Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2005. Том 46, № 5

УДК 517.9

О ВНУТРЕННЕЙ ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А. К. Гущин

Аннотация: Исследуются свойства гладкости внутри рассматриваемой области решений линейного равномерно эллиптического уравнения второго порядка в самосопряженной форме без младших членов с измеримыми ограниченными коэффициентами. В терминах принадлежности специальному функциональному пространству объединяются и дополняются такие свойства решений, как принадлежность соболевскому пространству $W^1_{2,\mathrm{loc}}$ и гёльдерова непрерывность. Показано, что установленная в работе принадлежность решений введенному пространству дает новые его свойства, не вытекающие из непрерывности по Гёльдеру и принадлежности $W^1_{2,\mathrm{loc}}$.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, функциональные пространства, гладкость решений.

Памяти Тадея Ивановича Зеленяка

Работа посвящена исследованию внутренней гладкости обобщенных решений в области Q n-мерного пространства $\mathbb{R}_n$, $n \geq 2$, линейных эллиптических уравнений второго порядка вида

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) = 0, \quad x \in Q. \tag{1}$$

Будем предполагать, что коэффициенты $a_{i,j}(x)$, $x \in Q$, уравнения (1) являются измеримыми функциями, а симметрическая матрица $(a_{i,j}(x))$ удовлетворяет для всех $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}_n$, $|\xi| = 1$, и для п. в. $x \in Q$ неравенствам

$$\gamma \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}(x)\xi_i\xi_j \leq \gamma^{-1} \tag{2}$$

с некоторой положительной постоянной γ. Под обобщенным решением (1), как обычно, понимается функция из пространства $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$, удовлетворяющая уравнению в смысле равенства обобщенных функций.

Хорошо известно [1–3] (см. также [4]), что обобщенные решения уравнения (1) непрерывны по Гёльдеру внутри области Q с некоторым зависящим лишь от размерности пространства n и постоянной эллиптичности γ (из (2)) показателем

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00377) и Совета по грантам президента РФ государственной поддержке молодых российских ученых и ведущих научных школ (НШ–1542.2003.1).

α_0. При этом для любых ограниченных подобластей Q' и Q'', $Q' \Subset Q'' \Subset Q$, норма решения u в пространстве $C^{\alpha_0}(\overline{Q'})$ оценивается сверху постоянной, зависящей лишь от n, γ, нормы u в $L_2(Q'')$ и расстояния от Q' до границы Q''. Всюду далее под $\alpha_0 = \alpha_0(n, \gamma)$ мы будем понимать этот показатель гладкости.

В настоящей работе рассмотрим вопрос о свойствах, занимающих «промежуточное» положение между «интегральным» свойством принадлежности решений пространству $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ и «точечными» свойствами его внутренней непрерывности и непрерывности по Гёльдеру. Цель работы — показать, что такие «промежуточными» свойства, не вытекающие из принадлежности пространству $W^1_{2,\mathrm{loc}}(Q)$ и гёльдеровой непрерывности, существуют. Все эти свойства объединяет то, что они являются немедленным следствием принадлежности решений одному функциональному пространству, описанию которого посвящен п. 3 работы. Основные результаты работы анонсированы в заметке [5].

Главная трудность при решении поставленной задачи — отыскание терминов, в которых эти свойства выражаются. Принадлежность функции u пространству непрерывных по Гёльдеру функций $C^{\alpha_0}(\overline{Q'})$ можно сформулировать как ограниченность семейства интегралов от квадрата разностного отношения $\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha_0}}$ по единичным мерам ϕ_{x^0,y^0} в $\mathbb{R}_{2n}$, каждая из которых имеет носитель в одной (каждая в своей) точке $(x^0, y^0) \in \overline{Q'} \times \overline{Q'}$, $x^0 \neq y^0$. Последнее, как легко видеть, эквивалентно ограниченности совокупности таких интегралов по всем единичным борелевским мерам на множестве $\{(x, y) \in \overline{Q'} \times \overline{Q'} : x \neq y\} \subset \mathbb{R}_{2n}$. Принадлежность u пространству $W^\alpha_2(Q')$ с $\alpha \in (0, 1)$ означает конечность интеграла

$$\iint\limits_{Q'\times Q'} |u(x) - u(y)|^2 \frac{dxdy}{|x - y|^{n+2\alpha}}.$$

Из ограниченности семейства интегралов от $|u(x) - u(y)|^2$ по мерам ϕ_h, $h \in \mathbb{R}_n$, $|h| > 0$, определенным равенствами

$$\phi_h(G) = \frac{1}{|h|^2} \operatorname{mes}_n(\{x \in Q' : (x, x + h) \in G, x + h \in Q'\}, \quad G \subset \mathbb{R}_{2n},$$

где mes_n — n-мерная мера Лебега, немедленно следует, что $u \in W^1_2(Q')$. Поэтому естественно искать описание интересующих нас свойств в терминах ограниченности множества интегралов от функции $|u(x) - u(y)|^2$ по специальным образом нормированным (принимающим и бесконечные значения) мерам из некоторого класса. Отметим, что в близких терминах объединялись «поточечные» и «интегральные» свойства решений уравнения (1) в работах [6–11], посвященных изучению поведения решений эллиптического уравнения вблизи границы и разрешимости нелокальных задач.

При таком описании свойств решений существенным является выбор класса допустимых мер: чем он шире, чем больший рост допускается при приближении к «диагонали» $\{x = y\}$, тем сильнее получаемые свойства. Нам будет удобно выделить из меры множитель $|x - y|^{-2\alpha_0}$, т. е. рассматривать интегралы вида

$$\iint\limits_{\{(x,y)\in\overline{Q'}\times\overline{Q'}:x\neq y\}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{|x - y|^{2\alpha_0}}\, d\phi(x, y).$$

Сейчас мы ограничимся формальным определением допустимого класса мер ϕ; подробному его изучению будет посвящен п. 1 работы.

Возьмем произвольную ограниченную подобласть $Q' \Subset Q$ области Q, и пусть область Q'' такова, что $Q' \Subset Q'' \Subset Q$, а $\delta_0 = \frac{1}{4}\operatorname{dist}(Q', \partial Q'')$. Для точек из $\overline{Q'} \times \overline{Q'} \subset \mathbb{R}_{2n}$ наряду с координатами $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ нам будет удобно рассматривать и координаты

$$(l, h) = (l_1, \dots, l_n, h_1, \dots, h_n), \quad l_i = \frac{x_i + y_i}{2}, \quad h_i = \frac{x_i - y_i}{2}.$$

Далее мы будем рассматривать (неотрицательные, принимающие и бесконечные значения) меры Бореля ϕ на множестве $D = \{(l, h) \in \mathbb{R}_{2n} : |h| \neq 0\}$, носители которых лежат в $\overline{Q'} \times \overline{Q'} = \{(l, h) : l \pm h \in \overline{Q'}\}$. Отметим, что для любого $\sigma > 0$ ϕ-мера множества $D_\sigma = \{(l, h) \in \mathbb{R}_{2n} : |h| \geq \sigma\}$ конечна (в силу ограниченности носителя она равна мере бикомпакта). Сужение меры ϕ на D_σ будем далее обозначать через ϕ_σ; при этом всегда, не оговаривая особо, будем считать, что $0 < \sigma \leq \delta_0$.

Определение 1. Борелевскую меру в $D \times \mathbb{R}_1$ будем называть *допустимым разложением меры* ϕ_σ и обозначать через Φ_σ, если ее носитель лежит в объединении множеств $\{(l, h, t) \in \mathbb{R}_{2n+1} : \sigma \leq |h| \leq \delta_0,\ |h| \leq t \leq \delta_0\}$ и $\{(l, h, t) \in \mathbb{R}_{2n+1} : |h| > \delta_0,\ t = \delta_0\}$, а проекция на пространство первых $2n$ переменных (переменных (l, h)) совпадает с разлагаемой мерой ϕ_σ, т. е. $\Phi_\sigma(G \times \mathbb{R}_1) = \phi_\sigma(G)$ для любого (борелевского) множества $G \subset D$.

Пусть α — некоторое число из (0, 1).

