения.

Отметим еще, что обратная задача для одномерного уравнения теплопроводности с неизвестным коэффициентом $p(x)$ изучалась в работе [17], однако в ней граничные условия были иными, нежели в настоящей работе: именно, задавались начальное условие и значения решения $u(x,t)$ и производной $u_x(x,t)$ в точках, соответствующих концам стержня. Указанные условия позволили редуцировать рассматриваемую в [17] обратную задачу к некоторой условно-корректной задаче, к которой применялся метод квазиобращения.

Перейдем к содержательной части работы.

Пусть D — интервал $(0,1)$, Q — прямоугольник $(0,1)\times(0,T)$, $0<T<+\infty$. Далее, пусть $q(x,t)$, $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\mu_0(t)$ и $\mu_1(t)$ суть функции, заданные при $x\in\overline{D}$, $t\in[0,T]$.

Рассмотрим следующее уравнение теплопроводности:

$$Lu \equiv u_t - \frac{\partial}{\partial x}((p(x)u_x)) + q(x,t)u = f(x,t). \tag{1}$$

Обратная задача. *Найти функции $u(x,t)$ и $p(x)$, связанные в прямоугольнике Q уравнением* (1), *при выполнении для функции $u(x,t)$ условий*

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x\in D, \tag{2}$$

$$u(0,t) = \mu_0(t), \quad u(1,t) = \mu_1(t), \quad 0<t<T, \tag{3}$$

$$u(x,T) = u_1(x), \quad x\in D. \tag{4}$$

Уравнение (1) отличается от общего уравнения теплопроводности тем, что ρ в нем — тождественно единичная функция. Такое предположение (т. е. предположение $\rho\equiv 1$) не меняет сути результатов, соответствующих общему уравнению, и сделано лишь для упрощения выкладок.

Ниже нам понадобится вспомогательное утверждение о разрешимости и свойствах решений для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений.

Утверждение. *Пусть $a(x)$ и $b(x)$ — функции из пространства $C^1(\overline{D})$, $c(x)$ — функция из пространства $W_2^1(D)$, и пусть выполняются условия*

$$b(x) - \frac{1}{2}a'(x) \ge b_0 > 0, \quad b(x) + \frac{1}{2}a'(x) \ge b_0 > 0, \quad 0 < b_1 \le b(x) \le b_2,$$

$$0 < c_0 \le c(x) \le c_1 \quad \text{при } x \in \overline{D};$$
$$a(0) \le 0, \quad a(1) \ge 0.$$

Тогда уравнение

$$a(x)v' + b(x)v = c(x)$$

имеет единственное решение, принадлежащее пространству $W_2^1(D)$, *и для этого решения выполняются неравенства*

$$\frac{c_0}{b_2} \le v(x) \le \frac{c_1}{b_1}, \quad x \in \overline{D},$$

$$\int_0^1 v'^2(x)dx \le \frac{2}{b_0^2}\int_0^1 c'^2(x)dx + \frac{4}{b_0^4}\max_{[0,1]}[b'^2(x)]\int_0^1 c^2(x)\,dx.$$

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $c(x) \in C^1(\overline{D})$. При $\varepsilon > 0$ краевая задача

$$-\varepsilon v'' + a(x)v' + b(x)v = c(x), \quad v'(0) = v'(1) = 0 \tag{5}$$

разрешима в пространстве $C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, см. [18]. Для решений этой краевой задачи имеют место равенства

$$\varepsilon\int_0^1 v'^2(x)\,dx + \int_0^1 \Big[b(x) - \frac{1}{2}a'(x)\Big]v^2(x)\,dx$$
$$- \frac{1}{2}a(0)v^2(0) + \frac{1}{2}a(1)v^2(1) = \int_0^1 c(x)v(x)\,dx,$$

$$\varepsilon\int_0^1 v''^2(x)\,dx + \int_0^1 \Big[b(x) + \frac{1}{2}a'(x)\Big]v'^2(x)\,dx$$
$$= -\int_0^1 b'(x)v(x)v'(x)\,dx + \int_0^1 c'(x)v'(x)\,dx.$$

Используя условия утверждения и неравенство Юнга, нетрудно из первого равенства вывести априорную оценку

$$\varepsilon\int_0^1 v'^2(x)\,dx + \frac{b_0}{2}\int_0^1 v^2(x)\,dx \le \frac{1}{b_0}\int_0^1 c^2(x)\,dx. \tag{6}$$

Применяя оценку (6), условия утверждения и неравенство Юнга, из второго равенства нетрудно вывести вторую априорную оценку

$$b_0\int_0^1 v'^2(x)\,dx + \varepsilon\int_0^1 v''^2(x)\,dx \le \frac{2}{b_0}\int_0^1 c'^2(x)\,dx + 4b_0^{-3}\max_{[0,1]}[b'^2(x)]\int_0^1 c^2(x)\,dx. \tag{7}$$

Очевидно, что отрицательный минимум или же минимум, равный нулю, функция $v(x)$ на отрезке $[0,1]$ достигать не может. Следовательно, функция $v(x)$

строго положительна на этом отрезке. В точке x^* положительного минимума функции $v(x)$ имеют место неравенства

$$b_2 v(x^*) \geq b(x^*)v(x^*) \geq -\varepsilon v''(x^*) + a(x^*)v'(x^*) + b(x^*)v(x^*) = c(x^*) \geq c_0.$$

Эти неравенства приводят к первому из требуемых неравенств для функции $v(x)$:

$$v(x) \geq \frac{c_0}{b_2}, \quad x \in [0,1].$$

Аналогичные соображения для точки положительного максимума дают второе из требуемых неравенств:

$$v(x) \leq \frac{c_1}{b_1}, \quad x \in [0,1].$$

Из оценок (6) и (7) вытекает существование последовательности $\{\varepsilon_k\}$ положительных чисел и функции $v(x)$ из пространства $W_2^1(D)$ таких, что для чисел ε_k и решений $v_{\varepsilon_k}(x)$ краевой задачи (5) при $k \to \infty$ имеют место сходимости $\varepsilon_k \to 0$, $v_{\varepsilon_k}(x) \to v(x)$ слабо в пространстве $W_2^1(D)$ и почти всюду на отрезке $[0,1]$, $\varepsilon_k v''_{\varepsilon_k}(x) \to 0$. Очевидно, что предельная функция $v(x)$ будет искомым решением исходного дифференциального уравнения первого порядка и для нее на отрезке $[0,1]$ будут выполняться требуемые неравенства.

Если функция $c(x)$ принадлежит пространству $W_2^1(D)$, то, приближая ее семейством гладких функций $\{c_m(x)\}$ при выполнении неравенств $c_0 \leq c_m(x) \leq c_1$ (что возможно), используя доказанное выше существование решений исходного уравнения с гладкой правой частью и наличие априорных оценок, нетрудно вновь выбрать сходящуюся подпоследовательность и для предельной функции получить требуемый результат. Утверждение доказано.

Определим пространства, функции и числа, которые понадобятся нам ниже.

