Сибирский математический журнал
Июль—август, 2005. Том 46, № 4

УДК 510.5+512.563

СПЕКТРЫ СТЕПЕНЕЙ ОПРЕДЕЛИМЫХ ОТНОШЕНИЙ НА БУЛЕВЫХ АЛГЕБРАХ

П. М. Семухин

Аннотация: Изучаются вопросы, связанные со строением спектра множества атомов и идеала безатомных элементов в вычислимой булевой алгебре. Доказано, что если спектр множества атомов содержит 1-низкую степень, то он содержит вычислимую степень. Также показано, что в вычислимой булевой алгебре характеристики (1,1,0) с вычислимым множеством атомов спектр безатомного идеала состоит из всех Π_2^0 степеней.

Ключевые слова: булевы алгебры, вычислимые модели, спектры отношений.

§ 1. Введение

Изучение строения тьюринговых спектров отношений на вычислимых моделях занимает одно из центральных мест в теории конструктивных алгебраических систем. Это исследование началось с работы Эша и Нероуда [1], в которой они дали синтаксическое описание наследственно вычислимых и наследственно вычислимо перечислимых отношений.

Исследование спектров отношений оказалось не только полезным методом в изучении различных вычислимых представлений данной модели, но и превратилось в самостоятельное и весьма плодотворное направление, связанное с различными областями теории вычислимости и математической логики.

Следуя диссертации В. Харизановой [2], будем называть *спектром степеней* (или просто *спектром*) отношения R на вычислимой модели A множество $\mathrm{Spec}(R) = \{\deg(R') \mid$ существует вычислимая модель $A' \cong A$, в которой R' является образом $R\}$, где $\deg(R')$ — степень Тьюринга множества R'.

Особый интерес представляет изучение спектров отношений на линейных порядках и булевых алгебрах, так как они являются достаточно нетривиальным, но, с другой стороны, хорошо изученным классом моделей.

Недавно С. С. Гончаров, Доуни и Хиршфельд полностью решили вопрос о мощности спектров вычислимых отношений на булевых алгебрах.

Предложение 1 [3]. *Пусть R — вычислимое отношение на вычислимой булевой алгебре B. Тогда либо R определяется бескванторной формулой с константами из B (в этом случае R наследственно вычислимо), либо $\mathrm{Spec}(R)$ бесконечен.*

Аналогичный результат имеет место для линейных порядков.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00593), программ «Ведущие научные школы» (код НШ-2112.2003.1) и «Университеты России» (код УР.04.01.013).

Предложение 2 (Хиршфельд). *Пусть R — вычислимое отношение на вычислимом линейном порядке L. Тогда либо R наследственно вычислимо, либо* $\mathrm{Spec}(R)$ *бесконечен.*

Важную роль играет изучение спектров формульно определимых отношений таких, как множество соседних элементов в линейных порядках или множества атомов, безатомных элементов и т. д. в булевых алгебрах. Реммел [4] доказал, что спектр множества атомов в вычислимой булевой алгебре замкнут вверх, а Доуни [5] — что этот спектр всегда содержит неполную степень.

Данная работа посвящена дальнейшему изучению строения спектра множества атомов, а также идеала безатомных элементов в вычислимой булевой алгебре. Определение основных понятий, относящихся к теории вычислимости, теории конструктивных моделей и теории булевых алгебр, можно найти в книгах Х. Роджерса [6], Соара [7], С. С. Гончарова, Ю. Л. Ершова [8] и С. С. Гончарова [9] соответственно.

Множество $A \leq_T \varnothing'$ называется 1-*низким*, если $A' \equiv_T \varnothing'$, где A' — тьюрингов скачок множества A.

Квантор $\forall^{\#}$ означает «для всех, за исключением конечного числа».

При работе с бинарными деревьями будем использовать обозначения из [9].

Пусть B — булева алгебра и $x \in B$, тогда $\mathrm{At}_B(x)$ обозначает число атомов B, лежащих под x. Идеал, порожденный идеалом Фреше и безатомным идеалом, будем обозначать через $S(A)$.

При доказательстве того, что две булевы алгебры изоморфны, будем пользоваться критерием Воота, который можно найти в [9].

В § 2 мы докажем, что для булевых алгебр определенного вида спектр идеала безатомных элементов является полным, т. е. содержит все Π^0_2-степени. В § 3 будет доказано, что если спектр множества атомов содержит 1-низкую степень, то он содержит вычислимую степень. В частности, отсюда следует, что не существует вычислимой булевой алгебры, у которой спектр множества атомов содержит все вычислимо перечислимые степени, кроме вычислимой.

§ 2. Спектр идеала безатомных элементов

Основной результат этой части содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть B — вычислимая булева алгебра элементарной характеристики $(1,1,0)$ такая, что множество атомов B вычислимо. Тогда для любого Π^0_2-множества C существует вычислимая булева алгебра $B' \cong B$ такая, что* $\mathrm{Al}(B') \equiv_T C$.

Доказательство. В работе В. Н. Власова и С. С. Гончарова [10] доказывается, что вычислимая булева алгебра элементарной характеристики $(1,1,0)$ с вычислимым множеством атомов имеет разрешимое представление. Поэтому будем считать, что булева алгебра B разрешима. Будем использовать следующее

Определение. Пусть $\{B_i\}_{i\in\omega}$ — последовательность булевых алгебр такая, что

1) множество $\{(i,x) \mid x \in B_i\}$ вычислимо перечислимо,

2) функции $f_0(i,x,y) = x \vee_i y$, $f_1(i,x,y) = x \wedge_i y$, $f_2(i,x) = C_i(x)$ частично вычислимы, где $\vee_i$, $\wedge_i$, C_i — операции, заданные на булевой алгебре B_i,

3) функции $g_0(i) = \mathbf{0}^{B_i}$ и $g_1(i) = \mathbf{1}^{B_i}$ вычислимы.

Назовем такую последовательность *вычислимой*.

Рассмотрим множество $A = \{\langle x_0, \dots, x_k\rangle \mid x_i \in B_i,\ x_k = \mathbf{0}^{B_k}$ или $x_k = \mathbf{1}^{B_k}$ и $x_k \neq x_{k-1}\}$. Каждому кортежу $\langle x_0, \dots, x_k\rangle \in A$ сопоставим взаимно однозначным образом следующий элемент $x \in \sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} B_i$:

$$x(i) = \begin{cases} x_i, & \text{если } i \leq k, \\ \mathbf{0}^{B_i}, & \text{если } i > k \text{ и } x_k = \mathbf{0}^{B_k}, \\ \mathbf{1}^{B_i}, & \text{если } i > k \text{ и } x_k = \mathbf{1}^{B_k}. \end{cases}$$

Ясно, что множество A вычислимо перечислимо. Тогда существует разнозначная вычислимая функция f такая, что $\rho f = A$. С помощью функции f определим вычислимые функции $\vee$, $\wedge$ и C так, чтобы $B = \langle \mathbb{N}, \vee, \wedge, C\rangle$ была вычислимой булевой алгеброй, изоморфной $\sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} B_i$. Такую булеву алгебру B назовем *естественным вычислимым представлением* прямой суммы $\sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} B_i$.

Докажем одну вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Пусть A и B — счетные булевы алгебры такие, что*

(a) *множество атомов в A и B бесконечно,*

(b) *A и B не содержат бесконечных атомных элементов,*

(c) *для любого $x \in A$ ($x \in B$) либо $x \in S(A)$ ($x \in S(B)$), либо $C(x) \in S(A)$ ($C(x) \in S(B)$).*

Тогда $A \cong B \cong B_{\omega+\eta}$.