Определение 2. Будем говорить, что удовлетворяющая приведенным выше условиям мера ϕ *принадлежит классу* $\mathscr{M}^+ = \mathscr{M}^{\alpha,+}(Q')$, если для нее конечно выражение

$$\|\phi\| = \|\phi\|_{\mathscr{M}^{\alpha,+}(Q')} = \lim_{\sigma \to +0} \inf_{\Phi_\sigma} \sup_{z \in \mathbb{R}_n} \iiint\limits_{\{(l,h,t) \in \mathbb{R}_{2n+1} : |l - z| \leq 2t\}} \frac{d\Phi_\sigma(l, h, t)}{t^{n-2+2\alpha}}; \qquad (3)$$

здесь точная нижняя грань берется по всем допустимым разложениям Φ_σ меры ϕ_σ. Множество мер из $\mathscr{M}^+$, носители которых лежат в $\{|h| \leq \delta_0\}$, будем обозначать через $\mathscr{M}_0^+$ или $\mathscr{M}_0^{\alpha,+}(Q')$. Определенный равенством (3) функционал $\|\phi\|$ будем называть *нормой меры* ϕ.

Далее, в п. 1, будет доказано, что выражение (3) действительно задает норму в банаховом пространстве, состоящем из линейных комбинаций мер из $\mathscr{M}^+$. Допустимые разложения меры, а следовательно, и введенная норма зависят от числа δ_0. В п. 1 мы покажем, что класс $\mathscr{M}^+$ от выбора числа δ_0 не зависит, а соответствующие различным значениям δ_0 нормы эквивалентны.

Теорема 1. *Существуют такие постоянные C_1 и C_2, зависящие только от размерности пространства n и постоянной эллиптичности γ (из (2)), что для любого решения u уравнения (1) и любой меры $\phi \in \mathscr{M}^{\alpha_0,+}(Q')$ справедлива оценка*

$$\iint\limits_D \frac{|u(l + h) - u(l - h)|^2}{|h|^{2\alpha_0}}\, d\phi(l, h)$$
$$\leq \|\phi\|_{\mathscr{M}^{\alpha_0,+}(Q')} \Bigg[C_1 \int\limits_{Q''} |\nabla u(x)|^2\, dx + \frac{C_2}{\delta_0^{n+2}} \iint\limits_{Q'' \times Q''} |u(y) - u(x)|^2\, dx dy \Bigg].$$

Если $\phi \in \mathscr{M}_0^{\alpha_0,+}(Q')$, *то второе слагаемое в правой части последнего неравенства отсутствует, т. е.*

$$\iint\limits_D \frac{|u(l+h)-u(l-h)|^2}{|h|^{2\alpha_0}}\,d\phi(l,h) \le \|\phi\|_{\mathscr{M}^{\alpha_0,+}(Q')} C_1 \int\limits_{Q''} |\nabla u(x)|^2\,dx. \tag{4}$$

Мы считаем показатель $\alpha_0 = \alpha_0(n,\gamma)$ при заданных значениях n и γ фиксированным и зависимость от него постоянных не отмечаем. Конечно, с помощью неравенства Пуанкаре из первого утверждения теоремы 1 следует справедливость оценки (4) для всех $\phi \in \mathscr{M}^+$, но в этом случае постоянная C_1 будет зависеть еще и от области Q''. Доказательству теоремы 1 посвящен п. 2 работы.

Определение 3. Будем говорить, что непрерывная на компакте $\overline{Q'}$ функция v *принадлежит пространству* $\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$, $\alpha \in (0,1)$, если

$$\|v\|'_\alpha = \sup_{\phi\in\mathscr{M}_0^{\alpha,+}(Q'),\phi\ne0} \left[\frac{1}{\|\phi\|_{\mathscr{M}^{\alpha,+}(Q')}} \iint\limits_D \frac{|v(l+h)-v(l-h)|^2}{|h|^{2\alpha}}\,d\phi(l,h)\right]^{1/2} < \infty.$$

Норму в $\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$ определим равенством

$$\|v\|_{\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})} = \delta_0^{n/2}\|v\|_{C(\overline{Q'})} + \|v\|'_\alpha. \tag{5}$$

В п. 3 мы докажем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пространство* $\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$ *банахово. Оно не зависит от выбора положительного числа* δ_0, *а задаваемые равенством* (5) *с различными значениями* δ_0 *нормы эквивалентны. Кроме того, норма* (5) *эквивалентна норме*

$$\|v\|_\alpha = \|v\|_{C(\overline{Q'})} + \sup_{\substack{\phi\in\mathscr{M}^{\alpha,+}(Q'),\\ \phi\ne0}} \left[\frac{1}{\|\phi\|_{\mathscr{M}^{\alpha,+}(Q')}} \iint\limits_D \frac{|v(l+h)-v(l-h)|^2}{|h|^{2\alpha}}\,d\phi(l,h)\right]^{1/2}. \tag{5'}$$

Из теоремы 1 немедленно вытекает принадлежность всех решений уравнения (1) введенному пространству.

Следствие. *Любое решение* u *уравнения* (1) *принадлежит пространству* $\mathscr{G}^{\alpha_0}(\overline{Q'})$. *При этом существует такая постоянная* $C = C(n,\gamma)$, *что для всех решений* u *уравнения* (1)

$$\|u\|'_{\alpha_0} \le C\|\,|\nabla u|\,\|_{L_2(Q'')}. \tag{4'}$$

Так как первое слагаемое в (5) оценивается нормой решения в $L_2(Q'')$, для решений уравнения (1) справедлива и следующая оценка:

$$\|u\|_{\mathscr{G}^{\alpha_0}(\overline{Q'})} \le \mathrm{const}\,\|u\|_{W_2^1(Q'')}; \tag{6}$$

здесь постоянная также зависит только от n и γ.

В п. 4 будет доказано, что свойство принадлежности введенному пространству $\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$ содержит в себе и гёльдерову непрерывность, и принадлежность пространству $W_2^1(Q')$, и новые «промежуточные» свойства, в том числе и те, которые не вытекают из принадлежности $C^\alpha(\overline{Q'}) \cap W_2^1(Q')$.

1. В этом пункте мы изучим класс мер $\mathscr{M}^{\alpha,+}(Q')$ и порождаемое им пространство обобщенных функций.

Пусть Q' — произвольная ограниченная область n-мерного пространства $\mathbb{R}_n$, а $\alpha \in (0,1)$ и $\delta_0 > 0$ — произвольные числа. Как отмечалось выше, для точек из $\overline{Q'} \times \overline{Q'} \subset \mathbb{R}_{2n}$ наряду с координатами $(x,y) = (x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n)$ нам будет удобно рассматривать и координаты

$$(l,h) = (l_1,\dots,l_n,h_1,\dots,h_n), \quad l_i = \frac{x_i+y_i}{2}, \quad h_i = \frac{x_i-y_i}{2}.$$

Пусть ϕ — мера Бореля (неотрицательная, принимающая и бесконечные значения) на множестве $D = \{|h| > 0\} \subset \mathbb{R}_{2n}$, носитель которой лежит в $\overline{Q'} \times \overline{Q'}$; ϕ_σ, $\sigma > 0$, — сужение меры ϕ на $D_\sigma = \{|h| \geq \sigma\} \subset D$ (или соответствующая этому сужению обобщенная функция). Напомним, см. определение 1, что борелевскую меру в $D \times \mathbb{R}_1$ мы договорились называть *допустимым разложением меры* ϕ_σ и обозначать через Φ_σ, если ее носитель лежит в объединении множеств $\{(l,h,t) \in \mathbb{R}_{2n+1} : \sigma \leq |h| \leq \delta_0,\ |h| \leq t \leq \delta_0\}$ и $\{(l,h,t) \in \mathbb{R}_{2n+1} : |h| > \delta_0,$ $t = \delta_0\}$, а проекция на пространство первых $2n$ переменных (переменных (l,h)) совпадает с разлагаемой мерой ϕ_σ. Мера ϕ принадлежит $\mathscr{M}^+ = \mathscr{M}^{\alpha,+}(Q')$, см. определение 2, если для нее конечна определенная формулой (3) норма $\|\phi\| = \|\phi\|_{\mathscr{M}^{\alpha,+}(Q')}$, ϕ принадлежит $\mathscr{M}_0^+$, если дополнительно $\operatorname{supp}\phi \subset \{|h| \leq \delta_0\}$.

Лемма 1. *Любая конечная мера ϕ принадлежит классу $\mathscr{M}^+$, и для нее справедлива оценка*

$$\|\phi\| \leq \frac{1}{\delta_0^{n-2+2\alpha}}\phi(D).$$

Для доказательства этого утверждения достаточно взять допустимое разложение Φ_σ меры ϕ_σ с носителем в $\{t = \delta_0\}$. Действительно,

$$\|\phi\| \leq \lim_{\sigma\to+0} \sup_{z\in\mathbb{R}_n} \iint\limits_{\{(l,h):|h|\geq\sigma,|l-z|\leq 2\delta_0\}} \frac{d\phi_\sigma(l,h)}{\delta_0^{n-2+2\alpha}} \leq \delta_0^{2-n-2\alpha}\phi(D).$$

Из доказанного утверждения немедленно следует, что $\phi_\sigma \in \mathscr{M}^+$ для любой меры Бореля ϕ и любого положительного числа σ. Отметим также, что $\phi \in \mathscr{M}^+$ тогда и только тогда, когда функция $\|\phi_\sigma\|$, $\sigma > 0$, ограничена; при этом $\|\phi_\sigma\|$ монотонно стремится к $\|\phi\|$ при $\sigma \to +0$.