Пусть H, H_1, V и V_1 суть следующие пространства:

$$H = \bigl\{v(x,t) : v(x,t) \in L_2\bigl(0,T; W_2^2(D)\bigr) \cap L_\infty\bigl(0,T; W_2^1(D)\bigr),\ v_t(x,t) \in L_2(Q)\bigr\},$$

$$H_1 = \bigl\{v(x,t) : v(x,t) \in L_2\bigl(0,T; W_2^2(D)\bigr) \cap L_\infty\bigl(0,T; W_2^1(D)\bigr),\\ v_t(x,t) \in L_2(Q),\ v_{xxt}(x,t) \in L_2(Q)\bigr\},$$

$$V = \{v(x,t) : v(x,t) \in H,\ v_t(x,t) \in H\},$$
$$V_1 = \{v(x,t) : v(x,t) \in H_1,\ v_t(x,t) \in H_1\}$$

с нормами

$$\|v\|_H = \|v\|_{L_2(0,T;W_2^2(D))} + \|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(D))} + \|v_t\|_{L_2(Q)},$$

$$\|v\|_{H_1} = \|v\|_{L_2(0,T;W_2^2(D))} + \|v\|_{L_\infty(0,T;W_2^1(D))} + \|v_{xxt}\|_{L_2(Q)},$$

$$\|v\|_V = \|v\|_H + \|v_t\|_H, \quad \|v\|_{V_1} = \|v\|_{H_1} + \|v_t\|_{H_1}.$$

Далее, пусть $h(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $U(x,t)$ — функции

$$h(x) = \frac{u_0'(x)}{u_1'(x)}, \quad \varphi(x) = q(x,T)u_1(x) - f(x,T),$$

$$\psi(x) = h(x)\varphi(x) - q(x,0)u_0(x) + f(x,0), \quad U(x,t) = [\mu_1(t) - \mu_0(t)]x + \mu_0(t).$$

Теперь определим числа:

$$q_0 = \min_{\overline{Q}} q(x,t), \quad \bar{q}_0 = \max_{\overline{Q}} q(x,t), \quad q_1 = \max_{\overline{Q}} |q_t(x,t)|,$$

$$k_0 = \min_{\overline{D}} u_1''(x), \quad k_1 = \max_{\overline{D}} u_1''(x), \quad k_2 = \max_{\overline{D}} |u_1^{'''}(x)|,$$

$$h_0 = \max_{\overline{D}} |h(x)|, \quad h_1 = \max_{\overline{D}} |h'(x)|, \quad h_2 = \max_{\overline{D}} |u_1'(x)h''(x)|,$$

$$\varphi_0 = \operatorname{vrai}\min_{\overline{D}} \varphi(x), \qquad \varphi_1 = \operatorname{vrai}\max_{\overline{D}} \varphi(x),$$

$$\bar{\mu}_0 = |\mu_0'(0)| + |\mu_1'(0)|, \quad \bar{\mu}_1 = |\mu_0'(T)| + |\mu_1'(T)|,$$

$$M_i = \max_{[0,T]}\big[\big|\mu_0^{(i)}(t)\big| + \big|\mu_1^{(i)}(t)\big|\big], \quad i = 1,2,$$

$$K_1 = \frac{32h_1^2}{k_0^2}, \quad K_2 = K_1 \int_0^1 \varphi^2(x)\,dx + 4\int_0^1 \psi^2(x)\,dx,$$

$$K_3 = 16h_1^2 + \frac{64h_2^2}{k_0^2}, \quad K_4 = 16\big(h_1^2 + h_2^2\big)\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx + 8\int_0^1 \psi'^2(x)\,dx,$$

$$K_5 = \Bigg|2K_2 + 2\varepsilon_0 K_4 + \frac{(1+\varepsilon_0)\bar{\mu}_1^2}{1-4h_0^2} + \frac{M_2^2 T}{q_0} + \frac{\varepsilon_0 M_2^2 T}{2} + \frac{(1+\varepsilon_0)\bar{\mu}_0^2}{2} + \frac{q_1 M_1^2}{2}$$
$$+ \frac{1}{2}M_1^4 T^2 + \frac{4}{k_0^2}\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx + \frac{1}{q_0}\int_0^T\int_0^1 f_t^2\,dxdt - \int_0^T\int_0^1 f_t U_t\,dxdt + \frac{q_0}{4T}\int_0^1 u_1^2(x)\,dx\Bigg|,$$

$$K_6 = (2+\varepsilon_0)K_1 + \varepsilon_0 K_3 + \frac{4}{k_0^2},$$

$$A_0 = \frac{8T^2}{q_0}\left(\frac{q_1^2}{q_0} + \frac{q_1}{2}\right), \quad B_0 = \frac{8T^2 K_6}{q_0}, \quad C_0 = \frac{8T^2 K_5}{q_0},$$

$$A_1 = \left(\frac{1-4h_0^2}{4} - 16\varepsilon_0 h_1^2\right)^{-1}\left(\frac{q_1^2}{q_0} + \frac{q_1}{2}\right), \quad B_1 = \left(\frac{1-4h_0^2}{4} - 16\varepsilon_0 h_1^2\right)^{-1} K_6,$$

$$C_1 = \left(\frac{1-4h_0^2}{4} - 16\varepsilon_0 h_1^2\right)^{-1} K_5,$$

$$N_1 = \frac{B_0 C_1 + (1-B_1)C_0}{(1-A_0)(1-B_1) - A_1 B_0}, \quad N_2 = \frac{A_1 C_0 + (1-A_0)C_1}{(1-A_0)(1-B_1) - A_1 B_0},$$

$$K_7 = \frac{4}{q_0}\left[K_5 + K_6 N_2 + \left(\frac{q_1^2}{q_0} + \frac{q_1}{2}\right)N_1\right], \quad N_3 = \frac{8N_2}{3k_0},$$

$$N_4 = \left(\frac{32k_2}{3k_0^2} + \frac{2\sqrt{2}}{k_0}\right)N_2^{\frac{3}{2}} + \frac{8N_2}{3k_0}\left(\int_0^1 \varphi'^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \left(\frac{32k_2}{3k_0^2} + \frac{2\sqrt{2}}{k_0}\right)N_2\left(\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$N_5 = \frac{16}{3k_0}\left(N_2 + \int\limits_0^1 \varphi^2(x)\,dx\right),$$

$$N_6 = 2\left(N_2 + \int\limits_0^1 \varphi^2\,dx\right)\left[\left(\frac{32k_2}{3k_0^2} + \frac{2\sqrt{2}}{k_0}\right)N_2^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{3k_0}\left(\int\limits_0^1 \varphi'^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{32k_2}{3k_0^2} + \frac{2\sqrt{2}}{k_0}\right)\left(\int\limits_0^1 \varphi^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$N_7 = \frac{64}{3k_0^3}\left(N_2 + \int\limits_0^1 \varphi^2(x)\,dx\right),$$

$$N_8 = \frac{8}{k_0^2}\left(N_2 + \int\limits_0^1 \varphi^2(x)\,dx\right)\left[\left(\frac{32k_2}{3k_0^2} + \frac{2\sqrt{2}}{k_0}\right)N_2^{\frac{1}{2}} + \frac{8}{3k_0}\left(\int\limits_0^1 \varphi'^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{32k_2}{3k_0^2} + \frac{2\sqrt{2}}{k_0}\right)\left(\int\limits_0^1 \varphi^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

$$N_9 = 16\big[h_1^2(N_3 + N_5) + h_2^2 N_7\big], \quad N_{10} = 16\big[h_1^2(N_4 + N_6) + h_2^2 N_8\big] + \big(2q_1^2 + 1\big)N_1 + \frac{2\sqrt{2}}{k_0}\left(\int\limits_0^1 \psi'^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} N_2^{\frac{1}{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{k_0}\left(\int\limits_0^1 \psi'^4(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\limits_0^1 \varphi^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \left|4\int\limits_0^T\int\limits_0^1 U_{tt}^2\,dxdt + \varepsilon_0\int\limits_0^T\int\limits_0^1 U_{xtt}^2\,dxdt + \int\limits_0^T\int\limits_0^1 q^2U_{tt}^2\,dxdt + 4\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f_t^2\,dxdt - 2\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f_tU_{tt}\,dxdt + q_1\int\limits_0^T\int\limits_0^1 U_{tt}^2\,dxdt + (4q_1^2 + q_1)N_1 + \big(4\bar{q}_0^2 + 1\big)K_7\right|,$$