Доказательство. Пусть

$$S = \{(x,y) \mid x \in A,\ y \in B,\ x \in S(A) \iff y \in S(B),$$
$$x \in \mathrm{Fr}(A) \iff y \in \mathrm{Fr}(B) \text{ и } x \in S(A) \Rightarrow \mathrm{At}_A(x) = \mathrm{At}_B(y)\}.$$

Нетрудно проверить, что S является условием изоморфизма алгебр A и B. Следовательно, по критерию Воота A изоморфна B. Очевидно, что алгебра $B_{\omega+\eta}$ удовлетворяет условиям (a)–(c) леммы 1. Таким образом, A и B изоморфны $B_{\omega+\eta}$. □

Лемма 2. *Пусть B — разрешимая булева алгебра элементарной характеристики $(1,1,0)$. Тогда существует вычислимая последовательность $\{B_i\}_{i\in\omega}$ вычислимых булевых алгебр такая, что $B \cong \sum\limits_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} B_i$, $\mathrm{ch}_1(B_i) = 0$ и множества атомов и безатомных элементов B_i равномерно вычислимы по i.*

Доказательство. Так как B разрешима, идеал Ершова — Тарского $I(B)$ вычислим. Пусть $\{a_i\}_{i\in\omega}$ — вычислимая последовательность, перечисляющая все элементы B. Построим вычислимую последовательность $\{b_i\}_{i\in\omega}$ следующим образом: положим $b_0 = a_t$, где t — наименьшее число такое, что $a_t \in I(B)$ и $a_t \neq \mathbf{0}$; пусть $b_0, \dots, b_n$ уже построены, положим

$$b_{n+1} = a_t \setminus \bigvee_{i\leq n} b_i,$$

где t — наименьшее число такое, что $a_t \in I(B)$ и

$$a_t \setminus \bigvee_{i\leq n} b_i \neq \mathbf{0}.$$

Положим $B_i = \hat{b}_i$. Тогда последовательность $\{B_i\}_{i\in\omega}$ является искомой. □

Рассмотрим последовательность $\{B_i\}_{i\in\omega}$, существование которой утверждается в лемме 2. Так как $\mathrm{ch}_1(B_i)=0$, то $B_i\cong A_i'\times B_i'$, где A_i' — атомная булева алгебра, B_i' — безатомная булева алгебра или $\mathbf{0}$.

Заметим, что если $\exists^\infty i\ B_i'\cong\mathbf{0}$, то $\exists^\infty i\, B_i'\cong B_\eta$, поскольку в противном случае $\mathrm{ch}_1(B)=0$. Положим $B_i^1=B_i\times B_\eta$. Ясно, что $B\cong\sum_{\substack{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}\\ i\in\omega}} B_i^1$. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $B_i\cong A_i'\times B_i'$, где $B_i'\cong B_\eta$ для всех i. Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. $\exists^\infty i\, A_i'$ бесконечна.

Случай 1.1. Существует бесконечно много i таких, что в A_i' существует прямое слагаемое типа B_ω. Положим $B_i^1=B_i\times A^*$, где A^* — разрешимое представление B_ω. Как нетрудно видеть, $B\cong\sum_{\substack{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}\\ i\in\omega}} B_i^1$, значит, в данном случае можно считать, что A_i' бесконечна для всех i.

Случай 1.2. Среди i таких, что A_i' бесконечна, содержится лишь конечное число i таких, что в A_i' имеется прямое слагаемое типа B_ω. В этом случае $\exists^\infty i\, A_i'\cong B_{\omega\times\eta}$. Аналогично случаю 1.1 положим $B_i^1=B_i\times A^*$, где A^* — разрешимое представление $B_{\omega\times\eta}$. Легко видеть, что $B\cong\sum_{\substack{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}\\ i\in\omega}} B_i^1$, значит, в данном случае можно считать, что A_i' бесконечна для всех i.

Случай 2. $\exists^{<\infty} i\, A_i'$ бесконечна. Выделим все A_i' такие, что A_i' бесконечна, в отдельное слагаемое. Оставшаяся часть будет по лемме изоморфна $B_{\omega+\eta}$, т. е. B изоморфна прямому произведению $B_{\omega+\eta}$ и вычислимой бесконечной атомной булевой алгебры. Теперь результат теоремы 1 будет следовать из лемм 3 и 4, приведенных ниже.

Лемма 3. *Пусть C — произвольное Π_2^0-множество. Тогда существует вычислимая булева алгебра $B\cong B_{\omega+\eta}$ такая, что $\mathrm{Al}(B)\equiv_T C$.*

Доказательство. Если C — вычислимое множество, то в качестве B нужно взять разрешимое представление $B_{\omega+\eta}$. Далее будем считать, что C невычислимо. Так как C — Π_2^0-множество, то существует вычислимый предикат $R(x,s)$ такой, что

$$x\in C \iff \exists^\infty s\, R(x,s).$$

Пусть D — вычислимая безатомная булева алгебра, и пусть $\{D_i\}_{i\in\omega}$ — сильно вычислимая последовательность конечных подалгебр D такая, что $D_0=\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}$, $D_{i+1}=\mathrm{gr}(D_i\cup\{a_i\})$, где a_i — атом D_{i+1} и $D=\bigcup\limits_{i\in\omega} D_i$.

Рассмотрим вычислимую последовательность булевых алгебр $\{B_i\}_{i\in\omega}$ такую, что для любого k $B_{2k}=D_0$ и $B_{2k+1}=D$. По шагам будем строить вычислимую последовательность $\{B_i'\}_{i\in\omega}$.

Шаг 0. Для всех k положим $B_{2k}^0=B_{2k}$, $B_{2k+1}'=B_{2k+1}$.

Шаг $s+1$. Для всех $k\le s+1$ таких, что $R(k,s+1)$, производим следующие построения: если $B_{2k}^s=D_i$, то положим $B_{2k}^{s+1}=D_{i+1}$. Для всех остальных k положим $B_{2k}^{s+1}=B_{2k}^s$. На этом шаг $s+1$ завершен.

Положим $B_{2k}'=\bigcup\limits_{s\in\omega} B_{2k}^s$. Таким образом, последовательность $\{B_i'\}_{i\in\omega}$ построена. Пусть B — естественное вычислимое представление $\sum_{\substack{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}\\ i\in\omega}} B_i'$. Имеем следующую эквивалентность:

$$k \in C \iff x^k \text{ — безатомный элемент } \sum_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} B_i',$$

где

$$x^k(i) = \begin{cases} \mathbf{0}^{B_i'}, & \text{если } i \neq 2k, \\ \mathbf{1}^{B_i'}, & \text{если } i = 2k. \end{cases}$$

Значит, $C \leq_T \mathrm{Al}(B)$. Далее, x — безатомный элемент $\sum_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} B_i'$ тогда и только тогда, когда существует i_0 такое, что для всех $i > i_0$ будет $x(i) = \mathbf{0}^{B_i'}$ и для всех $i \leq i_0$

$$i \text{ четное } \Rightarrow x(i) = \mathbf{0}^{B_i'} \text{ или } \frac{i}{2} \in C.$$

Значит, $\mathrm{Al}(B) \leq_T C$. Так как C невычислимо, то $\mathbb{N} \setminus C$ бесконечно. По лемме 1 $B \cong B_{\omega+\eta}$. $\square$

Лемма 4. *Пусть $\{B_i\}_{i\in\omega}$ — вычислимая последовательность булевых алгебр таких, что $B_i \cong A_i' \times B_i'$, где A_i' — бесконечная атомная булева алгебра, $B_i' \cong B_\eta$, и множества атомов и безатомных элементов B_i равномерно вычислимы по i. Тогда для любого Π^0_2-множества C существует вычислимая булева алгебра $B \cong \sum_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} B_i$ такая, что $\mathrm{Al}(B) \equiv_T C$.*

Доказательство. Так как множество атомов B_i равномерно вычислимо по i, можно построить вычислимую последовательность $\{a_i\}_{i\in\omega}$ такую, что a_i — атом B_i. Пусть D — вычислимая безатомная булева алгебра и $\{D_i\}_{i\in\omega}$ — сильно вычислимая последовательность конечных подалгебр, определенная в доказательстве леммы 3. Рассмотрим вычислимую последовательность $\{C_i\}_{i\in\omega}$ такую, что $C_{2k} = D_0$ и $C_{2k+1} = (\widehat{C(a_k)})_{B_k}$. Очевидно, что $\sum_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} C_i \cong \sum_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} B_i$. Пусть $R(x,s)$ — вычислимый предикат такой, что

$$x \in C \iff \exists^\infty s\, R(x,s).$$

По шагам построим вычислимую последовательность $\{C_i'\}_{i\in\omega}$.

