Сибирский математический журнал
Июль—август, 2005. Том 46, № 4

УДК 519.21

О ФАКТОРИЗАЦИОННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ В ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ, ЗАДАННЫХ НА ЦЕПИ МАРКОВА

В. И. Лотов, Н. Г. Орлова

Аннотация: Пусть τ — некоторый момент остановки для случайного блуждания S_n, заданного на переходах конечной цепи Маркова, а $\tau(t)$ — момент первого после τ достижения уровня t. Доказана теорема, устанавливающая связь между двойными преобразованиями совместных распределений (τ, S_τ) и $(\tau(t), S_{\tau(t)})$. Этот результат затем применяется для исследования числа пересечений полосы траекториями случайного блуждания.

Ключевые слова: случайное блуждание на цепи Маркова, факторизационные представления, граничные задачи.

1. Введение

Пусть $\{\varkappa_n\}_{n\geq 0}$ — конечная однородная неразложимая цепь Маркова с множеством состояний $D = \{1,\dots,m\}$ и с матрицей переходных вероятностей $P = \|p_{jk}\|_{j,k\in D}$. Обозначим через $\{\xi_{jk}^{(n)}\}$, $n \geq 1$, $j,k \in D$, не зависящее от $\{\varkappa_n\}$ семейство независимых случайных величин, одинаково распределенных при фиксированных j, k.

Эволюция марковского процесса $\{S_n, \varkappa_n\}_{n\geq 0}$ задается начальным значением $\{0, \varkappa_0\}$ и соотношением

$$S_{n+1} = S_n + \xi^{(n+1)}_{\varkappa_n \varkappa_{n+1}}, \quad n \geq 0. \tag{1}$$

Распределение $\{S_n, \varkappa_n\}_{n\geq 0}$ будет полностью определено, если заданы распределение $\varkappa_0$ и матрица

$$F(\mu) = \left\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} d\mathbb{P}(S_1 < y, \varkappa_1 = k/\varkappa_0 = j) \right\| = \|p_{jk} f_{jk}(\mu)\|, \quad \operatorname{Im}\mu = 0,$$

где $f_{jk}(\mu) = \mathbb{E}e^{i\mu\xi_{jk}^{(n)}}$.

Случайные блуждания такого типа рассматривались в работах многих авторов, см., например, [1–4] и литературу там. Оказалось, что многие результаты в граничных задачах для обычных случайных блужданий и связанные с их получением факторизационные методы могут быть перенесены на случайные блуждания, заданные на цепи Маркова. В настоящей работе доказана теорема 1, являющаяся перенесением на процессы (1) аналогичного результата из

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00810) и Президента РФ (грант НШ–2139.2003.1).

[5], который был там установлен для случая $m = 1$, т. е. для обычных случайных блужданий, порожденных последовательностью независимых одинаково распределенных слагаемых.

Пусть τ — марковский момент относительно последовательности $\{S_n\}$. На множестве $\{\tau < \infty\}$ определим случайные величины

$$\tau_+(t) = \min\{n \geq \tau : S_n \geq t\}, \quad \tau_-(t) = \min\{n \geq \tau : S_n \leq t\},$$

где t — произвольное вещественное число. В теореме 1 устанавливается связь между матрицами двойных преобразований

$$G_t^{\pm}(z,\mu) = \|\mathbb{E}(z^{\tau_\pm(t)} \exp\{i\mu S_{\tau_\pm(t)}\}; \tau_\pm(t) < \infty, \varkappa_{\tau_\pm(t)} = k/\varkappa_0 = j)\|$$

и

$$G(z,\mu) = \|\mathbb{E}(z^{\tau} e^{i\mu S_\tau}; \tau < \infty, \varkappa_\tau = k/\varkappa_0 = j)\|.$$

Формулировка теоремы приведена ниже в п. 2, поскольку она требует введения матричной факторизации и ряда новых обозначений. Полученная теорема может использоваться при решении различных граничных задач для введенного случайного блуждания. Ниже мы приведем две из них. Первая касается нахождения двойных преобразований для совместного распределения момента первого выхода из полосы для траекторий блуждания (1) и положения в момент этого выхода. Другая задача связана с изучением распределения числа пересечений полосы траекториями блуждания (1). Найденные с помощью теоремы 1 факторизационные представления для этих двух задач содержатся в п. 3. Отметим, что дальнейший анализ факторизационных представлений для двойных преобразований приводит в ряде случаев к полным асимптотическим разложениям для изучаемых распределений. Это сделано в [4] для распределений, связанных с первым выходом блуждания (1) из полосы. Асимптотические разложения для числа пересечений полосы, полученные на основе теоремы 3, предполагается опубликовать позже.