$$N_{11} = \frac{k_1N_9}{\big(1 - 2h_0^2\big)(\varphi_0 - m)}, \quad N_{11} = \frac{k_1N_{10}}{\big(1 - 2h_0^2\big)(\varphi_0 - m)},$$

$$N_{13} = \frac{1}{2}\big(N_{11} + \sqrt{N_{11}^2 + 4N_{12}}\big)$$

(здесь ε_0 и m — положительные числа, о величине которых мы скажем ниже).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$f(x,t) \in L_2(Q), \quad f_t(x,t) \in L_2(Q), \quad f(x,0) \in W_4^1(D),$$
$$f(x,T) \in W_4^1(D), \quad q(x,t) \in C^1(\overline{Q}),$$
$$u_0(x) \in C^3(\overline{D}), \quad u_1(x) \in C^3(\overline{D}), \quad h(x) \in C^3(\overline{D}), \quad \psi(x) \in C^2(\overline{D}),$$
$$\mu_0(t) \in C^2([0,T]), \quad \mu_1(x) \in C^2([0,T]); \tag{8}$$

$$q_0 > 0, \quad k_0 > 0, \quad 2h_0^2 < 1; \tag{9}$$

$$u_1'(0) \leq 0, \quad u_1'(1) \geq 0; \tag{10}$$

$$\varphi_0 > 0; \tag{11}$$

$$A_0 < 1, \quad B_1 < 1, \quad A_1 B_0 < (1 - A_0)(1 - B_1); \tag{12}$$

$$2N_{13}^{\frac{1}{2}} + N_2^{\frac{1}{2}} < \varphi_0; \tag{13}$$

$$u_0(0) = \mu_0(0), \quad u_0(1) = \mu_1(0), \quad u_1(0) = \mu_0(T), \quad u_1(1) = \mu_1(T), \tag{14}$$

$$h(0) = h(1) = u_1'(0)h'(0) = u_1'(1)h'(1) = 0, \quad \psi_0(0) = \mu_0'(0), \quad \psi(1) = \mu_1(T). \tag{15}$$

Тогда обратная задача (1)–(4) *имеет решение* $\{u(x,t),\, p(x)\}$ *такое, что* $u(x,t) \in V$, $p(x) \in W_2^1(D)$, $p(x) \geq p_0 > 0$, $p(x)u_x(x,t) \in L_2\big(0,T; W_2^1(D)\big)$, $p(x)u_{xt}(x,t) \in L_2\big(0,T; W_2^1(D)\big)$.

Доказательство. Воспользуемся методами срезок, регуляризации и неподвижной точки.

Пусть m — фиксированное число из интервала $\big(2N_{13}^{\frac{1}{2}} + N_2^{\frac{1}{2}}, \varphi_0\big)$ и

$$G(\xi) = \begin{cases} \xi, & \text{если } |\xi| < m, \\ m, & \text{если } \xi > m, \\ -m, & \text{если } \xi < -m. \end{cases}$$

Для заданной функции $v(x,t)$ определим функции $c_v(x)$ и $p_v(x)$ следующим образом: $c_v(x) = G(v_t(x,T)) + \varphi(x)$, $p_v(x)$ — решение обыкновенного дифференциального уравнения

$$u_1'(x)p_v'(x) + u_1''(x)p_v(x) = c_v(x). \tag{16}$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в прямоугольнике* Q *решением уравнения*

$$u_{tt} - p_u(x)u_{xxt} - p_u'(x)u_{xt} + q(x,t)u_t + q_t(x,t)u = f_t(x,t) \tag{17}$$

и такую, что для нее выполняются условие

$$u_t(x,0) = h(x)u_t(x,T) + u_1'(x)h'(x)p_u(x) + \psi(x), \quad x \in D, \tag{18}$$

и условия (3) *и* (4). Докажем, пользуясь методами неподвижной точки и регуляризации, что данная краевая задача разрешима в пространстве V.

Пусть ε_0 — фиксированное положительное число, ε — число из интервала $(0, \varepsilon_0)$, $v(x,t)$ — произвольная функция из пространства V_1, $F_v(x,t)$ и $\psi_v(x)$ — функции

$$F_v(x,t) = f_t(x,t) - q_t(x,t)v(x,t), \quad \psi_v(x) = u_1'(x)h'(x)p_v(x) + \psi(x).$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию* $u(x,t)$, *являющуюся в прямоугольнике* Q *решением уравнения*

$$u_{tt} - \varepsilon u_{xxtt} - p_v u_{xxt} - p_v'(x)u_{xt} + q(x,t)u_t = F_v(x,t) \tag{$17_{v,\varepsilon}$}$$

и такую, что для нее выполняются условие

$$u_t(x,0) = h(x)u_t(x,T) + \psi_v(x), \tag{18_v}$$

а также условия (3) *и* (4). Покажем, что эта задача разрешима в пространстве V_1.

Заметим прежде всего, что $c_v(x) \in W_2^1(D)$ и имеют место неравенства

$$0 < \varphi_0 - m \le c_v(x) \le \varphi_1 + m,$$

$$\int_0^1 c_v^2(x)\,dx \le 2\left[\int_0^1 v_t^2(x,T)\,dx + \int_0^1 \varphi^2(x)\,dx\right],$$

$$\int_0^1 c_v'^2(x)\,dx \le 2\left[\int_0^1 v_{xt}^2(x,T)\,dx + \int_0^1 \varphi'^2(x)\,dx\right]. \tag{19}$$

Первое следует из принадлежности функций $v_t(x,T)$ и $f(x,T)$ пространству $W_2^1(D)$, гладкости функций $q(x,T)$ и $u_1(x)$ (см. условие (8)), а также из свойства сохранения срезающей функцией $G(\xi)$ принадлежности пространству $W_2^1(D)$ [19, гл. II, § 3], второе — из условия (11), вновь из условия (8) и из способа построения функции $G(\xi)$. Указанное свойство функции $c_v(x)$, условия (8) и (10) на функцию $u_1(x)$ и приведенное выше утверждение означают, что функция $p_v(x)$ определяется уравнением (16) единственным образом: она будет принадлежать пространству $W_2^1(D)$ и для нее вследствие условий (11) и (8) будут выполняться неравенства

$$0 < \frac{\varphi_0 - m}{k_1} \le p_v(x) \le \frac{\varphi_1 + m}{k_0},$$

$$\int_0^1 p_v^2(x)\,dx \le \frac{4}{k_0^2}\int_0^1 c_v^2(x)\,dx, \quad \int_0^1 p_v'^2(x)\,dx \le \frac{8}{9k_0^2}\int_0^1 c_v'^2(x)\,dx + \frac{32k_2^2}{9k_0^4}\int_0^1 c_v^2(x)\,dx. \tag{20}$$

Из первых двух неравенств (20) следует, что уравнение ($17_{v,\varepsilon}$) псевдопараболическое относительно функции $u_t(x,t)$, краевая же задача ($17_{v,\varepsilon}$), (18_v), (3) является нелокальной краевой задачей для псевдопараболического уравнения. В рассматриваемой задаче правая часть $F_v(x,t)$ принадлежит пространству $L_2(Q)$, функция $h(x)$ — пространству $C^2(\overline{D})$ и функция $\psi_v(x)$ — пространству $W_2^2(D)$ (последнее вытекает из того, что имеет место равенство $\psi_v'(x) = h'(x)c_v(x) + u_1'(x)h''(x)p_v(x) + \psi'(x)$). Вместе с условиями (14) (условиями согласования) все это означает, что краевая задача ($17_{v,\varepsilon}$), (18_v), (3) будет иметь решение $w(x,t) = u_t(x,t)$, принадлежащее H_1, см. [20]. Используя условие (4), нетрудно найти собственно функцию $u(x,t)$; очевидно, что эта функция также будет принадлежать пространству H.