Шаг 0. Для всех k положим $C_{2k}^0 = C_{2k}$, $C_{2k+1}' = C_{2k+1}$.

Шаг s+1. Для всех $k \leq s+1$ таких, что $R(k, s+1)$, производим следующие построения: если $C_{2k}^s = D_i$, то положим $C_{2k}^{s+1} = D_{i+1}$. Для всех остальных k положим $C_{2k}^{s+1} = C_{2k}^s$. На этом шаг $s+1$ завершен.

Положим $C_{2k}' = \bigcup_{s\in\omega} C_{2k}^s$. Так как C_{2k}' для любого k является либо конечной, либо безатомной булевой алгеброй, то $C_{2k}' \times C_{2k+1}' \cong B_k$. Значит,

$$\sum_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} C_i' \cong \sum_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} B_i.$$

Пусть B — естественное вычислимое представление $\sum_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} C_i'$. Так как

$$k \in C \iff x^k \text{ — безатомный элемент } \sum_{i\in\omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} C_i',$$

где

$$x^k(i) = \begin{cases} \mathbf{0}^{C'_i}, & \text{если } i \neq 2k, \\ \mathbf{1}^{C'_i}, & \text{если } i = 2k, \end{cases}$$

получаем, что $C \leq_T \mathrm{Al}(B)$. Так как

$$x \in \sum_{i \in \omega}{}_{\{\mathbf{0},\mathbf{1}\}} C'_i \text{ безатомный } \iff \text{ существует } i_0 \text{ такое, что } \forall i > i_0$$

$$x(i) = \mathbf{0}^{C'_i} \text{ и для всех } i \leq i_0 \ (i \text{ нечетное } \Rightarrow x(i)$$

$$\text{— безатомный элемент } B_k \text{ и } x(i) \leq C(a_k), \text{ где } k = \frac{i-1}{2})\&$$

$$(i \text{ четное } \Rightarrow x(i) = \mathbf{0}^{C'_i} \text{ или } \frac{i}{2} \in C),$$

получаем $\mathrm{Al}(B) \leq_T C$. Таким образом, теорема 1 доказана. □

§ 3. Спектр множества атомов

Теперь докажем несколько теорем о свойствах спектра множества атомов в вычислимой булевой алгебре.

Теорема 2 (об изоморфизме). *Пусть A — подалгебра булевой алгебры B такая, что*

1) *множество* $\mathrm{Atom}(A)$ *атомов алгебры A бесконечно,*
2) *если* $a \in \mathrm{Atom}(A)$, *то* $a \in \mathrm{Fr}(B)$,
3) *если* $a \in \mathrm{Al}(A)$, *то* $a \in S(B)$,
4) $B = \mathrm{gr}(A \cup \mathrm{Atom}(B))$.

Тогда A изоморфна B.

Доказательство. Пусть $x, y \in B$, будем писать $x \sim y$, если $x \triangle y \in \mathrm{Fr}(B)$. Так как $B = \mathrm{gr}(A \cup \mathrm{Atom}(B))$, то $\forall b \in B \, \exists a \in A \ a \sim b$. Легко заметить, что $\forall a \in A \ a \in S(A) \iff a \in S(B)$. Положим

$$S = \{(a, b) \in A \times B \mid a \in \mathrm{Fr}(A) \iff b \in \mathrm{Fr}(B), \ a \in S(A) \iff$$
$$b \in S(B), \ a \in S(A) \Rightarrow \mathrm{At}_A(a) = \mathrm{At}_B(b), \ a \notin S(A) \Rightarrow a \sim b\}.$$

Рутинная проверка показывает, что S является условием изоморфизма булевых алгебр A и B. Таким образом, по критерию Воота A и B изоморфны. Теорема доказана. □

Теорема 3. *Пусть B — вычислимая булева алгебра, содержащая бесконечно много атомов, и $\mathrm{Fr}(B), \mathrm{Al}(B) \in \Delta^0_2$. Тогда существуют вычислимая булева алгебра $A \cong B$ такая, что $\mathrm{Fr}(A)$ вычислимо перечислим.*

Доказательство. Так как B — вычислимая булева алгебра, существуют вычислимо перечислимое дерево D и частично вычислимая функция φ такая, что $\langle D, \varphi \rangle$ — дерево, порождающее B. Также существует сильно вычислимая последовательность $\{D_s\}_{s \in \omega}$ конечных поддеревьев D такая, что $D = \bigcup_{s \in \omega} D_s$ и $D_{s+1} = D_s \cup \{L(a), R(a)\}$, где a — концевая вершина D_s.

Назовем вершину $x \in D$ *конечной*, если $\hat{x} \cap D$ конечно, где $\hat{x} = \{y \mid y \preccurlyeq x\}$. Вершину $x \in D$ назовем *полной*, если $\hat{x} \subseteq D$. Очевидно, что

$$x \text{ — конечная вершина } D \Longleftrightarrow \varphi(x) \in \mathrm{Fr}(B),$$
$$x \text{ — полная вершина } D \Longleftrightarrow \varphi(x) \in \mathrm{Al}(B).$$

Значит, множества конечных и полных вершин являются Δ^0_2-множествами. Тогда существуют сильно вычислимые последовательности $\{F_s\}_{s\in\omega}$ и $\{G_s\}_{s\in\omega}$ конечных множеств такие, что

$$x \text{ — конечная вершина } D \Rightarrow \forall^{\#} s\ x \in F_s,$$
$$x \text{ — не конечная вершина } D \Rightarrow \forall^{\#} s\ x \notin F_s,$$
$$x \text{ — полная вершина } D \Rightarrow \forall^{\#} s\ x \in G_s,$$
$$x \text{ — не полная вершина } D \Rightarrow \forall^{\#} s\ x \notin G_s.$$

Построим новую сильно вычислимую последовательность $\{F'_s\}_{s\in\omega}$ конечных множеств такую, что

1) $F'_s \subseteq D_s$,

2) x — конечная вершина $D \Rightarrow \forall^{\#} s\ x \in F'_s$,

3) x — не конечная вершина $D \Rightarrow \forall^{\#} s\ x \notin F'_s$,

4) F'_s — нижний конус в D_s, т. е. для любых $x, y \in D_s$ из того, что $y \preccurlyeq x$ и $x \in F'_s$, следует, что $y \in F'_s$,

5) $0 \notin F'_s$,

6) если $x \in D_s \setminus F'_s$, то существует $y \preccurlyeq x$ — концевая вершина D_s такая, что $y \notin F'_s$,

7) если x — полная вершина D, то $\forall^{\#} s\ \hat{x} \cap F'_s = \varnothing$.

Смысл этих условий состоит в том, что последовательность $\{F'_s\}_{s\in\omega}$ обладает теми же основными свойствами, что и $\{F \cap D_s\}_{s\in\omega}$, где F — это множество всех конечных вершин в D.

Положим $F'_0 = F_{s_0} \cap D_0$, где s_0 — это первый шаг такой, что

(a) $F_{s_0} \cap D_0$ — нижний конус в D_0,

(b) $0 \notin F_{s_0} \cap D_0$,

(c) если $x \in D_0 \setminus F_{s_0}$, то существует $y \preccurlyeq x$ — концевая вершина D_0 такая, что $y \notin F_{s_0}$,

(d) если $x \in G_{s_0}$, то $\hat{x} \cap F_{s_0} \cap D_0 = \varnothing$.