2. Основная теорема

Известно [1], что при $|z| < 1$, $\operatorname{Im}\ \mu = 0$ матричная функция $E - zF(\mu)$ допускает каноническую факторизацию двух типов:

$$E - zF(\mu) = R_{z-}(\mu)R_{z+}(\mu) = L_{z+}(\mu)L_{z-}(\mu),$$

соответственно называемую *правой* и *левой факторизациями*. Здесь E — единичная матрица. Мы будем использовать следующие представления для $R_{z+}(\mu)$ и $L_{z-}(\mu)$, известные из [1]:

$$R_{z+}(\mu) = E - \|\mathbb{E}(z^{\eta_+} e^{i\mu\chi_+}; \eta_+ < \infty, \varkappa_{\eta_+} = k/\varkappa_0 = j)\| \equiv E - \left\|R_{jk}^{(1)}(z,\mu)\right\|,$$

$$L_{z-}(\mu) = E - \|\mathbb{E}(z^{\eta_-} e^{i\mu\chi_-}; \eta_- < \infty, \varkappa_{\eta_-} = k/\varkappa_0 = j)\| \equiv E - \left\|L_{jk}^{(1)}(z,\mu)\right\|.$$

Здесь

$$\eta_+ = \inf\{n > 0 : S_n > 0\}, \quad \eta_- = \inf\{n > 0 : S_n \leq 0\}, \quad \chi_\pm = S_{\eta_\pm}.$$

Везде предполагается, что $\inf \varnothing = \infty$. Пусть h — матричная функция, каждый элемент которой допускает при $\operatorname{Im}\ \mu = 0$ представление

$$h_{j,k}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y} dH_{j,k}(y), \quad \int_{-\infty}^{\infty} |dH_{j,k}(y)| < \infty. \tag{2}$$

Мы будем записывать это в виде

$$h(\mu) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y}\,dH(y),$$

где $H(y) = \|H_{j,k}(y)\|$. Следуя [2], определим операторы

$$(\mathscr{A}_t h)(z,\mu) = \bigl[h(\mu)L_{z-}^{-1}(\mu)\bigr]^{(-\infty,t]}L_{z-}(\mu), \quad (\mathscr{B}_t h)(z,\mu) = \bigl[h(\mu)R_{z+}^{-1}(\mu)\bigr]^{[t,\infty)}R_{z+}(\mu),$$

где используется обозначение

$$\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y}\,dH(y)\right]^{D} = \int\limits_{D} e^{i\mu y}\,dH(y), \quad D \subset R$$

(имеется в виду покомпонентное равенство). Участвующая в определении операторов функция h может также зависеть от z.

Теорема 1. *При* $|z| < 1$, $\operatorname{Im}\mu = 0$

$$G_t^-(z,\mu) = (\mathscr{A}_t G)(z,\mu), \quad G_t^+(z,\mu) = (\mathscr{B}_t G)(z,\mu).$$

Доказательство теоремы. Воспользуемся выражениями для $R_{z+}^{-1}(\mu)$, $L_{z-}^{-1}(\mu)$, известными из [1]:

$$R_{z+}^{-1}(\mu) = E + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left\|\int\limits_{0}^{\infty} e^{i\mu y}\,d\mathbb{P}(\max_{0<m<n} S_m < S_n \le y, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j)\right\| \equiv E + \bigl\|R_{jk}^{(2)}(z,\mu)\bigr\|,$$

$$L_{z-}^{-1}(\mu) = E + \sum_{n=1}^{\infty} z^n \left\|\int\limits_{-\infty}^{0} e^{i\mu y}\,d\mathbb{P}(\min_{0<m<n} S_m \ge S_n, S_n \le y, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j)\right\| \equiv E + \bigl\|L_{jk}^{(2)}(z,\mu)\bigr\|.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(z^{\tau_+(t)}e^{i\mu S_{\tau_+(t)}}; \tau_+(t) < \infty, \varkappa_{\tau_+(t)} = k/\varkappa_0 = j)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int\limits_{t}^{\infty} e^{i\mu y}\Biggl(\mathbb{P}(\tau = n, S_\tau \in dy, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j)\\
&+ \sum_{i_1=1}^{\infty} z^{i_1}\mathbb{P}(\tau = n, \sup_{n\le m<n+i_1} S_m < t, S_{\tau+i_1} \in dy, \varkappa_{n+i_1} = k/\varkappa_0 = j)\Biggr)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int\limits_{t}^{\infty} e^{i\mu y}\mathbb{P}(\tau = n, S_\tau \in dy, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j)\\
&+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i_1=1}^{\infty} z^{n+i_1}\int\limits_{t}^{\infty} e^{i\mu y}\mathbb{P}(\tau = n, \sup_{n\le m<n+i_1} S_m < S_{n+i_1}, S_{n+i_1} \in dy, \varkappa_{n+i_1} = k/\varkappa_0 = j)
\end{aligned}$$