Проведенные рассуждения означают, что краевая задача ($17_{v,\varepsilon}$), (18_v), (3), (4) при фиксированном ε порождает оператор A, переводящий пространство V_1 в себя. Докажем, что этот оператор имеет в V_1 неподвижные точки. Сделаем это с помощью теоремы Шаудера.

Доказательство возможности использования теоремы Шаудера (а также возможности предельного перехода при $\varepsilon \to 0$) будет основано на априорных оценках. В процессе получения необходимых оценок у нас будут возникать постоянные; уточним сразу, что они всюду определяются входными данными задачи — функциями $f(x,t)$, $q(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$, а также числом T — и не всегда их точное значение существенно.

Определим множество

$$\mathscr{B} = \Bigg\{ v(x,t) : v(x,t) \in V,\ \int\limits_Q v^2\,dxdt \le R_1,\ \int\limits_0^1 v_t^2(x,T)\,dx \le R_2,$$

$$\int\limits_0^1 v_{xt}^2(x,T)\,dx \le R_3,\ \int\limits_Q \big(v_{tt}^2 + v_{xxt}^2 + \varepsilon v_{xtt}^2 + \varepsilon^2 v_{xxtt}^2\big)\,dxdt$$

$$+ \operatorname*{vrai\,max}_{[0,T]} \Bigg[\int\limits_0^1 v^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 v_x^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 v_t^2(x,t)\,dx$$

$$+ \int\limits_0^1 v_{xt}^2(x,t)\,dx + \int\limits_0^1 v_{xx}^2(x,t)\,dx + \varepsilon \int\limits_0^1 v_{xxt}^2(x,t)\,dx \Bigg] \le R_4 \Bigg\}.$$

Покажем, что можно подобрать числа R_1–R_4 так, чтобы оператор A переводил множество $\mathscr{B}$ в себя.

Рассмотрим равенство

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 \left[u_{\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial x}(p_v u_{x\tau}) + q u_\tau - \varepsilon u_{xx\tau\tau} \right] (u_\tau - U_\tau)\,dxd\tau = \int\limits_0^t \int\limits_0^1 F_v (u_\tau - U_\tau)\,dxd\tau,$$

являющееся следствием уравнения ($17_{v,\varepsilon}$). Интегрируя по частям, используя условия (3) и выполняя простейшие арифметические действия, перейдем от данного равенства к новому:

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^1 p_v u_{x\tau}^2\,dxd\tau + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 q u_\tau^2\,dxd\tau + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 u_t^2(x,t)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 u_t^2(x,0)\,dx + \frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,0)\,dx + \int\limits_0^1 u_t(x,t)U_t(x,t)\,dx$$

$$- \int\limits_0^1 u_t(x,0)U_t(x,0)\,dx + \int\limits_0^t \int\limits_0^1 p_v u_{x\tau} U_{x\tau}\,dxd\tau - \int\limits_0^t \int\limits_0^1 u_\tau U_{\tau\tau}\,dxd\tau$$

$$+ \varepsilon \int\limits_0^1 u_{xt}(x,t)U_{xt}(x,t)\,dx - \varepsilon \int\limits_0^1 u_{xt}(x,0)U_{xt}(x,0)\,dx - \varepsilon \int\limits_0^t \int\limits_0^1 u_{x\tau} U_{x\tau\tau}\,dxd\tau$$

$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^1 F_v u_\tau\,dxd\tau - \int\limits_0^t \int\limits_0^1 F_v U_\tau\,dxd\tau. \quad (21)$$

Условие (18_v), вытекающее из этого условия и уравнения (16) равенство

$$u_{xt}(x,0) = h(x)u_{xt}(x,T) + h'(x)u_t(x,T) + h'(x)c_v(x) + u_1'(x)h''(x)p_v(x) + \psi'(x), \quad (22)$$

неравенство Юнга и неравенства (19) и (20) дают следующие неравенства:

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 u_t^2(x,0)\,dx \le h_0^2 \int\limits_0^1 u_t^2(x,T)\,dx + K_1 \int\limits_0^1 v_t^2(x,T)\,dx + K_2, \quad (23)$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,0)\,dx \le h_0^2\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,T)\,dx + 8h_1^2\int\limits_0^1 u_t^2(x,T)\,dx + K_3\int\limits_0^1 v_t^2(x,T)\,dx + K_4. \quad (24)$$

Положим в равенстве (21) $t = T$. Используя (20), условие (9), неравенство Юнга, неравенства (23), (24), а также известное неравенство

$$\frac{1}{2T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u^2\,dxdt \le \int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_t^2\,dxdt + \frac{1}{T}\int\limits_0^1 u_1^2(x)\,dx,$$

мы можем перейти от равенства (21) к неравенству

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 (p_v-\varepsilon_0)u_{xt}^2\,dxdt + \frac{q_0}{8T^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u^2\,dxdt + \left(\frac{1-4h_0^2}{4} - 16\varepsilon_0 h_2^2\right)\int\limits_0^1 u_t^2(x,T)\,dx + \frac{\varepsilon\bigl(1-4h_0^2\bigr)}{4}\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,T)\,dx \le K_5 + K_6\int\limits_0^1 v_t^2(x,T)\,dx + \left(\frac{q_1^2}{q_0}+\frac{q_1}{2}\right)\int\limits_0^T\int\limits_0^1 v^2\,dxdt. \quad (25)$$

Вследствие строгой положительности чисел $\varphi_0 - m$, k_1 и $1 - 4h_0^2$ (см. условия (9)) мы можем зафиксировать число ε_0 настолько малым, что

$$\frac{\varphi_0 - m}{k_1} - \varepsilon_0 > 0, \quad \frac{1-4h_0^2}{4} - 16\varepsilon_0 h_1^2 > 0. \quad (26)$$

Учитывая эти неравенства и принадлежность функции $v(x,t)$ множеству $\mathscr{B}$, получаем, что

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u^2\,dxdt \le A_0R_1 + B_0R_2 + C_0, \quad (27)$$

$$\int\limits_0^1 u_t^2(x,T)\,dx \le A_1R_1 + B_1R_2 + C_1. \quad (28)$$

Зафиксируем числа R_1 и R_2: $R_1 = N_1$, $R_2 = N_2$. Заметим, что из условия (12) следует, что они положительны. Поскольку

$$A_0R_1 + B_0R_2 + C_0 \le R_1, \quad A_1R_1 + B_1R_2 + C_1 \le R_2,$$

из (27) и (28) получаем, что для решений краевой задачи $(17_{v,\varepsilon})$, (18_v), (3), (4) выполняются первые два неравенства, определяющие множество $\mathscr{B}$.

Вернемся к равенству (21). Применяя к его правой части неравенство Юнга, учитывая положительность функций $p_v(x)$ и $q(x,t)$, а также используя (25), нетрудно получить априорные оценки

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_t^2\,dxdt \le K_7,$$

$$\operatorname*{vrai\,max}_{[0,T]}\left[\int_0^1 u^2(x,t)\,dx+\int_0^1 u_t^2(x,t)\,dx+\varepsilon\int_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx\right]\le K_8 \tag{29}$$

с постоянной K_8, определяемой лишь входными данными задачи.