Такое s_0 всегда существует. Далее, положим $F'_1 = F_{s_1} \cap D_1$, где s_1 — это первый шаг после s_0 такой, что выполнены условия (a)–(d) с заменой F_{s_0}, G_{s_0} и D_0 на F_{s_1}, G_{s_1} и D_1 соответственно, и т. д.

Как нетрудно проверить, $\{F'_s\}_{s\in\omega}$ обладает свойствами 1–7. Для удобства обозначений вместо F'_s будем в дальнейшем писать просто F_s.

Построение нужной булевой алгебры A будет осуществляться по шагам. К концу шага s будут построены конечная булева алгебра A_s, поддерево $\widetilde{D}_s \subseteq D_s$, отображение $f_s : \widetilde{D}_s \to A_s$ такое, что $\langle \widetilde{D}_s, f_s \rangle$ — дерево, порождающее булеву алгебру $\widetilde{A}_s = \mathrm{gr}(\{f_s(x) \mid x \in \widetilde{D}_s\})$, а также множества Fr_s, Fr^-_s.

Считаем, что носитель A_s является начальным сегментом $\mathbb{N}$. Если в описании конструкции встречается выражение «делим атом $a \in A_s$ на два атома a_0 и a_1 в A_{s+1}», то это означает, что мы строим булеву алгебру A_{s+1} такую, что носитель A_{s+1} является начальным сегментом $\mathbb{N}$, $A_{s+1} = \mathrm{gr}(A_s \cup \{a_0\})$, $a_0 \notin A_s$ и $a_0 \le a$. Тогда $a_1 = a \backslash a_0$. Ясно, что по заданной A_s и атому $a \in A_s$ это построение можно осуществить эффективно.

Положим $f = \lim_s f_s$ и $\widetilde{A} = \mathrm{gr}(\{f(x) \mid x \in D\})$. Для каждого $m > 0$ заведем следующие требования:

$$R^0_m : m \text{ — не конечная вершина } D \Rightarrow m \in \mathrm{dom}(f) \text{ и } f(m) \notin \mathrm{Fr}(A),$$
$$R^1_m : m \text{ — конечная вершина } D \Rightarrow m \in \mathrm{dom}(f) \text{ и } f(m) \in \mathrm{Fr}(A).$$

Зададим приоритет на требованиях следующим образом:

$$\text{если } n < m \text{ и } m \neq S(n), \text{ то } R_n^i > R_m^j \text{ для всех } i, j \in \{0,1\},$$

$$\text{если } n < m \text{ и } m = S(n), \text{ то } R_n^0 > R_{S(n)}^0 > R_n^1 > R_{S(n)}^1.$$

Описание конструкции.

Шаг 0. Полагаем $A_0 = \{0,1\}$, причем 1 — наибольший, а 0 — наименьший элементы A_0, $\widetilde{D}_0 = \{0\}$, $f_0(0) = 1$, $\mathrm{Fr}_0 = \varnothing$, $\mathrm{Fr}_0^- = \varnothing$.

Шаг $s+1$. Будем говорить, что

(i) требование R_m^0 *привлекает внимание на шаге* $s+1$, если $m \in D_{s+1}$, $m \notin \widetilde{D}_s$, $H(m) \in \widetilde{D}_s$, $m \notin F_{s+1}$ или $m \in \widetilde{D}_s$, $m \notin F_{s+1}$, $f_s(m) \in \mathrm{Fr}_s$ и существует $k \preccurlyeq S(m)$ — концевая вершина $\widetilde{D}_s$ такая, что $f_s(k) \notin \mathrm{Fr}_s$;

(ii) требование R_m^1 *привлекает внимание на шаге* $s+1$, если $m \in D_{s+1}$, $m \notin \widetilde{D}_s$, $H(m) \in \widetilde{D}_s$, $m \in F_{s+1}$ или $m \in \widetilde{D}_s$, $m \in F_{s+1}$, $f_s(m) \notin \mathrm{Fr}_s$.

Пусть R — требование с наивысшим приоритетом, которое привлекает внимание на шаге $s+1$. Будем говорить, что это *требование действует на шаге* $s+1$. В зависимости от вида требования R будем производить следующие построения.

(1) Пусть $R = R_m^0$ и $m \in D_{s+1}$, $m \notin \widetilde{D}_s$, $H(m) \in \widetilde{D}_s$, $m \notin F_{s+1}$. Рассмотрим $f_s(H(m))$. Если это атом A_s, то делим его на два атома a_0 и a_1 в A_{s+1}, если $f_s(H(m)) = a \vee b$, где a — атом A_s и $b \in \mathrm{Fr}_s^-$, то делим a на два атома a_0 и a_1 в A_{s+1}. Полагаем $\widetilde{D}_{s+1} = \widetilde{D}_s \cup \{m, S(m)\}$, $f_{s+1} \restriction \widetilde{D}_s = f_s$, $f_{s+1}(m) = a_0$, $f_{s+1}(S(m)) = f_s(H(m)) \backslash a_0$, $\mathrm{Fr}_{s+1} = \mathrm{Fr}_s$, $\mathrm{Fr}_{s+1}^- = \mathrm{Fr}_s^-$.

(2) Пусть $R = R_m^0$ и $m \in \widetilde{D}_s$, $m \notin F_{s+1}$, $f_s(m) \in \mathrm{Fr}_s$, и существует $k \preccurlyeq S(m)$ — концевая вершина $\widetilde{D}_s$ такая, что $f_s(k) \notin \mathrm{Fr}_s$. Если $f_s(k)$ — атом A_s, то делим его на два атома a_0 и a_1 в A_{s+1}, если $f_s(k) = a \vee b$, где a — атом A_s и $b \in \mathrm{Fr}_s^-$, то делим a на два атома a_0 и a_1 в A_{s+1}. Полагаем $\widetilde{D}_{s+1} = \widetilde{D}_s \setminus \{k \mid k \prec m\}$,

$$f_{s+1}(n) = \begin{cases} f_s(n), & \text{если } H(m) \preccurlyeq n \text{ или } n \text{ несравнимо с } k \text{ и } m, \\ f_s(n) \vee a_0, & \text{если } n = m, \\ f_s(n) \backslash a_0, & \text{если } k \preccurlyeq n \preccurlyeq S(m), \end{cases}$$

$\mathrm{Fr}_{s+1}^- = \mathrm{Fr}_s^- \setminus \{b \in \mathrm{Fr}_s^- \mid b \leq f_s(m)\} \cup \{f_s(m)\}$, $\mathrm{Fr}_{s+1} = \mathrm{Fr}_s$.

(3) Пусть $R = R_m^1$ и $m \in D_{s+1}$, $m \notin \widetilde{D}_s$, $H(m) \in \widetilde{D}_s$, $m \in F_{s+1}$. Рассмотрим $f_s(H(m))$. Если это атом A_s, то делим его на два атома a_0 и a_1 в A_{s+1}, если $f_s(H(m)) = a \vee b$, где a — атом A_s и $b \in \mathrm{Fr}_s^-$, то делим a на два атома a_0 и a_1 в A_{s+1}. Полагаем $\widetilde{D}_{s+1} = \widetilde{D}_s \cup \{m, S(m)\}$, $f_{s+1} \restriction \widetilde{D}_s = f_s$, $f_{s+1}(m) = a_0$, $f_{s+1}(S(m)) = f_s(H(m)) \backslash a_0$, $\mathrm{Fr}_{s+1} = \{x \in A_{s+1} \mid \exists y \in \mathrm{Fr}_s \quad x \leq y\} \cup \{f_{s+1}(m)\}$, $\mathrm{Fr}_{s+1}^- = \mathrm{Fr}_s^-$.