Следующее утверждение дает необходимое условие принадлежности меры ϕ введенному классу $\mathscr{M}^+$.

Лемма 2. *Существует такая постоянная C, зависящая от размерности пространства n и диаметра области Q', что для всех $\phi \in \mathscr{M}^+$ и всех $\sigma > 0$*

$$\phi_\sigma(D) = \phi(\{|h| \geq \sigma\}) \leq \frac{C\delta_0^{n-2+2\alpha}}{\sigma^n}\|\phi\|. \tag{1.1}$$

Доказательство. Так как для любого $\sigma > 0$, произвольного допустимого разложения Φ_σ меры ϕ_σ и всех $z \in \mathbb{R}_n$

$$\phi(B_z(2\sigma) \times \{h \in \mathbb{R}_n : |h| \geq \sigma\}) \leq \delta_0^{n-2+2\alpha} \iiint\limits_{\{(l,h,t):|h|\geq\sigma,|l-z|\leq 2t\}} \frac{d\Phi_\sigma(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}},$$

то

$$\sup_{z\in\mathbb{R}_n} \phi(B_z(2\sigma) \times \{h \in \mathbb{R}_n : |h| \geq \sigma\})$$
$$\leq \delta_0^{n-2+2\alpha} \inf_{\Phi_\sigma} \sup_{z\in\mathbb{R}_n} \iiint\limits_{\{(l,h,t):|h|\geq\sigma,|l-z|\leq 2t\}} \frac{d\Phi_\sigma(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}} = \delta_0^{n-2+2\alpha}\|\phi_\sigma\| \leq \delta_0^{n-2+2\alpha}\|\phi\|.$$

Покрывая содержащий область Q' шар, радиус которого не больше диаметра области Q', шарами радиуса 2σ (так, чтобы их число не превосходило $\frac{C}{\sigma^n}$) и применяя к каждому из этих шаров полученную оценку, приходим к (1.1).

Лемма 3. *Пусть $\phi \in \mathscr{M}^+$, а борелевская мера ψ такова, что $\psi(G) \le \phi(G)$ для всех борелевских множеств $G \subset D$. Тогда $\psi \in \mathscr{M}^+$ и $\|\psi\| \le \|\phi\|$.*

Доказательство. По условию мера ψ абсолютно непрерывна относительно меры ϕ. Согласно теореме Радона — Никодима для любого ϕ-измеримого множества E

$$\psi(E) = \iint\limits_{E} f(l,h)\, d\phi(l,h)$$

и производная f меры ψ по ϕ, очевидно, удовлетворяет неравенствам $0 \le f(l,h) \le 1$ ϕ-п. в. Так как для любого $\sigma > 0$ и любого допустимого разложения Φ_σ меры ϕ_σ мера

$$\Psi_\sigma(G) = \iiint\limits_{G} f(l,h)\, d\Phi_\sigma(l,h,t), \quad G \subset D \times \mathbb{R}_1,$$

является допустимым разложением меры ψ_σ, то для всех $\sigma > 0$

$$\|\psi_\sigma\| = \inf_{\Psi_\sigma} \sup_{z \in \mathbb{R}_n} \iiint\limits_{\{(l,h,t):|h|\ge\sigma,|l-z|\le 2t\}} \frac{d\Psi_\sigma(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}}$$
$$\le \inf_{\Phi_\sigma} \sup_{z \in \mathbb{R}_n} \iiint\limits_{\{(l,h,t):|h|\ge\sigma,|l-z|\le 2t\}} \frac{d\Phi_\sigma(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}} \le \|\phi\|.$$

Поэтому $\|\psi\| = \lim\limits_{\sigma\to+0} \|\psi_\sigma\| \le \|\phi\|$ и $\psi \in \mathscr{M}^+$.

Покажем, что введенный формулой (3) функционал $\|\cdot\|$ действительно является нормой в пространстве всех линейных комбинаций мер из $\mathscr{M}^+$ и это пространство, а следовательно, и множество $\mathscr{M}^+$ не зависят от выбора числа δ_0. Для этого будем рассматривать знакопеременные меры или пары (ϕ_+, ϕ_-) неотрицательных мер, для каждой из которых найдется такое множество $E \subset D$, что $\phi_+(E) = 0$, $\phi_-(D \setminus E) = 0$, и такие, что $|\phi| = \phi_+ + \phi_- \in \mathscr{M}^+$ (в силу леммы 3 меры ϕ_+, ϕ_- принадлежат $\mathscr{M}^+$). Для каждого $\sigma > 0$ положим $\phi_\sigma = (\phi_+)_\sigma - (\phi_-)_\sigma$ (разложение Жордана заряда ϕ_σ), а полную вариацию этого заряда будем обозначать через $|\phi_\sigma|$, $|\phi_\sigma| = (\phi_+)_\sigma + (\phi_-)_\sigma$; очевидно, что $|\phi_\sigma| = |\phi|_\sigma$.

Нам будет удобнее меры ϕ_+, ϕ_- и элементы рассматриваемого пространства интерпретировать как определенные в области D обобщенные функции: $\phi = \phi_+ - \phi_- \in \mathscr{D}'(D)$. Очевидно, что ϕ удовлетворяет условию:

$$\operatorname{supp}\phi \subset \overline{Q'} \times \overline{Q'} \quad \text{и для любого} \quad \sigma > 0$$
$$|\langle \phi, \eta\rangle| \le \max_{\{(l,h)\in D_\sigma: l\pm h \in \overline{Q'}\}} |\eta(l,h)| \quad \text{для всех } \eta \in C_0^\infty(\{|h| > \sigma\}), \tag{1.2}$$

и любая удовлетворяющая этому условию функция ϕ из $\mathscr{D}'(D)$ задает семейство зарядов $\phi_\sigma, \sigma > 0$, а следовательно, и меры ϕ_+, ϕ_-, $|\phi| = \phi_+ + \phi_-$.

Определение 2′. Будем говорить, что удовлетворяющая условию (1.2) обобщенная функция $\phi \in \mathscr{D}'(D)$ *принадлежит пространству* $\mathscr{M}$, если построенная по ней мера $|\phi|$ принадлежит классу $\mathscr{M}^+$, т. е. если

$$\|\phi\| = \lim_{\sigma\to+0} \inf_{\Phi_\sigma} \sup_{z\in\mathbb{R}_n} \iiint\limits_{\{(l,h,t):|h|\ge\sigma,|l-z|\le 2t\}} \frac{d\Phi_\sigma(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}} < \infty, \tag{1.3}$$

здесь точная нижняя грань берется по всем допустимым разложениям меры $|\phi_\sigma|$. Через $\mathscr{M}_0$ будем обозначать подмножество $\mathscr{M}$, состоящее из обобщенных функций, носители которых удовлетворяют дополнительному условию: $\operatorname{supp}\phi \subset \{|h| \le \delta_0\}$. Определенный равенством (1.3) функционал $\|\phi\|$ будем называть *нормой* ϕ.

Заметим, что, как и в случае мер, *удовлетворяющая условию* (1.2) *обобщенная функция* $\phi \in \mathscr{D}(D)$ *принадлежит пространству* $\mathscr{M}$ *тогда и только тогда, когда ограничена функция* $\|\phi_\sigma\|$, $\sigma > 0$; *при этом* $\|\phi_\sigma\|$ *монотонно стремится к* $\|\phi\|$ *при* $\sigma \to +0$.

Следует отметить, что множество финитных и удовлетворяющих условию (1.2) функций не плотно в пространстве $\mathscr{M}$. Можно привести пример меры $\phi \in \mathscr{M}^+$, для которой $\|\phi - \phi_\sigma\|$ не стремится к нулю при $\sigma \to +0$.

Теорема 3. *Множество $\mathscr{M}$ является линейным пространством, определенный на нем функционал $\|\cdot\|$ — норма, а пространство $\mathscr{M}$ с этой нормой банахово. Кроме того, пространство $\mathscr{M}$ не зависит от выбора числа δ_0, а задаваемые формулой* (1.3) *с различными положительными числами δ_0 нормы эквивалентны.*

Доказательство. Прежде всего проверим, что множество $\mathscr{M}$ является линейным пространством, а определенный формулой (1.3) функционал $\|\cdot\|$ — норма на нем.