На следующем шаге рассмотрим равенство

$$\int_0^t\int_0^1\left[u_{\tau\tau}-\frac{\partial}{\partial x}(p_v u_{x\tau})-\varepsilon u_{xx\tau\tau}+qu_\tau\right](u_{\tau\tau}-U_{\tau\tau})\,dxd\tau$$
$$=\int_0^t\int_0^1 F_v(u_{\tau\tau}-U_{\tau\tau})\,dxdt.$$

Его нетрудно преобразовать к виду

$$\int_0^t\int_0^1 u_{\tau\tau}^2\,dxd\tau+\varepsilon\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau\tau}^2\,dxd\tau+\frac12\int_0^1 p_v(x)u_{xt}^2(x,t)\,dx$$
$$=\frac12\int_0^1 p_v(x)u_{xt}^2(x,0)\,dx+\int_0^t\int_0^1 u_{\tau\tau}U_{\tau\tau}\,dxd\tau-\varepsilon\int_0^t\int_0^1 u_{x\tau\tau}U_{x\tau\tau}\,dxd\tau$$
$$-\int_0^t\int_0^1 qu_\tau(u_{\tau\tau}-U_{\tau\tau})\,dxd\tau+\int_0^t\int_0^1 F_v(u_{\tau\tau}-U_{\tau\tau})\,dxd\tau. \tag{30}$$

Имеет место следующее очевидное неравенство:

$$\frac12\int_0^1 p_v(x)u_{xt}^2(x,0)\,dx\le h_0^2\int_0^1 p_v(x)u_{xt}^2(x,T)\,dx++8h_1^2\int_0^1 p_v(x)u_t^2(x,T)\,dx$$
$$+8h_1^2\int_0^1 p_v(x)c_v^2(x)\,dx+8h_2^2\int_0^1 p_v^3(x)\,dx+8\int_0^1 p_v(x)\psi'^2(x)\,dx \tag{31}$$

(справедливость его нетрудно установить с помощью равенства (22)). Положив в (30) $t=T$, оценивая далее правую часть равенства (30) с помощью неравенств (31) и Юнга, получаем неравенство

$$\int_0^T\int_0^1 u_{tt}^2\,dxdt+\varepsilon\int_0^T\int_0^1 u_{xtt}^2\,dxdt+\left(1-2h_0^2\right)\int_0^1 p_v(x)u_{xt}^2(x,T)\,dx$$
$$\le 16h_1^2\int_0^1 p_v(x)u_t^2(x,T)\,dx+16h_1^2\int_0^1 p_v(x)c_v^2(x)\,dx$$
$$+16h_2^2\int_0^1 p_v^3(x)\,dx+16\int_0^1 p_v(x)\psi'^2(x)\,dx$$
$$+\left|4\int_0^T\int_0^1 U_{tt}^2\,dxdt+\varepsilon_0\int_0^T\int_0^1 U_{xtt}^2\,dxdt+\int_0^T\int_0^1 q^2U_{tt}^2\,dxdt+4\int_0^T\int_0^1 f_t^2\,dxdt\right.$$

$$-2\int_0^T\int_0^1 f_t U_{tt}\,dxdt+q_1\int_0^T\int_0^1 U_{tt}^2\,dxdt+\big(4q_1^2+q_1\big)N_1+\big(4\bar{q}_0^{-2}+1\big)K_7\Bigg|. \quad (32)$$

Имеем

$$\operatorname{vrai}\max_{\overline{D}}|p_v(x)|\le 2\left(\int_0^1 {p'}_v^2(x)\,dx\right)^{\frac12}+\left(\int_0^1 p_v^2(x)\,dx\right)^{\frac12}$$
$$\le\frac{8}{3k_0}\left(\int_0^1 v_{xt}^2(x,T)\,dx\right)^{\frac12}+\frac{2}{k_0}\left(\frac{16k_2}{3k_0}+\sqrt2\right)\left(\int_0^1 v_t^2(x,T)\,dx\right)^{\frac12}$$
$$+\frac{8}{3k_0}\left(\int_0^1 {\varphi'}^2(x)\,dx\right)^{\frac12}+\frac{2}{k_0}\left(\frac{16k_2}{3k_0}+\sqrt2\right)\left(\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx\right)^{\frac12},$$

$$\int_0^1 p_v u_t^2(x,T)\,dx\le N_2\operatorname{vrai}\max_{\overline{D}}|p_v(x)|\le N_3R_3^{\frac12}+N_4,$$

$$\int_0^1 p_v(x)c_v^2\,dx\le\operatorname{vrai}\max_{\overline{D}}|p_v(x)|\int_0^1 c_v^2(x)\,dx\le N_5R_3^{\frac12}+N_6,$$

$$\int_0^1 p_v^3(x)\,dx\le\operatorname{vrai}\max_{\overline{D}}|p_v(x)|\int_0^1 p_v^2(x)\,dx\le N_7R_3^{\frac12}+N_8.$$

С помощью этих неравенств мы можем перейти от (32) к оценке

$$\int_0^T\int_0^1 u_{tt}^2\,dxdt+\varepsilon\int_0^T\int_0^1 u_{xtt}^2\,dxdt+\big(1-4h_0^2\big)\int_0^1 p_v(x)u_{xt}^2(x,T)\,dx\le N_9R_3^{\frac12}+N_{10}. \quad (33)$$

Зафиксируем число R_3: $R_3=N_{13}$. Оценка (33) с таким числом R_3 дает оценку

$$\int_0^1 u_{xt}^2(x,T)\,dx\le R_3,$$

которая означает, что для решения краевой задачи ($17_{v,\varepsilon}$), (18_v), (3), (4) будет выполняться третье неравенство, определяющее множество $\mathscr{B}$.

Помимо оценки (33) для решений краевой задачи ($17_{v,\varepsilon}$), (18_v), (3), (4) имеет место оценка

$$\int_0^T\int_0^1\big(u_{tt}^2+\varepsilon u_{xtt}^2\big)\,dxdt+\operatorname{vrai}\max_{[0,T]}\int_0^1 u_{xt}^2(x,t)\,dx\le K_8 \quad (34)$$

с постоянной K_8, определяемой лишь входными данными. Ее нетрудно доказать, оценивая правую часть равенства (30) с помощью неравенства Юнга неравенств (31), (33).

Проанализируем теперь равенство

$$\int_0^t\int_0^1 \left[u_{\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial x}(p_v u_{x\tau}) - \varepsilon u_{xx\tau\tau} + q u_\tau\right] u_{xx\tau}\,dxd\tau = \int_0^t\int_0^1 F_v u_{xx\tau}\,dxdt.$$

Его нетрудно преобразовать к виду

$$\int_0^t\int_0^1 p_v u_{xx\tau}^2\,dxd\tau + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 u_{xxt}^2(x,t)\,dx = \frac{\varepsilon}{2}\int_0^1 u_{xxt}^2(x,0)\,dx$$
$$- \int_0^t\int_0^1 p_v' u_{x\tau} u_{xx\tau}\,dxd\tau + \int_0^t\int_0^1 u_{\tau\tau} u_{xx\tau}\,dxd\tau$$
$$+ \int_0^t\int_0^1 q u_\tau u_{xx\tau}\,dxd\tau - \int_0^t\int_0^1 F_v u_{xx\tau}\,dxd\tau. \quad (35)$$

Следствием условия (18_v) и уравнения (16) является равенство

$$u_{xxt}(x,0) = h(x)u_{xxt}(x,T) + 2h'(x)u_{xt}(x,T) + h''(x)u_t(x,T)$$
$$+ u_1'(x)h'''(x)p_v(x) + 2h''(x)c_v(x) + h'(x)c_v(x) + \psi''(x).$$

Используя неравенство Юнга, интегральные оценки (19) и (20), а также оценки (29) и (34), нетрудно от этого равенства перейти к оценке

$$\int_0^1 u_{xxt}^2(x,0)\,dx \le 2h_0^2\int_0^1 u_{xxt}^2(x,T)\,dx + K_9 \quad (36)$$