(4) Пусть $R = R_m^1$ и $m \in \widetilde{D}_s$, $m \in F_{s+1}$, $f_s(m) \notin \mathrm{Fr}_s$. Полагаем $\mathrm{Fr}_{s+1} = \mathrm{Fr}_s \cup \{x \in A_s \mid x \leq f_s(m)\}$, $A_{s+1} = A_s$, $\widetilde{D}_{s+1} = \widetilde{D}_s$, $f_{s+1} = f_s$, $\mathrm{Fr}_{s+1}^- = \mathrm{Fr}_s^-$.

На этом шаг $s+1$ завершен. Теперь доказательство теоремы будет следовать из лемм, приведенных ниже.

Лемма 5. *Для любого s выполнены следующие условия:*

1) *если k — концевая вершина $\widetilde{D}_s$, то $f_s(k) = a \vee b$, где a — атом A_s, $a \notin \mathrm{Fr}_s^-$ и ($b \in \mathrm{Fr}_s^-$ или $b = 0$),*

2) Fr_s *— нижний конус в A_s,*

3) $\forall n \in \widetilde{D}_s \setminus \{0\}$ $(f_s(n) \in \mathrm{Fr}_s \,\&\, f_s(S(n)) \in \mathrm{Fr}_s) \Rightarrow f_s(H(n)) \in \mathrm{Fr}_s$,

4) $f_s(0) = 1 \notin \mathrm{Fr}_s$,

5) *если k — концевая вершина $\widetilde{D}_s$ и все атомы A_s, лежащие под $f_s(k)$, принадлежат Fr_s, то $f_s(k) \in \mathrm{Fr}_s$,*

6) $\mathrm{Fr}_s^- \subseteq \mathrm{Fr}_s$.

Доказательство будем вести индукцией по s. Пусть на шаге s все эти условия выполнены. Рассмотрим шаг $s+1$. Пусть на этом шаге действует требование R. Рассмотрим следующие случаи.

(1) $R = R_m^0$ и $m \in D_{s+1}$, $m \notin \widetilde{D}_s$, $H(m) \in \widetilde{D}_s$, $m \notin F_{s+1}$. Так как $m \notin F_{s+1}$, то $H(m) \notin F_{s+1}$. По условию $H(m) \in \widetilde{D}_s$. Покажем, что $f_s(H(m)) \notin \mathrm{Fr}_s$. Пусть $f_s(H(m)) \in \mathrm{Fr}_s$. Если существует $k \preccurlyeq S(H(m))$ — концевая вершина $\widetilde{D}_s$ такая, что $f_s(k) \notin \mathrm{Fr}_s$, то требование $R^0_{H(m)}$ привлекало бы внимание, что невозможно. Значит, для всех концевых вершин $k \in \widetilde{D}_s$ таких, что $k \preccurlyeq S(H(m))$, выполнено $f_s(k) \in \mathrm{Fr}_s$. По индукционному предположению получаем, что $f_s(H(H(m))) \in \mathrm{Fr}_s$, но $H(H(m)) \notin F_{s+1}$. Проводя это рассуждение еще несколько раз, получаем, что $f_s(0) \in \mathrm{Fr}_s$; противоречие. Таким образом, $f_s(H(m)) \notin \mathrm{Fr}_s$. Теперь выполнение всех условий очевидно.

(2) $R = R_m^0$ и $m \in \widetilde{D}_s$, $m \notin F_{s+1}$, $f_s(m) \in \mathrm{Fr}_s$ и существует $k \preccurlyeq S(m)$ — концевая вершина $\widetilde{D}_s$ такая, что $f_s(k) \notin \mathrm{Fr}_s$. Проверим условие 3. Пусть $k \preccurlyeq S(m)$ — концевая вершина $\widetilde{D}_s$ такая, что $f_s(k) \notin \mathrm{Fr}_s$. Тогда $f_s(k) = a_0 \vee a_1 \vee b$, где a_0, a_1 — атомы A_{s+1}, $a_0 \vee a_1$ — атом A_s, $b \in \mathrm{Fr}_s^-$ или $b = 0$. Пусть $n \in \widetilde{D}_{s+1} \setminus \{0\}$ и $f_{s+1}(n) \in \mathrm{Fr}_{s+1} \,\&\, f_{s+1}(S(n)) \in \mathrm{Fr}_{s+1}$. Тогда ясно, что $f_s(n) \in \mathrm{Fr}_s$ и $f_s(S(n)) \in \mathrm{Fr}_s$. По индукционному предположению $f_s(H(n)) \in \mathrm{Fr}_s$. Пусть $f_{s+1}(H(n)) \notin \mathrm{Fr}_{s+1}$. Это возможно лишь в том случае, если $f_{s+1}(H(n)) = f_s(H(n)) \vee a_0$ либо $f_{s+1}(H(n)) = f_s(H(n)) \backslash a_0$. Если выполнен первый случай, то $H(n) = m$, что невозможно, так как m — концевая вершина $\widetilde{D}_{s+1}$. Если выполнен второй случай, то $k \preccurlyeq H(n)$. Тогда $f_s(k) \leq f_s(H(n)) \in \mathrm{Fr}_s$. Отсюда $f_s(k) \in \mathrm{Fr}_s$; противоречие. Таким образом, $f_{s+1}(H(n)) \in \mathrm{Fr}_{s+1}$.

Проверка остальных условий достаточно очевидна.

(3) $R = R_m^1$ и $m \in D_{s+1}$, $m \notin \widetilde{D}_s$, $H(m) \in \widetilde{D}_s$, $m \in F_{s+1}$. Проверим условие 3, т. е. что

$$\forall n \in \widetilde{D}_{s+1} \setminus \{0\} \ (f_{s+1}(n) \in \mathrm{Fr}_{s+1} \,\&\, f_{s+1}(S(n)) \in \mathrm{Fr}_{s+1} \Rightarrow f_{s+1}(H(n)) \in \mathrm{Fr}_{s+1}).$$

Заметим, что $\forall n \in \widetilde{D}_s$ $f_s(n) \in \mathrm{Fr}_s \iff f_{s+1}(n) \in \mathrm{Fr}_{s+1}$. Поэтому для $n \in \widetilde{D}_s \setminus \{0\}$ условие 3 выполнено. Пусть $n = m$. По построению $f_{s+1}(m) \in \mathrm{Fr}_{s+1}$. Если $f_{s+1}(S(m)) = f_s(H(m)) \backslash a_0 \in \mathrm{Fr}_{s+1}$, то существует $y \in \mathrm{Fr}_s$ такой, что $f_s(H(m)) \backslash a_0 \leq y$. Тогда $f_s(H(m)) \leq y$ и, следовательно, $f_s(H(m)) \in \mathrm{Fr}_s$. Значит, $f_{s+1}(H(m)) \in \mathrm{Fr}_{s+1}$.

Проверим условие 5. Рассмотрим случай, когда $k = S(m)$, так как проверка остальных случаев тривиальна. Пусть $f_{s+1}(H(m)) = a_0 \vee a_1 \vee b$, $f_{s+1}(m) = a_0$, $f_{s+1}(S(m)) = a_1 \vee b$, где a_0, a_1 — атомы A_{s+1}, $a_0 \vee a_1$ — атом A_s, $b \in \mathrm{Fr}_s^-$ или $b = 0$. Предположим, что все атомы A_{s+1}, лежащие под $f_{s+1}(S(m))$, принадлежат Fr_{s+1}. Тогда $a_1 \in \mathrm{Fr}_{s+1}$. Значит, существует $y \in \mathrm{Fr}_s$ такой, что $a_1 \leq y$. Тем самым $a = a_0 \vee a_1 \leq y$, следовательно, $a \in \mathrm{Fr}_s$. Кроме того, все атомы A_{s+1}, лежащие под b, являются атомами A_s и принадлежат Fr_s. По индукционному предположению $f_{s+1}(H(m)) \in \mathrm{Fr}_s$, значит, $f_{s+1}(S(m)) \in \mathrm{Fr}_{s+1}$.