Так как допустимыми разложениями меры $|c\phi_\sigma|$, c — произвольное число, являются меры $|c|\Phi_\sigma$, где Φ_σ — допустимые разложения меры $|\phi_\sigma|$, и только они, то инвариантность $\mathscr{M}$ относительно умножения на числа и возможность выносить $|c|$ из под знака нормы очевидны.

Докажем, что сумма функций из $\mathscr{M}$ принадлежит $\mathscr{M}$ и выполнено неравенство треугольника. Возьмем любые ϕ и ψ из $\mathscr{M}$. Для произвольного положительного числа σ в силу леммы 3 справедливо неравенство

$$\|(\phi+\psi)_\sigma\| = \|(\phi_\sigma+\psi_\sigma)\| \le \||\phi_\sigma| + |\psi_\sigma|\|.$$

Поскольку для любых допустимых разложений Φ_σ и Ψ_σ мер $|\phi|_\sigma$ и $|\psi|_\sigma$ (соответственно) мера $\Phi_\sigma + \Psi_\sigma$ является, очевидно, допустимым разложением меры $|\phi|_\sigma + |\psi|_\sigma$, имеем

$$\begin{aligned}\||\phi_\sigma| + |\psi_\sigma|\| &\le \inf_{\Phi_\sigma,\Psi_\sigma} \sup_{z\in\mathbb{R}_n} \iiint\limits_{\{(l,h,t):|l-z|\le 2t\}} \frac{d(\Phi_\sigma+\Psi_\sigma)(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}} \\ &\le \inf_{\Phi_\sigma,\Psi_\sigma}\left[\sup_{z\in\mathbb{R}_n} \iiint\limits_{\{(l,h,t):|l-z|\le 2t\}} \frac{d\Phi_\sigma(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}} + \sup_{z\in\mathbb{R}_n} \iiint\limits_{\{(l,h,t):|l-z|\le 2t\}} \frac{d\Psi_\sigma(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}}\right] \\ &= \||\phi_\sigma|\| + \||\psi_\sigma|\| \le \|\phi\| + \|\psi\|.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|(\phi+\psi)\| = \lim_{\sigma\to+0} \|(\phi+\psi)_\sigma\| \le \|\phi\| + \|\psi\|, \quad \phi+\psi \in \mathscr{M}.$$

Далее, из леммы 2 немедленно вытекает, что если $\|\phi\| = 0$, то для любого $\sigma > 0$ будет $|\phi|(D_\sigma) = 0$, т. е. $\phi = 0$.

Таким образом, мы показали, что $\mathscr{M}$ — линейное пространство, а определенный формулой (1.3) функционал является нормой на нем. Докажем теперь, что оно полное.

Возьмем произвольную фундаментальную (в $\mathscr{M}$) последовательность $\{\phi^{(k)}\}$. В силу леммы 2 для любого $\sigma > 0$ последовательность $\{\phi_\sigma^{(k)}\}$ фундаментальна в пространстве $[C(D_\sigma \cap (\overline{Q'} \times \overline{Q'}))]^*$. Следовательно, исходная последовательность $\{\phi^{(k)}\}$ сходится в $\mathscr{D}'(D)$ к некоторой обобщенной функции ϕ и предельная функция удовлетворяет условию (1.2).

В силу леммы 1 для любого $\sigma > 0$ имеем $\phi_\sigma \in \mathscr{M}$ и $\|\phi_\sigma - \phi_\sigma^{(k)}\| \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому для всех $\sigma > 0$

$$\|\phi_\sigma\| = \lim_{k\to\infty} \|\phi_\sigma^{(k)}\| \le \lim_{k\to\infty} \|\phi^{(k)}\|.$$

Следовательно, $\|\phi\| = \lim\limits_{\sigma\to+0} \|\phi_\sigma\| < \infty$, т. е. $\phi \in \mathscr{M}$.

Для любого положительного числа σ и всех номеров k и m

$$\|\phi_\sigma - \phi_\sigma^{(k)}\| \le \|\phi_\sigma - \phi_\sigma^{(m)}\| + \|\phi_\sigma^{(m)} - \phi_\sigma^{(k)}\|.$$

Так как $\|\phi_\sigma - \phi_\sigma^{(m)}\| \to 0$ при $m \to \infty$, а $\|\phi_\sigma^{(m)} - \phi_\sigma^{(k)}\| = \|[\phi^{(m)} - \phi^{(k)}]_\sigma\| \le \|\phi^{(m)} - \phi^{(k)}\|$, то $\|[\phi - \phi^{(k)}]_\sigma\| \le \sup\limits_{m>k} \|\phi^{(m)} - \phi^{(k)}\|$ для всех $\sigma > 0$, что и дает сходимость последовательности $\phi^{(k)}$ к ϕ в $\mathscr{M}$.

Докажем теперь эквивалентность норм, заданных формулой (1.3) при различных значениях параметра δ_0. При этом, чтобы различать разложения меры и нормы, соответствующие разным значениям δ_0, будем использовать термин «δ_0-допустимое разложение меры», а определенную при данном значении δ_0 норму $\|\cdot\|$ будем обозначать через $\|\cdot\|_{\delta_0}$.

Возьмем произвольные положительные числа δ_0' и δ_0'', пусть $\delta_0' < \delta_0''$. Пусть ϕ — обобщенная функция из $\mathscr{D}'(D)$, удовлетворяющая условию (1.2), а $\sigma \in (0, \delta_0')$. Возьмем произвольное δ_0''-допустимое разложение Φ_σ'' меры $|\phi_\sigma|$; напомним, что

$$\begin{aligned}\operatorname{supp} \Phi_\sigma'' \subset \{(l,h,t) \in \mathbb{R}_{2n+1} : l \pm h \in \overline{Q'},\ \sigma \le |h| \le t \le \delta_0''\} \\ \cup \{(l,h,t) \in \mathbb{R}_{2n+1} : l \pm h \in \overline{Q'},\ |h| > \delta_0'',\ t = \delta_0''\}.\end{aligned}$$

Определим по нему меру Φ_σ' следующим равенством:

$$\begin{aligned}\iiint\limits_D g(l,h,t)\, d\Phi_\sigma'(l,h,t) = \iiint\limits_{\{(l,h,t):\sigma\le|h|\le t\le\delta_0'\}} g(l,h,t)\, d\Phi_\sigma''(l,h,t) \\ + \iiint\limits_{\substack{\{(l,h,t):\sigma\le|h|\le\delta_0',t>\delta_0'\} \\ \cup\{(l,h,t):|h|>\delta_0'\}}} g(l,h,\delta_0')\, d\Phi_\sigma''(l,h,t) \quad (1.4)\end{aligned}$$

для всех непрерывных в $D \times \mathbb{R}_1$ функций g. Очевидно, что

$$\begin{aligned}\operatorname{supp} \Phi_\sigma' \subset \{(l,h,t) \in \mathbb{R}_{2n+1} : l \pm h \in \overline{Q'}, \sigma \le |h| \le t \le \delta_0'\} \\ \cup \{(l,h,t) \in \mathbb{R}_{2n+1} : l \pm h \in \overline{Q'}, |h| > \delta_0', t = \delta_0'\}\end{aligned}$$

и для любого (борелевского) множества $G \subset D$

$$\Phi_\sigma'(G \times \mathbb{R}_1) = \Phi_\sigma''(G \times \mathbb{R}_1) = |\phi_\sigma|(G).$$

Следовательно, Φ_σ' является δ_0'-допустимым разложением меры $|\phi_\sigma|$.

Таким образом, равенство (1.4) определяет отображение множества $\{\Phi''_\sigma\}$ всех δ''_0-допустимых разложений меры $|\phi_\sigma|$ в множество $\{\Phi'_\sigma\}$ ее δ'_0-допустимых разложений; обозначим это отображение через τ. Покажем, что оно является отображением на множество всех δ'_0-допустимых разложений меры $|\phi_\sigma|$, т. е. $\tau\{\Phi''_\sigma\} = \{\Phi'_\sigma\}$. Действительно, возьмем произвольное δ'_0-допустимое разложение Φ'_σ меры $|\phi_\sigma|$ и предъявим меру $\Phi''_\sigma \in \tau^{-1}\Phi'_\sigma$, определив ее равенством

$$\iiint\limits_{D} g(l,h,t)\,d\Phi''_\sigma(l,h,t) = \iiint\limits_{\{(l,h,t):\sigma\le|h|\le\delta'_0\}} g(l,h,t)\,d\Phi'_\sigma(l,h,t) + \iiint\limits_{\{(l,h,t):|h|>\delta'_0\}} g(l,h,\delta''_0)\,d\Phi'_\sigma(l,h,t) \quad (1.5)$$

для всех непрерывных в $D\times\mathbb{R}_1$ функций g.