с постоянной K_9, определяемой лишь входными данными задачи. Далее, полагая в равенстве (35) $t = T$, используя неравенство Юнга, оценки (29) и (34), а также учитывая строгую положительность функции $p_v(x)$, получаем, что

$$\int_0^T\int_0^1 u_{xxt}^2\,dxdt + \varepsilon\int_0^1 u_{xxt}^2(x,T)\,dx \le K_{10}\left[\int_0^T\int_0^1 {p'}_v^2(x)\,dxdt + 1\right].$$

Справедливы следующие неравенства:

$$\int_0^T\int_0^1 {p'}_v^2(x)u_{xt}^2\,dxdt \le \int_0^T \underset{\overline{D}}{\operatorname{vrai\,max}}|u_{xt}(x,t)|^2\left(\int_0^1 {p'}_v^2(x)\,dx\right)dt$$
$$\le K_{11}\int_0^T\left[\left(\int_0^1 u_{xxt}^2(x,t)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} + 1\right]\left[\int_0^1 c_v^2(x)\,dx + \int_0^1 {c'}_v^2(x)\,dx\right]dt$$
$$\le \delta\int_0^T\int_0^1 u_{xxt}^2\,dxdt + K_{12};$$

число δ в правой части последнего из них — произвольное положительное число, число K_{12} определяется входными данными задачи и числом δ. Выбирая δ

малым и фиксируя, получаем, что для решений краевой задачи $(17_{v,\varepsilon})$, (18_v), (3), (4) будет выполняться априорная оценка

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_{xxt}^2\,dxdt+\varepsilon\int\limits_0^1 u_{xxt}^2(x,T)\,dx\le K_{13} \tag{37}$$

с постоянной K_{13}, определяемой лишь входными данными задачи.

Очевидным следствием оценки (37) является оценка

$$\varepsilon\,\underset{[0,T]}{\operatorname{vrai\,max}}\int\limits_0^1 u_{xxt}^2(x,t)\,dx\le K_{14}, \tag{38}$$

в свою очередь, следствием всех полученных оценок будет оценка

$$\varepsilon^2\,\underset{[0,T]}{\operatorname{vrai\,max}}\int\limits_0^1 u_{xxtt}^2\,dxdt\le K_{15}. \tag{39}$$

Вернемся к построению множества $\mathscr{B}$. Выше мы зафиксировали точное значение чисел R_1, R_2 и R_3. Из оценок (29), (34), (37)–(39) следует, что при фиксированных числах R_1–R_3 мы можем зафиксировать число R_4 так, чтобы выполнялось четвертое неравенство, определяющее множество $\mathscr{B}$. Следовательно, при указанном выборе чисел R_1–R_4 оператор A, построенный по краевой задаче $(17_{v,\varepsilon})$, (18_v), (3), (4), будет переводить множество $\mathscr{B}$ в себя.

Докажем теперь, что оператор A непрерывен в пространстве V_1 на множестве $\mathscr{B}$.

Пусть последовательность функций $\{v_k(x,t)\}$ лежит в множестве $\mathscr{B}$ и сходится в пространстве V_1 к функции $v(x,t)$, $u_k(x,t)$ и $u(x,t)$ — образы функций $v_k(x,t)$ и $v(x,t)$ при действии оператора A; $w_k(x,t)=u_k(x,t)-u(x,t)$, $c_k(x)=G(v_k(x,T))-f(x,T)+q(x,T)u_1(x)$, $c(x)=G(v_t(x,T))-f(x,T)+q(x,T)u_1(x)$; $p_k(x)$ и $p(x)$ — решения уравнения (16) с правыми частями $c_k(x)$ и $c(x)$; $\hat p_k(x)=p_k(x)-p(x)$.

Функции $w_k(x,t)$ представляют собой решения краевой задачи

$$w_{ktt}-\varepsilon w_{kxxtt}-\frac{\partial}{\partial x}(pw_{xxt})+qw_{kt}=q_t(v-v_k)+\hat p_k u_{kxtt}+\hat p_k' u_{xt},$$

$$w_{kt}(x,0)=h(x)w_{kt}(x,T)+u_1'(x)h'(x)\hat p_k(x),$$

$$w_k(0,t)=w_k(1,t)=0,\quad w_k(x,T)=0.$$

Введем обозначения

$$\Phi_k(x,t)=q_t(x,t)[v(x,t)-v_k(x,t)]+\hat p_k(x)u_{kxxt}+\hat p_k'(x)u_{kxt}(x,t),$$

$$\psi_k(x)=u_1'(x)h'(x)\hat p_k(x).$$

Для функций $\Phi_k(x,t)$ имеет место неравенство

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1\Phi_k^2\,dxdt\le K_{16}\Biggl\{\int\limits_0^T\int\limits_0^1(v-v_k)^2\,dxdt+\underset{\overline{D}}{\operatorname{vrai\,max}}|\hat p_k(x)|^2\int\limits_0^T\int\limits_0^1 u_{kxxt}^2\,dxdt$$
$$+\int\limits_0^T\underset{\overline{D}}{\operatorname{vrai\,max}}|u_{kxt}(x,t)|^2\left(\int\limits_0^1\hat p'^2_k(x)\,dx\right)dt\Biggr\}.$$

Вследствие принадлежности функций $u_k(x,t)$ множеству $\mathscr{B}$ от этого неравенства мы можем перейти к такому:

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 \Phi_k^2\,dxdt \le K_{17}\left\{\int\limits_0^T\int\limits_0^1 (v-v_k)^2\,dxdt + \operatorname{vrai}\max_{\overline{D}}|\hat{p}_k(x)|^2 + \int\limits_0^1 \hat{p}'^2(x)\,dx\right\}. \quad (40)$$

Заметим, что, поскольку $v_k(x,t), v(x,t) \in \mathscr{B}$, ввиду условия (13) функции $\hat{p}_k(x)$ являются решениями дифференциального уравнения

$$u_1'\hat{p}_k' + u_1''p_k = v_{kt}(x,T) - v_t(x,T). \quad (41)$$

Утверждение, приведенное в начале работы, а также неравенство вложения $W_2^1(D) \subset C(\overline{D})$ означают, что имеет место оценка

$$\operatorname{vrai}\max_{\overline{D}}|\hat{p}_k(x)|^2 + \int\limits_0^1 \hat{p}'^2_k(x)\,dx \le K_{18}\int\limits_0^1 [|v_{kt}(x,T) - v_t(x,T)|^2 + |v_{kxt}(x,T) - v_{xt}(x,T)|^2]\,dx. \quad (42)$$

Из неравенств (40) и (42) и сходимости $v_k(x,t) \to v(x,t)$ в V_1 следует, что имеет место сильная в $L_2(Q)$ сходимость $\Phi_k(x,t) \to 0$ при $k \to \infty$.

Используя уравнения (41), нетрудно показать, что имеют место равенства

$$\psi_k' = u_1'(x)h''(x)\hat{p}_k(x) + h'(x)[v_{kt}(x,T) - v_t(x,T)],$$

$$\psi''_k = [u_1'(x)h'''(x) - u_1''(x)h''(x)]\hat{p}_k(x) + h'(x)[v_{kxt}(x,T) - v_{xt}(x,T)] + h''(x)[v_{kt}(x,T) - v_t(x,T)].$$

Из них и неравенства (42) вытекает, что сходимость $v_k(x,t) \to v(x,t)$ в V_1 влечет сильную в $L_2(D)$ сходимость $\psi_k(x) \to 0$ при $k \to \infty$.

Повторяя доказательство оценок (29), (34), (37)–(39), нетрудно получить суммарную оценку

$$\|w_k\|^2_{V_1} \le K_0\big(\|\Phi_k\|^2_{L_2(Q)} + \|\psi_k\|^2_{L_2(Q)}\big).$$

Доказанная выше сходимость семейств функций $\{\Phi_k(x,t)\}$ и $\{\psi_k(x)\}$ к тождественно нулевым функциям даст сходимость также к нулевой функции семейства $\{w_k(x,t)\}$. Это и означает непрерывность оператора A в пространстве V_1 на множестве $\mathscr{B}$.