Проверка остальных условий очевидна.

(4) $R = R^1_m$ и $m \in \widetilde{D}_s$, $m \in F_{s+1}$, $f_s(m) \notin \mathrm{Fr}_s$. Рассмотрим только условие 3, так как проверка остальных условий тривиальна.

Нужно доказать, что

$$\forall n \in \widetilde{D}_{s+1} \setminus \{0\}\ (f_{s+1}(n) \in \mathrm{Fr}_{s+1}\ \& f_{s+1}(S(n)) \in \mathrm{Fr}_{s+1} \Rightarrow f_{s+1}(H(n)) \in \mathrm{Fr}_{s+1}).$$

Рассмотрим случай, когда $n = m$, поскольку в остальных случаях доказательство очевидно. По построению $f_{s+1}(m) \in \mathrm{Fr}_{s+1}$. Докажем, что $f_{s+1}(S(m)) \notin \mathrm{Fr}_{s+1}$. Пусть $f_{s+1}(S(m)) \in \mathrm{Fr}_{s+1}$, тогда $f_{s+1}(S(m)) \in \mathrm{Fr}_s$. Покажем, что $S(m) \in F_{s+1}$. Действительно, пусть $S(m) \notin F_{s+1}$. Тогда существует $k \preccurlyeq m$ — концевая вершина $\widetilde{D}_s$ такая, что $f_s(k) \notin \mathrm{Fr}_s$. Если это не так, то по индукционному предположению получим, что $f_s(m) \in \mathrm{Fr}_s$; противоречие, так как по условию $f_s(m) \notin \mathrm{Fr}_s$. Таким образом, получили, что $S(m) \in \widetilde{D}_s$, $S(m) \notin F_{s+1}$, $f_s(S(m)) = f_{s+1}(S(m)) \in \mathrm{Fr}_s$ и существует $k \preccurlyeq m = S(S(m))$ — концевая вершина $\widetilde{D}_s$ такая, что $f_s(k) \notin \mathrm{Fr}_s$. Значит, на шаге $s+1$ требование $R^0_{S(m)}$ привлекает внимание, что невозможно, так как на этом шаге действует требование R^1_m. Итак, доказано, что $S(m) \in F_{s+1}$. По условию $m \in F_{s+1}$, значит, $H(m) \in F_{s+1}$. Тогда $f_s(H(m)) \in \mathrm{Fr}_s$, так как если $f_s(H(m)) \notin \mathrm{Fr}_s$, то требование $R^1_{H(m)}$ привлекает внимание на шаге $s+1$, что невозможно. Поскольку $f_s(m) \leq f_s(H(m))$, то $f_s(m) \in \mathrm{Fr}_s$; противоречие, ибо по условию $f_s(m) \notin \mathrm{Fr}_s$. Таким образом, доказали, что $f_{s+1}(S(m)) \notin \mathrm{Fr}_{s+1}$. $\square$

Лемма 6. *Каждое требование действует лишь конечное число раз.*

Доказательство. Рассмотрим $n > 0$ такое, что $n+1 = S(n)$, и требования R^0_n, R^0_{n+1}, R^1_n, R^1_{n+1}. Пусть s_0 — шаг, после которого ни одно требование с более высоким приоритетом не действует. Тогда существует $s_1 \geq s_0$ такое, что $n, S(n) \in \widetilde{D}_s$ для всех $s \geq s_1$. Далее, существует $s_2 \geq s_1$ такое, что

$$n \text{ — конечная вершина } D \Rightarrow \forall s \geq s_2\ n \in F_s,$$
$$n \text{ — не конечная вершина } D \Rightarrow \forall s \geq s_2\ n \notin F_s,$$
$$S(n) \text{ — конечная вершина } D \Rightarrow \forall s \geq s_2\ S(n) \in F_s,$$
$$S(n) \text{ — не конечная вершина } D \Rightarrow \forall s \geq s_2\ S(n) \notin F_s.$$

Рассмотрим шаг s_2+1. Пусть n и $S(n)$ — не конечные вершины D, тогда $n \notin F_{s_2}$. Если $f_{s_2}(n) \in \mathrm{Fr}_{s_2}$, то существует $k \preccurlyeq S(n)$ — концевая вершина $\widetilde{D}_{s_2}$ такая, что $f_{s_2}(k) \notin \mathrm{Fr}_{s_2}$, так как в противном случае $f_{s_2}(H(n)) \in \mathrm{Fr}_{s_2}$ и $H(n) \notin F_{s_2}$. Поскольку требование $R^0_{H(n)}$ не привлекает внимание на шаге s_2+1, то для любой концевой вершины $k \preccurlyeq S(H(n))$ дерева $\widetilde{D}_{s_2}$ будем иметь $f_{s_2}(k) \in \mathrm{Fr}_{s_2}$. Значит, $f_{s_2}(H(H(n)) \in \mathrm{Fr}_{s_2}$, но $H(H(n)) \notin F_{s_2}$. Продолжая эти рассуждения, получим, что $f_{s_2}(0) \in \mathrm{Fr}_{s_2}$; противоречие. Значит, требование R^0_n привлекает внимание на шаге s_2+1, а тогда оно действует на этом шаге.

Таким образом, $f_{s_2+1}(n) \notin \mathrm{Fr}_{s_2+1}$. Аналогично $f_{s_2+2}(S(n)) \notin \mathrm{Fr}_{s_2+2}$. Значит, после шага s_2+2 ни одно из требований R^0_n, R^0_{n+1}, R^1_n, R^1_{n+1} не будет привлекать внимания, а следовательно, не будет действовать.

Пусть n — не конечная, а $S(n)$ — конечная вершины D. Как и выше, получаем, что $f_{s_2+1}(n) \notin \mathrm{Fr}_{s_2+1}$. Если $f_{s_2+1}(S(n)) \notin \mathrm{Fr}_{s_2+1}$, то требование

$R^1_{S(n)}$ будет привлекать внимание на шаге s_2+2, а значит, будет действовать на этом шаге. Таким образом, $f_{s_2+2}(S(n)) \in \mathrm{Fr}_{s_2+2}$. Значит, после шага s_2+2 ни одно из требований R^0_n, R^0_{n+1}, R^1_n, R^1_{n+1} не будет привлекать внимания, а следовательно, не будет действовать.

Случаи, когда n — конечная, а $S(n)$ — не конечная вершины D и когда n и $S(n)$ — конечные вершины D, рассматриваются аналогично. $\square$

Лемма 7. *Для любого $n \in D$ существует предел $f(n) = \lim\limits_s f_s(n)$.*

Доказательство непосредственно следует из предыдущей леммы. $\square$

Пусть $\widetilde{A} = \mathrm{gr}(f(n) \mid n \in D)$, тогда ясно, что $\langle D, f\rangle$ — дерево, порождающее булеву алгебру $\widetilde{A}$. Значит, $B \cong \widetilde{A}$. Положим $\mathrm{Fr} = \bigcup\limits_{s\in\omega} \mathrm{Fr}_s$. Докажем несколько лемм о свойствах $\widetilde{A}$ и Fr.