Определенная равенством (1.5) мера Φ''_σ, очевидно, является δ''_0-допустимым разложением меры $|\phi_\sigma|$. Непосредственно проверяется, что образом этого разложения при отображении τ является исходное δ'_0-допустимое разложение Φ'_σ.

Возьмем произвольное Φ''_σ и $\Phi'_\sigma = \tau\Phi''_\sigma$. В силу (1.4) для любой точки $z\in\mathbb{R}_n$

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\{|l-z|\le 2t\}} \frac{d\Phi'_\sigma(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}} &= \iiint\limits_{\{\sigma\le|h|\le t\le\delta'_0,|l-z|\le 2t\}} \frac{d\Phi''_\sigma(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}} \\ &+ \iiint\limits_{\{\sigma\le|h|\le\delta'_0,\delta'_0<t\le\delta''_0,|l-z|\le 2\delta'_0\}} \frac{d\Phi''_\sigma(l,h,t)}{(\delta'_0)^{n-2+2\alpha}} + \iiint\limits_{\{|h|>\delta'_0,|l-z|\le 2\delta'_0\}} \frac{d\Phi''_\sigma(l,h,t)}{(\delta'_0)^{n-2+2\alpha}} \\ &\le \left(\frac{\delta''_0}{\delta'_0}\right)^{n-2+2\alpha}\left[\iiint\limits_{\{|h|\le\delta'_0,|h|\le t\le\delta''_0,|l-z|\le 2t\}} \frac{d\Phi''_\sigma(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}} + \iiint\limits_{\{\delta'_0\le|h|\le t\le\delta''_0,|l-z|\le 2t\}} \frac{d\Phi''_\sigma(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}}\right] \\ &+ \left(\frac{\delta''_0}{\delta'_0}\right)^{n-2+2\alpha} \iiint\limits_{\{|h|>\delta''_0,|l-z|\le 2\delta''_0\}} \frac{d\Phi''_\sigma(l,h,t)}{{\delta''_0}^{n-2+2\alpha}} = \left(\frac{\delta''_0}{\delta'_0}\right)^{n-2+2\alpha} \iiint\limits_{\{|l-z|\le 2t\}} \frac{d\Phi''_\sigma(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}}.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\sup_{z\in\mathbb{R}_n} \iiint\limits_{\{|l-z|\le 2t\}} \frac{d\Phi'_\sigma(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}} \le \left(\frac{\delta''_0}{\delta'_0}\right)^{n-2+2\alpha} \inf_{\Phi''_\sigma\in\tau^{-1}\Phi'_\sigma} \sup_{z\in\mathbb{R}_n} \iiint\limits_{\{|l-z|\le 2t\}} \frac{d\Phi''_\sigma(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\|\phi_\sigma\|_{\delta'_0} &= \inf_{\Phi'_\sigma} \sup_{z\in\mathbb{R}_n} \iiint\limits_{\{|l-z|\le 2t\}} \frac{d\Phi'_\sigma(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}} \\ &\le \left(\frac{\delta''_0}{\delta'_0}\right)^{n-2+2\alpha} \inf_{\Phi''_\sigma} \sup_{z\in\mathbb{R}_n} \iiint\limits_{\{|l-z|\le 2t\}} \frac{d\Phi''_\sigma(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}} = \left(\frac{\delta''_0}{\delta'_0}\right)^{n-2+2\alpha} \|\phi_\sigma\|_{\delta''_0}.\end{aligned}$$

Таким образом, если $\|\phi\|_{\delta''_0} < \infty$, то и $\|\phi\|_{\delta'_0} = \sup\limits_{\sigma>0} \|\phi_\sigma\|_{\delta'_0} < \infty$; при этом справедлива оценка

$$\|\phi\|_{\delta'_0} \le \left(\frac{\delta''_0}{\delta'_0}\right)^{n-2+2\alpha} \|\phi\|_{\delta''_0}. \quad (1.6)$$

Аналогично доказывается и обратное утверждение. Возьмем произвольное δ_0'-допустимое разложение Φ_σ' меры $|\phi_\sigma|$ и поставим ему в соответствие δ_0''-допустимое разложение $\Phi_\sigma'' = \Phi_\sigma''(\Phi_\sigma') \in \tau^{-1}\Phi_\sigma'$, определенное формулой (1.5). В силу (1.5) для любой точки z из $\mathbb{R}_n$ справедливо равенство

$$\iiint\limits_{\{|l-z|\le 2t\}} \frac{d\Phi_\sigma''(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}} = \iiint\limits_{\{\sigma\le|h|\le\delta_0',|l-z|\le 2t\}} \frac{d\Phi_\sigma'(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}} + \iiint\limits_{\{|h|>\delta_0',|l-z|\le 2\delta_0''\}} \frac{d\Phi_\sigma'(l,h,t)}{{\delta_0''}^{n-2+2\alpha}},$$

из которого, покрывая шар радиуса δ_0'' шарами радиуса δ_0', получаем оценку

$$\iiint\limits_{\{|l-z|\le 2t\}} \frac{d\Phi_\sigma''(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}} \le C(n)\left(\frac{\delta_0''}{\delta_0'}\right)^{2(1-\alpha)} \sup_{\zeta\in\mathbb{R}_n} \iiint\limits_{\{|l-\zeta|\le 2t\}} \frac{d\Phi_\sigma'(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}}.$$

Следовательно, для любого положительного числа σ верно неравенство

$$\begin{aligned}\|\phi_\sigma\|_{\delta_0''} &\le \inf_{\Phi_\sigma''(\Phi_\sigma')} \sup_{z\in\mathbb{R}_n} \iiint\limits_{\{|l-z|\le 2t\}} \frac{d\Phi_\sigma''(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}} \\ &\le C(n)\left(\frac{\delta_0''}{\delta_0'}\right)^{2(1-\alpha)} \inf_{\Phi_\sigma'} \sup_{\zeta\in\mathbb{R}_n} \iiint\limits_{\{|l-\zeta|\le 2t\}} \frac{d\Phi_\sigma'(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha}} = C(n)\left(\frac{\delta_0''}{\delta_0'}\right)^{2(1-\alpha)} \|\phi_\sigma\|_{\delta_0'},\end{aligned}$$

из которого немедленно вытекает оценка δ_0'-нормы через δ_0''-норму. Объединяя ее с (1.6), получаем

$$\left(\frac{\delta_0''}{\delta_0'}\right)^{-(n-2+2\alpha)} \|\phi\|_{\delta_0'} \le \|\phi\|_{\delta_0''} \le C(n)\left(\frac{\delta_0''}{\delta_0'}\right)^{2(1-\alpha)} \|\phi\|_{\delta_0'} \quad \text{для всех } \phi\in\mathscr{M}. \tag{1.7}$$

2. Доказательство теоремы 1. Пусть u — произвольное решение уравнения (1), $\alpha=\alpha_0$. Возьмем любую меру $\phi\in\mathscr{M}^+ = \mathscr{M}^{\alpha_0,+}(Q')$ и будем оценивать интеграл

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \frac{|u(l+h)-u(l-h)|^2}{|h|^{2\alpha_0}}\,d\phi(l,h) &= \lim_{\sigma\to+0} \iint\limits_{\{(l,h):\sigma\le|h|\le\delta_0\}} \frac{|u(l+h)-u(l-h)|^2}{|h|^{2\alpha_0}}\,d\phi_\sigma(l,h) \\ &\quad + \iint\limits_{\{(l,h):|h|>\delta_0\}} \frac{|u(l+h)-u(l-h)|^2}{|h|^{2\alpha_0}}\,d\phi(l,h).\end{aligned} \tag{2.1}$$

Рассмотрим сначала первое слагаемое в правой части (2.1). Возьмем произвольное положительное число σ и произвольную точку $(l,h,t)\in\mathbb{R}_{2n+1}$, для которой $l\pm h\in\overline{Q'}$, $\sigma\le|h|\le t\le\delta_0$. Пусть $c=c(l,t)$ — среднее функции u по шару $B_l(2t)=\{\xi\in\mathbb{R}_n : |\xi-l|\le 2t\}\subset Q''$. Так как функция $v(\xi)=u(\xi)-c$ является решением в Q уравнения (1), для нее справедлива оценка

$$\sup_{\xi\in B_l(t),\eta\in B_l(t),\xi\ne\eta} \frac{|v(\eta)-v(\xi)|^2}{|\eta-\xi|^{2\alpha_0}} \le \frac{C_0}{t^{n+2\alpha_0}} \int\limits_{B_l(2t)} v^2(\xi)\,d\xi$$