Докажем теперь, что оператор A компактен на множестве $\mathscr{B}$.

Пусть $\{v_k(x,t)\}$ — произвольная последовательность функций из множества $\mathscr{B}$, $\{u_k(x,t)\}$ — последовательность образов функций $v_k(x,t)$ при действии оператора A. Ограниченность семейства функций $\{v_k(x,t)\}$ в пространстве V_1, принадлежность их множеству $\mathscr{B}$ и вполне непрерывность вложений $W_2^1(Q) \to L_2(Q)$, $W_2^1(Q) \to L_2(D)$ означают, что существуют подпоследовательность $\{v_{k_l}(x,t)\}$ исходной последовательности и функция $v(x,t)$ такие, что при $l \to \infty$ имеют место сходимости $v_{k_l}(x,t) \to v(x,t)$ сильно в пространстве $L_2(Q)$, $v_{k_lt}(x,T) \to v_t(x,T)$ сильно в пространстве $W_2^1(D)$, причем для функции $v(x,t)$ выполняются первые три неравенства, определяющие множество $\mathscr{B}$. Пусть $u(x,t)$ есть образ функции $v(x,t)$ при действии оператора A. Очевидно, что эта функция принадлежит множеству $\mathscr{B}$ (это следует из того, что множество $\mathscr{B}$ вполне определяется числами R_1–R_3). Повторяя на подпоследовательности $\{u_{k_l}(x,t)\}$ доказательство непрерывности оператора A, получаем, что при $l \to \infty$ имеет место сходимость $Av_{k_l} \to Av$ в пространстве V_1. Это означает, что оператор A компактен в пространстве V_1 на множестве $\mathscr{B}$.

Установленные свойства оператора A показывают, что для него на множестве $\mathscr{B}$ выполнены все условия теоремы Шаудера (см. [19, гл. IV, § 10]). Согласно этой теореме оператор A имеет в множестве $\mathscr{B}$ неподвижные точки; существование же неподвижной точки означает, что краевая задача ($17_{u,\varepsilon}$), (18_u), (3), (4) имеет решение, принадлежащее пространству V_1 и множеству $\mathscr{B}$.

Покажем, что с помощью предельного перехода по параметру ε мы можем доказать разрешимость в пространстве V_1 краевой задачи (17), (18), (3), (4).

Априорные оценки (29), (34), (37)–(39) означают, что существуют числовая последовательность $\{\varepsilon_k\}$, последовательность функций $\{u_k(x,t)\}$ и функция $u(x,t)$ такие, что при $k \to \infty$ имеют место сходимости

$$\begin{gathered}
\varepsilon_k \to 0, \\
u_k(x,t) \to u(x,t) \text{ слабо в } W_2^2(Q), \\
u_{kxxt}(x,t) \to u_{xxt}(x,t) \text{ слабо в } L_2(Q), \\
u_{kt}(x,T) \to u_t(x,T) \text{ слабо в } W_2^1(D) \text{ и сильно в } L_2(D), \\
\varepsilon_k u_{kxxtt}(x,t) \to 0 \text{ слабо в } L_2(Q).
\end{gathered} \tag{43}$$

Обозначим через $c_k(x)$ и $c(x)$ функции $c_{u_k}(x)$ и $c_u(x)$ соответственно, через $p_k(x)$ и $p(x)$ — решения уравнения (16) с правыми частями $c_k(x)$ и $c(x)$, через $w_k(x,t)$ и $w(x,t)$ — функции $p_k(x)u_{kxt}(x,t)$ и $p(x)u_{xt}(x,t)$. Заметим, что из сходимостей, указанных выше, следуют сходимости

$$\begin{gathered}
p_k(x) \to p(x) \text{ сильно в } L_2(D), \\
w_k(x,t) \to w(x,t) \text{ слабо в } L_2(Q).
\end{gathered}$$

В свою очередь, из последней сходимости и из ограниченности в пространстве $L_2(Q)$ семейства функций $\{w_{kx}(x,t)\}$ получаем, что функция $w(x,t)$ имеет обобщенную производную $w_x(x,t)$, принадлежащую пространству $L_2(Q)$, см. [21], и имеет место сходимость

$$w_{kx}(x,t) \to w_x(x,t) \text{ слабо в } L_2(Q).$$

Последний факт вместе со сходимостями (43) означает, что функция $u(x,t)$ будет решением краевой задачи (17), (18), (3), (4). Принадлежность функции $u(x,t)$ пространству V очевидна; ясно также, что будет иметь место включение $p(x) \in W_2^1(D)$. Далее, для функции $u(x,t)$ будет выполняться неравенство

$$\operatorname*{vrai\,max}_{\overline{D}} |u_t(x,T)| \leq 2N_{13}^{\frac{1}{2}} + N_2^{\frac{1}{2}}. \tag{44}$$

Это следует из того, что аналогичное неравенство выполняется для каждой функции $u_k(x,t)$. Согласно условию (13) функция $c(x)$ будет строго положительной. Но тогда и функция $p(x)$ будет строго положительной.

Все изложенное выше относительно функций $u(x,t)$ и $p(x)$ означает, что данные функции обладают всеми свойствами из формулировки теоремы 1. Покажем, что они и дают искомое решение обратной задачи (1)–(4).

Проинтегрируем уравнение (17) по переменной t в пределах от 0 до T. Используя условия (4) и (18), уравнение (16), а также равенство $G(u_t(x,T)) = u_t(x,T)$, вытекающее из неравенства (44) и условия (13), нетрудно получить равенство

$$-\frac{\partial}{\partial x}(p(x)[u_x(x,0) - u_0'(x)]) + q(x,0)[u(x,0) - u_0(x)] = 0.$$

Учитывая строгую положительность функций $p(x)$ и $q(x,0)$, а также равенства

$$u(0,0) = u_0(0), \quad u(1,0) = u_0(1),$$

вытекающие из условий согласования (14), приходим к тождеству

$$u(x,0) - u_0(x) \equiv 0, \quad x \in D,$$

означающему выполнение для функции $u(x,t)$ условия (2).

Наконец, интегрируя уравнение (17) по переменной t в пределах от 0 до текущей точки, используя условия (2), (18) и равенство $G(u_t(x,T)) = u_t(x,t)$, нетрудно получить, что функции $u(x,t)$ и $p(x)$ будут связаны в прямоугольнике Q уравнением (1). Вместе с доказанными ранее свойствами функций $u(x,t)$ и $p(x)$, а также равенствами (3) и (4) все это и доказывает, что пара функций $\{u(x,t),\, p(x)\}$ действительно дает требуемое решение обратной задачи (1)–(4).

Теорема полностью доказана.

Условия (12) и (13) теоремы выглядят весьма непростыми для проверки; кроме того, неочевидным представляется тот факт, что множество исходных данных, т. е. функций $f(x,t)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, $\mu_0(t)$, $\mu_1(t)$ и чисел T, для которых выполняются условия (8)–(15), непусто. Приведем пример ситуации, в которой проверка выполнимости всех требуемых условий осуществляется легко и есть возможность убедиться в том, что множество входных данных обратной задачи (1)–(4), для которых выполняются все требуемые условия, непусто.