Лемма 8. *Если a —атом $\widetilde{A}$, то $a \in \mathrm{Fr}(A)$.*

Доказательство. Так как a —атом $\widetilde{A}$, то существует n — концевая вершина D такая, что $f(n) = a$. Существует s_0 такой, что $f_s(n) = f(n)$ для всех $s \geq s_0$. Рассмотрим элемент $f_{s_0}(n) \in A_{s_0}$. Имеем $f_{s_0}(n) = a \vee b$, где a — атом A_{s_0}, $b \in \mathrm{Fr}^-_{s_0}$ или $b = 0$. В любом случае $b \in \mathrm{Fr}(A)$. Поскольку n — концевая вершина D и $f_s(n) = f_{s_0}(n)$ для всех $s \geq s_0$, то a является атомом A. Значит, $a \in \mathrm{Fr}(A)$. $\square$

Лемма 9. *Если n — полная вершина D, то $f(n) \in S(A)$.*

Доказательство. Рассмотрим s_0 такое, что $f_s(n) = f(n)$ для всех $s \geq s_0$. Рассмотрим $s_1 \geq s_0$ такое, что для всех $s \geq s_1$ $F_s \cap \hat{n} = \varnothing$. Существует $s_2 \geq s_1$ такое, что $f_{s_2}(m) \notin \mathrm{Fr}_{s_2}$ для всех $m \in \widetilde{D}_{s_2} \cap \hat{n}$. Тогда верна следующая эквивалентность: $x \leq f(n)$ и x — атом $A \iff x \in A_{s_2}$ и существует $b \in \mathrm{Fr}^-_{s_2}$ такое, что $x \leq b \leq f(n)$.

Отсюда видно, что $f(n)$ содержит лишь конечное число атомов A, т. е. $f(n) \in S(A)$. $\square$

Лемма 10. *Если x — безатомный элемент $\widetilde{A}$, то $x \in S(A)$.*

Доказательство непосредственно следует из предыдущей леммы. $\square$

Лемма 11. *Если $x \in \mathrm{Fr}$, то $x \in \mathrm{Fr}(A)$.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathrm{Fr}$. Рассмотрим s_0 такое, что $x \in \mathrm{Fr}_{s_0}$. Пусть $x = x_0 \vee \dots \vee x_k$, где x_i — атом A_{s_0} для каждого $i = 1,\dots,k$. Тогда все x_i принадлежат Fr_{s_0}. Если существует $b \in \mathrm{Fr}^-_{s_0}$ такой, что $x_i \leq b$, то x_i — атом A. Если такого b нет, то существует n_i — концевая вершина $\widetilde{D}_{s_0}$ такая, что $f_{s_0}(n_i) = x_i \vee b$, где $b \in \mathrm{Fr}^-_{s_0}$ или $b = 0$. Если на каком-то шаге $s \geq s_0$ действует требование R^0_m, где $n_i \preccurlyeq m$, то x_i окажется лежащим под элементом из Fr^-_s, значит, $x_i \in \mathrm{Fr}(A)$. Если никакое требование вида R^0_m, где $n_i \preccurlyeq m$, не действует после шага s_0, то n_i — конечная вершина D, а тогда $x_i \in \mathrm{Fr}(A)$.

Таким образом, получаем, что $x \in \mathrm{Fr}(A)$. $\square$

Лемма 12. *Если x — атом A, то $x \in \mathrm{Fr}$.*

Доказательство. Рассмотрим s_0 такое, что x — атом A_{s_0}. Если существует $b \in \mathrm{Fr}^-_{s_0}$ такой, что $x \leq b$, то $x \in \mathrm{Fr}_{s_0}$. В противном случае существует n — концевая вершина $\widetilde{D}_{s_0}$ такая, что $f_{s_0}(n) = x \vee b$, где $b \in \mathrm{Fr}^-_{s_0}$ или $b = 0$. Если существует $s_1 > s_0$ такой, что $f_{s_1}(n) \neq f_{s_0}(n)$, то это означает, что на каком-то шаге, большем s_0, действовало требование R^0_m, где $n \preccurlyeq m$. В этом случае существует $b' \in \mathrm{Fr}^-_{s_1}$ такое, что $x \leq b'$. Значит, $x \in \mathrm{Fr}_{s_1}$.

Если $f_s(n) = f_{s_0}(n)$ для всех $s \geq s_0$, то n — концевая вершина D. Значит, существует $s_1 \geq s_0$ такое, что $n \in F_s$ для всех $s \geq s_1$. Далее, если $f_s(n) \notin \mathrm{Fr}_s$, то требование R^1_n привлекает внимание на шаге s. Значит, существует $s_2 \geq s_1$ такой, что $f_{s_2}(n) \in \mathrm{Fr}_{s_2}$, а тогда $x \in \mathrm{Fr}_{s_2}$. $\square$

Лемма 13. $\mathrm{Fr}(A)$ *вычислимо перечислим.*

Доказательство. Так как

$$x \in \mathrm{Fr}(A) \Longleftrightarrow \exists x_1 \ldots \exists x_k \bigwedge_{i=1}^{k} x_i \in \mathrm{Fr} \wedge x = x_1 \vee \cdots \vee x_k$$

и множество Fr вычислимо перечислимо, то $\mathrm{Fr}(A)$ вычислимо перечислим. $\square$

Лемма 14. A *порождается* $\widetilde{A}$ *и* $\mathrm{Atom}(A)$.

Доказательство. Если $x, y \in A$, то будем писать $x \sim y$ в случае $x \bigtriangleup y \in \mathrm{Fr}(A)$. Пусть $x \in A$, тогда существует s_0 такое, что $x \in A_{s_0}$. Легко заметить, что существуют $n_1, \ldots, n_k$ — концевые вершины $\widetilde{D}_{s_0}$ такие, что $x \sim f_{s_0}(n_1) \vee \cdots \vee f_{s_0}(n_k)$. Положим $C_{s_0} = \{n_1, \ldots, n_k\}$.

Пусть на шаге $s \geq s_0$ мы уже построили C_s. Рассмотрим шаг $s+1$. Если на нем действует требование вида R^1_m или R^0_m случая (1), то положим $C_{s+1} = C_s$. Если действует требование R^0_m и имеет место случай (2), то рассмотрим k — концевую вершину $\widetilde{D}_s$ из определения случая (2). Положим $C'_s = C_s \setminus \widehat{m}$. Если $k \preccurlyeq n \preccurlyeq S(m)$ для некоторого $n \in C_s$, то пусть $C_{s+1} = C'_s \cup \{m\}$, иначе $C_{s+1} = C'_s$.

Понятно, что $x \sim \bigvee_{n \in C_s} f_s(n)$ для всех $s \geq s_0$. Так как в C_s мы добавляем вершины все меньшего и меньшего уровня, то существует $C = \lim_s C_s$ и $x \sim \bigvee_{n \in C} f(n)$. Поскольку $\bigvee_{n \in C} f(n) \in \widetilde{A}$, получаем, что $A = \mathrm{gr}(\widetilde{A} \cup \mathrm{Atom}(A))$. $\square$

По теореме 2 об изоморфизме выводим, что $A \cong \widetilde{A} \cong B$. По лемме 13 $\mathrm{Fr}(A)$ вычислимо перечислим. Теорема доказана. $\square$

Теорема 4. *Пусть B — вычислимая булева алгебра такая, что множество атомов B бесконечно и* $\mathrm{Fr}(B)$ *вычислимо перечислим. Тогда существует вычислимая булева алгебра $A \cong B$ такая, что множество* $\mathrm{Atom}(A)$ *вычислимо.*

Доказательство. Рассмотрим сильно вычислимую последовательность конечных булевых алгебр $\{B_i\}_{i\in\omega}$ такую, что $B_0 = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, $B_{i+1} = \mathrm{gr}(B_i \cup \{a_i\})$, где a_i — атом B_{i+1} и $B = \bigcup_{i\in\omega} B_i$, а также сильно вычислимую последовательность $\{\mathrm{Fr}_i\}_{i\in\omega}$ такую, что $\mathrm{Fr}_0 = \varnothing$, $\mathrm{Fr}_i \subseteq \mathrm{Fr}_{i+1}$ и $\mathrm{Fr}(B) = \bigcup_{i\in\omega} \mathrm{Fr}_i$.