с зависящей лишь от n и γ постоянной C_0; то, что зависимость оценивающей эту полунорму постоянной имеет такой вид, немедленно следует из инвариантности рассматриваемого класса уравнений относительно растяжений и их однородности. Так как $\int\limits_{B_l(2t)} v(\xi)\,d\xi = 0$, правую часть последнего неравенства можно оценить с помощью неравенства Пуанкаре (с постоянной $C_1(n)t^2$). Получим

$$\frac{|u(l+h)-u(l-h)|^2}{|h|^{2\alpha_0}} = \frac{|v(l+h)-v(l-h)|^2}{|h|^{2\alpha_0}} \\ \le \frac{C(n,\gamma)}{t^{n-2+2\alpha_0}} \int\limits_{B_l(2t)} |\nabla v(\xi)|^2\,d\xi = \frac{C(n,\gamma)}{t^{n-2+2\alpha_0}} \int\limits_{B_l(2t)} |\nabla u(\xi)|^2\,d\xi.$$

Отсюда

$$\iint\limits_{\{(l,h):\sigma\le|h|\le\delta_0\}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2\alpha_0}}\,d\phi_\sigma(l,h) = \iiint\limits_{\{(l,h,t):\sigma\le|h|\le\delta_0\}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2\alpha_0}}\,d\Phi_\sigma(l,h,t) \\ \le C(n,\gamma) \iiint\limits_{\{\sigma\le|h|\le\delta_0\}} \frac{1}{t^{n-2+2\alpha_0}}\left[\int\limits_{B_l(2t)} |\nabla u(\xi)|^2\,d\xi\right] d\Phi_\sigma(l,h,t) \\ \le C(n,\gamma) \int\limits_{Q''} |\nabla u(\xi)|^2 \left[\iiint\limits_{\{\sigma\le|h|\le\delta_0,|l-\xi|\le 2t\}} \frac{\Phi_\sigma(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha_0}}\right] d\xi \\ \le C(n,\gamma)\left[\sup_{z\in\mathbb{R}_n} \iiint\limits_{\{\sigma\le|h|\le\delta_0,|l-z|\le 2t\}} \frac{\Phi_\sigma(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha_0}}\right] \int\limits_{Q''} |\nabla u(\xi)|^2\,d\xi$$

для любого допустимого разложения Φ_σ меры ϕ_σ. Поскольку левая часть последнего неравенства не зависит от выбора разложения Φ_σ меры ϕ_σ, то для любого $\sigma > 0$

$$\iint\limits_{\{(l,h):\sigma\le|h|\le\delta_0\}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2\alpha_0}}\,d\phi_\sigma(l,h) \le C(n,\gamma)\|\phi\| \int\limits_{Q''} |\nabla u(\xi)|^2\,d\xi$$

и, следовательно,

$$\lim_{\sigma\to+0} \iint\limits_{\{(l,h):\sigma\le|h|\le\delta_0\}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{2\alpha_0}}\,d\phi_\sigma(l,h) \le C(n,\gamma)\|\phi\| \int\limits_{Q''} |\nabla u(\xi)|^2\,d\xi. \tag{2.2}$$

Итак, мы оценили первое слагаемое в правой части (2.1). Отметим, что тем самым доказано второе утверждение теоремы 1.

Оценим второе слагаемое в правой части (2.1). В области $Q\times Q$ рассмотрим функцию $w(x,y) = u(y) - u(x)$. Очевидно, что она является решением эллиптического уравнения

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{i,j}(x)\frac{\partial w}{\partial x_j}\right) + \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{i,j}(y)\frac{\partial w}{\partial y_j}\right) = 0. \tag{1'}$$

Следовательно, для любой точки $z = (x,y) = (l+h, l-h) \in \overline{Q'}\times\overline{Q'}$ справедлива оценка

$$|w(z)|^2 \le \frac{C(n,\gamma)}{\delta_0^{2n}} \iint\limits_{\{\zeta\in\mathbb{R}_{2n}:|\zeta-z|\le\delta_0\}} w^2(\zeta)\,d\zeta.$$

Отсюда

$$\iint\limits_{\{(l,h):|h|>\delta_0\}} \frac{|u(l+h)-u(l-h)|^2}{|h|^{2\alpha_0}}\,d\phi(l,h)$$

$$\leq \frac{C(n,\gamma)}{\delta_0^{2n+2\alpha_0}} \iint\limits_{\{|h|>\delta_0\}} \Bigg[\ \iint\limits_{B_{l+h}(\delta_0)\times B_{l-h}(\delta_0)} (u(\eta)-u(\xi))^2\,d\xi d\eta\Bigg]\,d\phi(l,h)$$

$$\leq \frac{C(n,\gamma)}{\delta_0^{n+2}} \iint\limits_{Q''\times Q''} (u(\eta)-u(\xi))^2 \Bigg[\ \iint\limits_{\{|h|>\delta_0,|l-\frac{\xi+\eta}{2}|\leq 2\delta_0\}} \frac{d\phi_\sigma(l,h)}{\delta_0^{n-2+2\alpha_0}}\Bigg]\,d\xi d\eta.$$

Так как для любого допустимого разложения Φ_σ меры ϕ_σ

$$\iint\limits_{\{|h|>\delta_0,|l-z|\leq 2\delta_0\}} \frac{d\phi_\sigma(l,h)}{\delta_0^{n-2+2\alpha_0}} = \iiint\limits_{\{|h|>\delta_0,|l-z|\leq 2t\}} \frac{d\Phi_\sigma(l,h,t)}{t^{n-2+2\alpha_0}} \leq \|\phi\|,$$

имеем

$$\iint\limits_{\{(l,h):|h|>\delta_0\}} \frac{|u(l+h)-u(l-h)|^2}{|h|^{2\alpha_0}}\,d\phi(l,h) \leq \frac{C(n,\gamma)}{\delta_0^{n+2}}\|\phi\| \iint\limits_{Q''\times Q''} (u(\eta)-u(\xi))^2\,d\xi d\eta. \tag{2.3}$$

Подставляя (2.2) и (2.3) в (2.1), получаем требуемую оценку в общем случае.

Замечание. Наличие у меры ϕ «особенностей» не влияет на справедливость оценок выражения

$$\iint\limits_{D} \frac{|u(l+h)-u(l-h)|^2}{|h|^{2\alpha_0}}\,d\phi(l,h); \tag{2.4}$$

существенно поведение меры вблизи диагонали $\{|h|=0\}$. Для справедливости оценок вида (4) достаточно, чтобы классу $\mathscr{M}^+$ (соответственно классу $\mathscr{M}_0^+$) принадлежала не сама мера ϕ, а ее среднее — мера

$$\tilde\phi(G) = \int\limits_G p(x,y)\,dxdy$$

с плотностью

$$p(x,y) = \frac{1}{\rho^{2n}}\phi\left(B_x(\rho)\times B_y(\rho)\right),$$

где $\rho = \frac14|h|$ при $|h|\leq\delta_0$ и $\rho=\frac14\delta_0$ при $|h|>\delta_0$, а $B_x(\rho)$ — замкнутый шар с центром в точке x радиуса ρ. При этом в правой части этих оценок вместо нормы меры ϕ, конечно, будет стоять норма $\tilde\phi$. Эту процедуру (замену меры ϕ ее средним $\tilde\phi$) можно применять любое число раз.

3. Доказательство теоремы 2. Справедливость для (5) и (5$'$) неравенства треугольника немедленно следует из выполнения этого свойства в $L_2(D,\phi)$. Очевидно и выполнение остальных аксиом нормы. Установим эквивалентность норм (5) и (5$'$) и тем самым то, что (5$'$) определено на всем $\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$. Оценка сверху нормы (5) через норму (5$'$) немедленно вытекает из вложения $\mathscr{M}_0^+$ в $\mathscr{M}^+$. Обратное неравенство следует из оценки

$$\iint\limits_{\{|h|\geq\delta_0\}} \frac{|v(l+h)-v(l-h)|^2}{|h|^{2\alpha}}\,d\phi(l,h) \leq \frac{4\|v\|^2_{C(\overline{Q'})}}{\delta_0^{2\alpha}}\phi(\{|h|\geq\delta_0\})$$

и оценки

$$\phi(\{|h| \geq \delta_0\}) \leq \frac{C\delta_0^{n-2+2\alpha}}{\delta_0^n}\|\phi\| = \delta_0^{-2(1-\alpha)}\|\phi\|,$$

которую дает лемма 2.