Определим постоянные:

$$\begin{aligned} K_1' = \varepsilon_0\left|\int_0^1 f(x,0)U_{xt}(x,0)\,dx\right| + \Bigg|\frac{1}{2}\int_0^1 f^2(x,0)\,dx - \int_0^1 f(x,0)U_t(x,0)\,dx \\ - \int_0^T\int_0^1 f_tU_t\,dxdt + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^1 f_x^2(x,0)\,dx + \max_{[0,T]}\int_0^1 U_t^2(x,t)\,dx \\ + \varepsilon_0\max_{[0,T]}\int_0^1 U_{xt}^2(x,t)\,dx + \frac{1}{q_0}\int_0^T\int_0^1 U_{tt}^2\,dxdt + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^T\int_0^1 U_{xtt}^2\,dxdt \\ + \frac{4T}{k_0^2}\int_0^T\int_0^1 U_{xt}^2\,dxdt + \frac{1}{8}\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx + \frac{1}{q_0}\int_0^T\int_0^1 f_t^2\,dxdt\Bigg|, \end{aligned}$$

$$K_2' = \frac{3K_1'}{q_0},$$

$$K_3' = \Bigg|\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^1 f_t^2\,dxdt + \frac{3}{2}\int_0^T\int_0^1 U_{tt}^2\,dxdt + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^T\int_0^1 U_{xtt}^2\,dxdt$$

$$+\bar q_0\sqrt{K_2'}\left(\int\limits_0^T\int\limits_0^1 U_{tt}^2\,dxdt\right)^{\frac12}-\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f_tU_{tt}\,dxdt$$
$$\left.+\frac14\int\limits_0^T\int\limits_0^1 f_x^2(x,0)\,dx+\frac{2}{k_0^2}\int\limits_0^T\int\limits_0^1\varphi^2(x)\,dx+\frac{16K_1'}{k_0^2}\right|,$$
$$K_4'=\frac{2K_3'}{\varphi_0-m}.$$

Теорема 2. *Пусть начальная функция $u_0(x)$ тождественно нулевая, функция q зависит только от переменной x и выполняются условия* (8)–(11), (14) *и* (15) *теоремы* 1, *а также условие*
$$2\,(K_4')^{\frac12}+2\sqrt2\,(K_1')^{\frac12}<\varphi. \tag{45}$$
Тогда обратная задача (1)–(4) *имеет решение $\{u(x,t),p(x)\}$ такое, что $u(x,t)\in V$, $p(x)\in W_2^1(D)$, $p(x)\ge p_0>0$, $p(x)u_x(x,t)\in L_2\big(0,T;W_2^1(D)\big)$, $p(x)u_{xt}(x,t)\in L_2\big(0,T;W_2^1(D)\big)$.*

Доказательство теоремы 2 полностью повторяет доказательство теоремы 1, но при этом все выкладки проводятся существенно более простым образом, поскольку нелокальное краевое условие (18) становится локальным:
$$u_t(x,0)=f(x,0). \tag{18$'$}$$
При таком условии из равенства (21) нетрудно вывести неравенство
$$\int\limits_0^1 u_t^2(x,T)\,dx\le 4K_1'+\frac12\int\limits_0^1 v_t^2(x,T)\,dx.$$
Полагая $R_2=8K_1'$, получаем априорные оценки
$$\int\limits_0^1 u_t^2(x,T)\,dx\le 8K_1', \tag{46}$$
$$\int\limits_0^t\int\limits_0^1 u_t^2\,dxdt\le K_2'. \tag{47}$$
Анализируя равенство (30) и используя неравенство Юнга и оценку (47), нетрудно получить следующую оценку:
$$\int\limits_0^1 u_{xt}^2(x,T)\,dx\le K_4'. \tag{48}$$
Очевидным следствием неравенств (46) и (48) является оценка
$$\operatorname*{vrai\,max}_{\overline D}|u_t(x,T)|\le 2\big(K_4'\big)^{\frac12}+2\sqrt2\big(K_1'\big)^{\frac12}. \tag{49}$$
Выбирая в качестве числа R_3 число K_4', учитывая неравенство (49) и условие (45), получаем, что для функций $v(x,t)$ из множества $\mathscr B$ и решения $u(x,t)$ краевой задачи $(17_{v,\varepsilon})$, $(18')$, (3), (4) будут выполняться равенства $G(v_t(x,T))=v_t(x,T)$, $G(u_t(x,T))=u_t(x,T)$. Доказательство теоремы 2 завершается так же, как и доказательство теоремы 1.

Нетрудно убедиться, что множество исходных данных, для которых выполняются условия теоремы 2, непусто. Положим $q(x)\equiv q_0>0$, $f(x,t)=\alpha t$, $\alpha<0$, в качестве функции $u_1(x)$ возьмем неотрицательную выпуклую функцию и зафиксируем число $m=\frac{\varphi_0}{2}$. Выполнение условия (45) для таких данных обеспечивается собственно числом T.

Замечание. Численные значения постоянных, возникающих по ходу доказательства теорем 1 и 2, определяются, помимо исходных данных, еще и авторским выбором параметров в неравенстве Юнга.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.
2. *Исаков В. М.* Об одном классе обратных задач для параболических уравнений // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263, № 4. С. 1296–1299.
3. *Прилепко А. И., Орловский Д. Г.* О полугрупповом подходе к задаче определения неоднородного члена в эволюционных уравнениях // Докл. АН СССР. 1989. Т. 305, № 5. С. 1045–1049.
4. *Соловьев В. В.* О разрешимости обратной задачи определения источника с переопределением на верхней крышке для параболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 9. С. 1577–1583.
5. *Прилепко А. И. Тихонов И. В.* Восстановление неоднородного слагаемого в абстрактном эволюционном уравнении // Изв. РАН. Сер. математика. 1994. Т. 58, № 2. С. 167–188.
6. *Камынин В. Л.* Об однозначной разрешимости обратной задачи для параболического уравнения с условием финального переопределения // Мат. заметки. 2003. Т. 73, № 2. С. 217–227.
7. *Prilepko A. I., Tkachenko D. S.* An inverse problem for a parabolic equation with final overdetermination // Ill Posed and Inverse Problems. Utrecht: VSP, 2002. P. 317–353.
8. *Chadam J. M., Hong-Ming Yu.* Determination of an unknown function in a parabolic equation with the overspecified condition // Math. Methods Appl. Sci. 1990. V. 13. P. 421–430.
9. *Isakov V.* Inverse parabolic problems with the final overdetermination // Comm. Pure Appl. Math. 1991. V. 44, N 2. P. 185–210.
10. *Прилепко А. И., Костин А. Б.* Об обратных задачах определения коэффициентов в параболическом уравнении // Сиб. мат. журн. 1992. Т. 33, № 3. С. 146–155.
11. *Костин А. Б., Прилепко А. И.* О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным переопределением // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 4. С. 49–68.
12. *Кожанов А. И.* Задача об определении коэффициентов при младших членах в слабо связанной параболической системе // Мат. заметки ЯГУ. 2000. Т. 7, № 2. С. 49–61.
13. *Кожанов А. И.* Нелинейные нагруженные уравнения и обратные задачи // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 4. С. 694–716.
14. *Kozhanov A. I.* An inverse problem with an unknown coefficient and right-hand side for a parabolic equation II // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2003. V. 11, N 5. P. 505–522.
15. *Kozhanov A. I.* On solvability of an inverse problem with an unknown coefficient and right-hand side for a parabolic equation // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2002. V. 10, N 6. P. 611–627.
16. *Kozhanov A. I.* Inverse problems and “loaded” composite type equations // Нелинейные граничные задачи. Сб. научн. тр. Донецк, 2000. Вып. 10. С. 109–116.
17. *Данилаев П. Г.* Коэффициентные обратные задачи для уравнений параболического типа и их приложения. Казань: Казанское мат. об-во. Изд-во УНИПРЕСС, 1998.
18. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
19. *Ладыженская О. А.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
20. *Кожанов А. И.* Нелокальная по времени краевая задача для линейных параболических уравнений // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 51–60.
21. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.

Статья поступила 11 апреля 2005 г.

Кожанов Александр Иванович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
kozhanov@math.nsc.ru