Построение нужной булевой алгебры будем производить по шагам. На шаге s будет построена конечная подалгебра A_s булевой алгебры B_s и множество At_s, состоящее из атомов A_s. Кроме того, любой атом A_s, не входящий в At_s, является атомом B_s.

Шаг 0. Положим $A_0 = B_0$ и $\mathrm{At}_0 = \varnothing$.

Шаг s+1. Пусть $B_{s+1} = \mathrm{gr}(B_s \cup \{a_s\})$, где a_s — атом B_{s+1}. Пусть c — атом A_s такой, что $a_s \leq c$. Если $c \in \mathrm{At}_s$, то положим $A_{s+1} = A_s$, если $c \notin \mathrm{At}_s$, то положим $A_{s+1} = \mathrm{gr}(A_s \cup \{a_s\})$. Пусть $\mathrm{At}_{s+1} = \{x \in A_{s+1} \mid x$ — атом A_{s+1} и $\exists y \in \mathrm{Fr}_{s+1} \cap A_{s+1}\ (x \leq y)\}$. На этом шаг $s+1$ завершен.

Пусть $\widetilde{A} = \bigcup\limits_{i\in\omega} A_i$ и $\mathrm{At} = \bigcup\limits_{i\in\omega} \mathrm{At}_i$. Заметим, что $\mathrm{Atom}(\widetilde{A}) = \mathrm{At}$. Действительно, пусть a — атом $\widetilde{A}$, тогда a — атом A_s для почти всех s. Если $a \notin \mathrm{At}$, то a должен быть атомом B, так как иначе мы бы разделили его на несколько частей. Таким образом, $a \in \mathrm{Fr}(B)$ и по нашему построению a будет перечислен в At_s на некотором шаге s.

Каждый атом $\widetilde{A}$ является объединением конечного числа атомов из B, так как $\mathrm{At} \subseteq \mathrm{Fr}(B)$.

Пусть b — атом B. Рассмотрим первый шаг s такой, что $b \in B_s$. Пусть $b \leq a$, где a — атом A_s. Если $a \in \mathrm{At}_s$, то a — атом $\widetilde{A}$. Если $a \notin \mathrm{At}_s$, то $a = b$ и в этом случае a также будет атомом $\widetilde{A}$. Таким образом, каждый атом B лежит под некоторым атомом $\widetilde{A}$. Отсюда следует, что множество атомов $\widetilde{A}$ бесконечно и $\mathrm{Al}(\widetilde{A}) \subseteq \mathrm{Al}(B) \subseteq S(B)$.

Покажем, что $B = \mathrm{gr}(\widetilde{A} \cup \mathrm{Atom}(B))$. Возьмем $b \in B$ и рассмотрим наименьший шаг s такой, что $b \in B_s$. Тогда $b = b_1 \vee \ldots \vee b_k$, где $b_1, \ldots, b_k$ — атомы B_s. Рассмотрим $a = a_1 \vee \ldots \vee a_k \in A_s$, где a_i — это атом A_s такой, что $b_i \leq a_i$. Нетрудно видеть, что $a \triangle b \in \mathrm{Fr}(B)$. Следовательно, $B = \mathrm{gr}(\widetilde{A} \cup \mathrm{Atom}(B))$.

Таким образом, по теореме 2 об изоморфизме $\widetilde{A} \cong B$. Так как $\widetilde{A}$ — вычислимо перечислимое множество, существует разнозначная вычислимая функция f такая, что $\rho f = \widetilde{A}$. С помощью функции f определим на $\mathbb{N}$ вычислимые функции $\vee$, $\wedge$ и C так, чтобы $A = \langle \mathbb{N}, \vee, \wedge, C\rangle$ была вычислимой булевой алгеброй, изоморфной $\widetilde{A}$. Так как $x \in \mathrm{Atom}(A) \iff f(x) \in \mathrm{At}$ и множество At вычислимо перечислимо, то множество $\mathrm{Atom}(A)$ вычислимо перечислимо, а значит, и вычислимо. $\square$

Теперь докажем основную теорему о булевых алгебрах с 1-низким множеством атомов.

Теорема 5. *Пусть B — вычислимая булева алгебра и множество атомов B является 1-низким, тогда существует вычислимая булева алгебра $A \cong B$ такая, что множество $\mathrm{Atom}(A)$ вычислимо.*

Доказательство. Так как $\mathrm{Fr}(B)$ является Σ^0_1-множеством относительно $\mathrm{Atom}(B)$, а $\mathrm{Al}(B)$ является Π^0_1-множеством относительно Atom (B), то из того, что множество $\mathrm{Atom}(B)$ 1-низкое, следует, что $\mathrm{Fr}(B)$ и $\mathrm{Al}(B)$ суть Δ^0_2-множества. Если B содержит конечное число атомов, то доказывать нечего, если B содержит бесконечное число атомов, то доказательство теоремы вытекает из теорем 3 и 4. $\square$

После того как было получено доказательство теоремы 5, П. Е. Алаев указал на то, что в работе Найт и Стоба [11] содержится доказательство такого утверждения: если булева алгебра B является Δ^0_2-алгеброй с предикатами, выделяющими множество атомов, идеал Фреше и идеал безатомных элементов, то существует булева алгебра $A \cong B$, которая является вычислимой вместе с предикатом, выделяющим множество атомов. С помощью этого утверждения можно получить еще одно доказательство теоремы 5.

§ 4. Открытые проблемы

В свете полученных результатов возникли следующие открытые вопросы: является ли спектр идеала безатомных элементов в вычислимой булевой алгебре характеристики (1,1,0) или (1,0,1) замкнутым вверх, а также существует ли вычислимая булева алгебра характеристики (1,1,0) или (1,0,1), у которой идеал безатомных элементов наследственно невычислим?

В связи с теоремой 5 возник такой вопрос: пусть спектр множества атомов в вычислимой булевой алгебре содержит n-низкую степень для некоторого n, тогда содержит ли он вычислимую степень?

Ответы на эти вопросы могут дать более глубокое понимание строения спектров множества атомов и безатомных элементов в вычислимых булевых алгебрах.

В заключение автор благодарит своего научного руководителя С. С. Гончарова за постановку и обсуждение рассматриваемых в этой статье интересных проблем, а также рецензента за полезные замечания по оформлению работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ash C. J., Nerode A.* Intrinsically recursive relations // Aspects of effective algebra (Clayton, 1979). Yarra Glen, Australia: Upside Down a Book Co., 1981. P. 26-41.

2. *Harizanov V. S.* Degree spectrum of a recursive relation on a recursive structure / PhD Thesis. Madison, WI: Univ. Wisconsin, 1987.

3. *Гончаров С. С., Доуни Р., Хиршфельд Д.* Спектры степеней для отношений на булевых алгебрах // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 2. С. 182–193.

4. *Remmel J. B.* Recursive isomorphism types of recursive Boolean algebras // J. Symb. Logic. 1981. V. 46, N 4. P. 572–594.

5. *Downey R.* Every recursive Boolean algebra is isomorphic to one with incomplete atoms // Ann. Pure Appl. Logic. 1993. V. 60, N 3. P. 193–206.

6. *Роджерс X.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

7. *Soare R. I.* Recursively enumerable sets and degrees. Heidelberg: Springer-Verl., 1987. (Perspect. Math. Logic).

8. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.

9. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.

10. *Власов В. Н., Гончаров С. С.* О сильной конструктивизируемости булевых алгебр элементарной характеристики (1,1,0) // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 6. С. 618–638.

11. *Knight J., Stob M.* Computable Boolean algebras // J. Symb. Logic. 2000. V. 65, N 4. P. 1605–1623.

Статья поступила 16 июля 2003 г., окончательный вариант — 27 апреля 2005 г.

Семухин Павел Михайлович,
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
Current address:
The University of Auckland,
Department of Computer Science,
Private Bag 92019,
Auckland, New Zealand
pavel@cs.auckland.ac.nz