Легко доказывается и полнота пространства $\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$. Возьмем любую фундаментальную в $\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$ последовательность $\{v_k\}$. Обозначим через v ее предел в $C(\overline{Q'})$. Для произвольного положительного числа σ последовательность $\frac{v_k(l+h)-v_k(l-h)}{|h|^{2\alpha}}$, $k=1,2,\dots$, сходится к функции $\frac{v(l+h)-v(l-h)}{|h|^{2\alpha}}$ в пространстве $C(\{(l,h) : l \pm h \in \overline{Q'}, |h| \geq \sigma\})$, а следовательно, и в $L_2(\overline{Q'}, \phi_\sigma)$ с любой $\phi \in \mathscr{M}_0^+$. Поэтому

$$\frac{1}{\|\phi\|}\iint\limits_{\{|h|\geq\sigma\}} \frac{|v(l+h)-v(l-h)|^2}{|h|^{2\alpha}}\,d\phi(l,h)$$
$$= \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\|\phi\|}\iint\limits_{\{|h|\geq\sigma\}} \frac{|v_k(l+h)-v_k(l-h)|^2}{|h|^{2\alpha}}\,d\phi_\sigma(l,h) \leq \lim_{k\to\infty}\|v_k\|_{\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})}.$$

Значит, и

$$\|v\|'_\alpha = \sup_{\phi\in\mathscr{M}_0^+,\phi\neq0}\sup_{\sigma>0}\frac{1}{\|\phi\|}\iint\limits_{\{|h|\geq\sigma\}} \frac{|v(l+h)-v(l-h)|^2}{|h|^{2\alpha}}\,d\phi(l,h)$$
$$\leq \lim_{k\to\infty}\|v_k\|_{\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})} < \infty,$$

т. е. $v \in \mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$. Аналогично для произвольного номера k

$$\frac{1}{\|\phi\|}\iint\limits_{\{|h|\geq\sigma\}} \frac{|(v(l+h)-v_k(l+h))-(v(l-h)-v_k(l-h))|^2}{|h|^{2\alpha}}\,d\phi(l,h)$$
$$= \lim_{m\to\infty}\frac{1}{\|\phi\|}\iint\limits_{\{|h|\geq\sigma\}} \frac{|(v_m(l+h)-v_k(l+h))-(v_m(l-h)-v_k(l-h))|^2}{|h|^{2\alpha}}\,d\phi_\sigma(l,h)$$
$$\leq \sup_{m>k}\|v_m-v_k\|_{\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})}.$$

Отсюда

$$\|v-v_k\|'_\alpha \leq \sup_{m>k}\|v_m-v_k\|_{\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})},$$

т. е. $v_k \to v$ в $\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$.

Независимость пространства $\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$ от выбора положительного числа δ_0 и эквивалентность норм, задаваемых равенством (5) с различными значениями δ_0, немедленно следует из соответствующего утверждения теоремы 3.

4. В этом пункте мы покажем, что пространство $\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$ вложено в пространства $C^\alpha(\overline{Q'})$ и $W_2^1(Q')$. Кроме того, мы приведем свойство функций из $\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$, которое не следует из принадлежности пересечению этих пространств. Из этого свойства вытекает, что $\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'}) \neq C^\alpha(\overline{Q'}) \cap W_2^1(Q')$.

Возьмем произвольную точку $(l_0,h_0) \in D$, $l_0 \pm h_0 \in \overline{Q'}$, и рассмотрим единичную меру $\phi = \phi_{l_0,h_0}$, сосредоточенную в этой точке. В силу леммы 1 такие меры принадлежат классу $\mathscr{M}^+$ (они конечны), а если дополнительно $|h_0| \le \delta_0$, то и классу $\mathscr{M}_0^+$. Нормы таких мер равномерно (по l_0, h_0) ограничены:

$$\|\phi_{l_0,h_0}\| \le \sup_{z\in\mathbb{R}_n} \iint\limits_{\{(l,h)\in D:|l-z|\le 2\delta_0\}} \frac{d\phi_{l_0,h_0}(l,h)}{\delta_0^{n-2+2\alpha}} \le \delta_0^{-(n-2+2\alpha)}; \tag{4.1}$$

отметим, что здесь мы взяли разложение Φ меры ϕ (при малых значениях σ $\phi_\sigma = \phi$), носитель которого лежит в $\{t = \delta_0\}$. Из оценки (4.1) немедленно следует, что

$$\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'}) \subset C^\alpha(\overline{Q'})$$

и для всех $v \in \mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$ справедливо неравенство

$$\sup_{\{(l,h):l\pm h\in\overline{Q'},0<|h|\le\delta_0\}} \frac{|u(l+h)-u(l-h)|}{|h|^\alpha} \le \frac{\|v\|'_\alpha}{\delta_0^{\alpha-1+n/2}}. \tag{4.2}$$

Таким образом, доказано

Утверждение 1. *Имеет место включение $\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'}) \subset C^\alpha(\overline{Q'})$. При этом для всех $v \in \mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$*

$$\|v\|_{C^\alpha(\overline{Q'})} \le \mathrm{const}\,\|v\|_{\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})}.$$

Это утверждение показывает, что следствие из теоремы 1 содержит в себе свойство гёльдеровой непрерывности (с показателем α_0) решений уравнения (1). Более того, оценки (4.2) и (4$'$) дают точную оценку порядка роста нормы Гёльдера при приближении к границе (при уменьшении числа δ_0).

Возьмем произвольное $\beta \in (\alpha, 1)$ и рассмотрим меру $\phi = \phi_\beta$, определенную равенством

$$\phi(G) = \iint\limits_{\{(l,h)\in G:l\pm h\in Q'\}} \frac{dldh}{|h|^{n+2(\beta-\alpha)}}, \quad G \subset D.$$

Взяв $\operatorname{supp}\Phi_\sigma \subset \{t = |h|, |h| \le \delta_0\} \cup \{t = \delta_0, |h| > \delta_0\}$, нетрудно показать, что $\|\phi\| \le C(n,\alpha,\beta)\delta_0^{2-2\beta}$. Поэтому для любой функции $v \in \mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$

$$\iint\limits_{Q'\times Q'} \frac{|v(y)-v(x)|^2}{|y-x|^{n+2\beta}}\,dxdy = \iint\limits_{D} \frac{|v(l+h)-v(l-h)|^2}{|h|^{2\alpha}} d\phi(l,h)$$
$$\le \|\phi\|\|v\|_\alpha^2 \le C(n,\alpha,\beta)\delta_0^{2-2\beta}\|v\|_\alpha^2.$$

Таким образом, $\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'}) \subset W_2^\beta(Q')$ с произвольным показателем $\beta \in (\alpha, 1)$.

Утверждение 2. *При любом $\alpha \in (0,1)$ пространство $\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$ содержится в пространстве $W_2^1(Q')$. При этом для всех $v \in \mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$ справедлива оценка*

$$\|v\|_{W_2^1(Q')} \le \mathrm{const}\,\|v\|_{\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})}.$$

Доказательство. Возьмем произвольное число $\delta \in (0, \delta_0)$, произвольный вектор h_0, $|h_0| \in (0, \delta)$, и рассмотрим меру $\phi = \phi_{h_0}$, определенную равенством

$$\phi(G) = \frac{1}{|h_0|^{2-2\alpha}} \operatorname{mes}_n(\{l : (l,h_0) \in G, l \pm h_0 \in Q'\},$$

mes_n — n-мерная мера Лебега. Такие меры, очевидно, принадлежат классу $\mathscr{M}_0^+$, и их нормы равномерно (по h_0) ограничены:

$$\|\phi_{h_0}\| \leq \frac{1}{|h_0|^n} \sup_{z\in\mathbb{R}_n} \int\limits_{B_z(2|h_0|)} dl = C(n);$$

здесь мы взяли разложение Φ_σ меры ϕ_σ с носителем в $\{t = |h_0|\}$. Поэтому для любой $v \in \mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$

$$\int\limits_{\{l\in Q':\operatorname{dist}(l,\partial Q')>\delta\}} \frac{|v(l+h_0)-v(l-h_0)|^2}{|h_0|^2}\,dl \leq C(n)\|v\|^2_{\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})} \quad \text{для всех } \delta\in(0,\delta_0),$$

что и дает требуемое вложение $\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'}) \subset W_2^1(Q')$ с соответствующим неравенством для норм.

Пример 1. Возьмем произвольное $\kappa \in (0,1)$ и положим $\beta = \alpha + \kappa(1-\alpha) \in (\alpha, 1)$. Будем считать, что $\delta_0 \leq 1$. Пусть $i = (i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}^n$ — точка из $\mathbb{R}_n$ с целыми координатами. Для каждого вектора h_0, $0 < |h_0|^\kappa < \delta_0$, возьмем $l_i = |h_0|^\kappa i$ и определим меру $\phi = \phi^{(h_0)}$ следующим равенством:

$$\iint\limits_D f(l,h)\,d\phi^{(h_0)}(l,h) = \sum_{\{i\in\mathbb{Z}^n: l_i\in\overline{Q'}, l_i+2h_0\in\overline{Q'}\}} f(l_i+h_0,h_0)|h_0|^{2\alpha+n\kappa-2\beta} \tag{4.3}$$

для всех непрерывных функций f. Очевидно, что меры из этого семейства принадлежат классу $\mathscr{M}_0^+$. Докажем ограниченность семейства их норм; при этом носитель разложения меры ϕ_σ в отличие от предыдущих случаев будем брать не на границе допустимого множества, а на множестве $\{(l,h,t) : t = |h_0|^\kappa\}$. Для любого h_0

$$\|\phi^{(h_0)}\| \leq \sup_{z\in\mathbb{R}_n} \iint\limits_{\{|l-z|\leq 2|h_0|^\kappa\}} \frac{d\phi^{(h_0)}(l,h)}{|h_0|^{\kappa(n-2+2\alpha)}} = \sup_{z\in\mathbb{R}_n} \frac{|h_0|^{2\alpha+n\kappa-2\beta}}{|h_0|^{\kappa(n-2+2\alpha)}} \sum_{\substack{\{i\in\mathbb{Z}^n: l_i\in\overline{Q'}, l_i+2h_0\in\overline{Q'},\\ |l_i+h_0-z|\leq 2|h_0|^\kappa\}}} 1 \leq C(n),$$

поскольку число точек l_i в шаре радиуса $2|h_0|^\kappa$ не превосходит $C(n)$. Из оценки норм мер $\phi^{(h_0)}$ и определяющего эти меры равенства (4.3) получаем

$$|h_0|^{n\kappa} \sum_{\{i\in\mathbb{Z}^n: l_i\in\overline{Q'}, l_i+2h_0\in\overline{Q'}\}} \frac{|v(l_i+2h_0)-v(l_i)|^2}{|h_0|^{2\beta}} = \iint\limits_D \frac{|v(l+h_0)-v(l-h_0)|^2}{|h_0|^{2\alpha}} d\phi^{(h_0)}(l,h) \leq C(n)\|v\|^2_{\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})}. \tag{4.4}$$

Таким образом, доказано, что *для любой функции v из пространства $\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$ справедлива оценка* (4.4).

Замечание. Так как в силу следствия из теоремы 1 любое решение уравнения (1) принадлежит пространству $\mathscr{G}^{\alpha_0}(\overline{Q'})$, из последнего утверждения получаем следующее свойство решений. *Для любого показателя $\beta \in (\alpha_0, 1)$ среднее чисел*

$$\frac{|u(l_i+2h_0)-u(l_i)|^2}{|h_0|^{2\beta}}, \quad l_i \in \overline{Q'},\ l_i+2h_0 \in \overline{Q'},$$

ограничено (по $|h_0|$).

Очевидно, что оценка (4.4) не вытекает из гёльдеровой непрерывности порядка α; напомним, что $\beta > \alpha$. Далее мы покажем, что она не следует и из принадлежности функции v пространству $W_2^1(Q')$. Будет приведен пример (см. пример 2) последовательности функций, ограниченной в пространствах $C^\alpha(\overline{Q'})$ и $W_2^1(Q')$, для которой стоящее в левой части оценки (4.4) среднее не является ограниченным. Из этого примера немедленно вытекает

Утверждение 3. *Пространство $\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$ не совпадает с пересечением пространств $C^\alpha(\overline{Q'})$ и $W_2^1(Q')$.*

Пример 2. Пусть теперь $\kappa \in (0, 1 - 2\frac{1-\alpha}{n}] \subset (0,1)$, k — достаточно большое натуральное число: $k > k_0 = 2^{\frac{1+\kappa}{1-\kappa}}$. Положим $l_i^{(k)} = \frac{1}{(2k)^\kappa} i$, $i \in \mathbb{Z}^n$, $B_i^{(k)}$ — шар в $\mathbb{R}_n$ радиуса $1/k$ с центром в точке $l_i^{(k)}$. Заметим, что при $k > k_0$ эти шары не пересекаются. В каждом из шаров $B_i^{(k)}$ определим функцию v_k равенством $v_k(x) = \frac{1}{k^\alpha} - k^{1-\alpha}\big|x - l_i^{(k)}\big|$; вне объединения этих шаров положим $v(x) = 0$.

Очевидно, что построенная последовательность $\{v_k\}$ ограничена в $C^\alpha(\overline{Q'})$. Легко видеть, что она ограничена и в пространстве $W_2^1(Q')$:

$$\int\limits_{Q'} |\nabla v_k(x)|^2\,dx \le \frac{C(n,Q')k^{n\kappa}}{k^{n-2+2\alpha}} \le C(n,Q'),$$

так как число имеющих непустое пересечение с Q' шаров $B_i^{(k)}$ не превосходит $C(n,Q')k^{n\kappa}$, а $n\kappa - n + 2 - 2\alpha \le 0$. Возьмем теперь такую последовательность векторов $h_k \in \mathbb{R}_n$, что $|h_k| = \frac{1}{2k}$. Для таких h_k среднее из примера 1 с $l_i = l_i^{(k)}$ и $h_0 = h_k$ удовлетворяет при достаточно больших k неравенству

$$|h_k|^{n\kappa} \sum_{\{i\in\mathbb{Z}^n : l_i^{(k)} \in \overline{Q'},\, l_i^{(k)} + 2h_k \in \overline{Q'}\}} \frac{\big|v\big(l_i^{(k)} + 2h_k\big) - v\big(l_i^{(k)}\big)\big|^2}{|h_k|^{2\beta}}$$

$$= 2^{2\beta}|h_k|^{n\kappa} \sum_{\{i\in\mathbb{Z}^n : l_i^{(k)} \in \overline{Q'},\, l_i^{(k)} + 2h_k \in \overline{Q'}\}} k^{2(\beta-\alpha)} \ge C(n,Q')k^{2(\beta-\alpha)}$$

с положительной постоянной $C(n,Q')$; напомним,что $\beta = \alpha + \kappa(1-\alpha) > \alpha$. Отсюда в силу оценки (4.4) получаем

$$\|v_k\|_{\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})} \to \infty \quad \text{при } k \to \infty. \tag{4.5}$$

Мы доказали (утверждения 1 и 2), что оператор вложения пространства $\mathscr{G}^\alpha(\overline{Q'})$ в пересечение пространств $C^\alpha(\overline{Q'})$ и $W_2^1(Q')$ (с нормой, равной сумме норм в этих пространствах) ограничен. Пример 2 показывает, что обратный к этому оператору вложения неограниченный, следовательно, он не может быть определен на всем $C^\alpha(\overline{Q'}) \cap W_2^1(Q')$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *DeGiorgi E.* Sulla differenziabilita e l'analiticita delle estremali degli integrali multipli regolari // Mem. Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (5). 1957. V. 3. P. 25–43.
2. *Nash J.* Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations // Amer. J. Math. 1958. V. 80. P. 931–954.
3. *Moser J.* A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1960. V. 13, N 3. P. 457–468.

4. *Ладыженская О. А. Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
5. *Гущин А. К.* О внутренней гладкости решение эллиптического уравнения второго порядка // Докл. РАН. (В печати).
6. *Гущин А. К.* О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Мат. сб. 1988. Т. 137, № 1. С. 19–64.
7. *Гущин А. К., Михайлов В. П.* О существовании граничных значений решений эллиптических уравнений // Мат. сб. 1991. Т. 182, № 6. С. 787–810.
8. *Гущин А. К., Михайлов В. П.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // Мат. сб. 1994. Т. 185, № 1. С. 121–160.
9. *Гущин А. К.* Некоторые свойства решений задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 7. С. 53–90.
10. *Гущин А. К.* Условие компактности одного класса операторов и его применение к исследованию разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 5. С. 17–36.
11. *Гущин А. К.* Оценки карлесоновского типа решений эллиптического уравнения второго порядка // Докл. РАН. 2004. Т. 396, № 1. С. 15–18.

Статья поступила 15 апреля 2005 г.

Гущин Анатолий Константинович
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
ул. Губкина, 8, Москва 119991
akg@mi.ras.ru