$$
-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i_1=1}^{\infty} z^{n+i_1}\int_t^{\infty} e^{i\mu y}\mathbb{P}(\tau=n, t\le \sup_{n\le m<n+i_1} S_m < S_{n+i_1},
$$
$$
S_{n+i_1}\in dy, \varkappa_{n+i_1}=k/\varkappa_0=j) \equiv T_1+T_2-T_3.
$$

Заметим, что

$$
T_1=\sum_{n=0}^{\infty} z^n\int_t^{\infty} e^{i\mu y}\mathbb{P}(\tau=n, S_\tau\in dy, \varkappa_n=k/\varkappa_0=j)=[G_{jk}(z,\mu)]^{[t,\infty)}.
$$

Кроме того,

$$
T_2=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i_1=1}^{\infty} z^{n+i_1}\int_t^{\infty} e^{i\mu y}\mathbb{P}(\tau=n,
$$
$$
\sup_{n\le m<n+i_1} S_m < S_{n+i_1}, S_{n+i_1}\in dy, \varkappa_{n+i_1}=k/\varkappa_0=j)
$$
$$
=\sum_{l=1}^{m}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i_1=1}^{\infty} z^{n+i_1}\int_t^{\infty} e^{i\mu y}\mathbb{P}(\tau=n, \sup_{n\le m<n+i_1} S_m < S_{n+i_1}, S_{n+i_1}\in dy, \varkappa_n=l,
$$
$$
\varkappa_{n+i_1}=k/\varkappa_0=j)=\left[\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu y}\mathbb{P}(\tau=n, S_\tau\in dy, \varkappa_n=l/\varkappa_0=j)\right)\right.
$$
$$
\left.\times\left(\sum_{i_1=1}^{\infty} z^{i_1}\int_0^{\infty} e^{i\mu y}\mathbb{P}(\sup_{0\le m<i_1} S_m < S_{i_1}, S_{i_1}\in dy, \varkappa_{i_1}=k/\varkappa_0=l)\right)\right]^{[t,\infty)}
$$
$$
=\left[\sum_{l=1}^{m} G_{jl}(z,\mu)R_{lk}^{(2)}(z,\mu)\right]^{[t,\infty)}.
$$

Для анализа T_3 введем на множестве $\{\tau<\infty\}$ случайные величины

$$
\eta_1=\inf\{n>0: S_{\tau+n}>S_\tau\}, \quad \chi_1=S_{\tau+\eta_1}-S_\tau,
$$
$$
\eta_i=\inf\{n>0: S_{\tau+\eta_1+\dots+\eta_{i-1}+n}>S_{\tau+\eta_1+\dots+\eta_{i-1}}\},
$$
$$
\chi_i=S_{\tau+\eta_1+\dots+\eta_i}-S_{\tau+\eta_1+\dots+\eta_{i-1}}, \quad i\ge 2.
$$

Получаем

$$
T_3=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i_1=1}^{\infty} z^{n+i_1}\int_t^{\infty} e^{i\mu y}\mathbb{P}(\tau=n,
$$
$$
t\le \sup_{n\le m<n+i_1} S_m < S_{n+i_1}, S_{n+i_1}\in dy, \varkappa_{n+i_1}=k/\varkappa_0=j)
$$
$$
=\sum_{n=0}^{\infty} z^n\int_t^{\infty} e^{i\mu y}\left[\sum_{i_1=1}^{\infty} z^{i_1}\mathbb{P}(\tau=n, S_\tau\ge t, S_\tau+\chi_1\in dy, \eta_1=i_1, \varkappa_{n+i_1}=k/\varkappa_0=j)\right.
$$
$$
+\sum_{i_1,i_2=1}^{\infty} z^{i_1+i_2}\mathbb{P}(\tau=n, \eta_1=i_1, S_\tau+\chi_1\ge t,
$$

$$\left.\eta_2 = i_2, S_\tau + \chi_1 + \chi_2 \in dy, \varkappa_{n+i_1+i_2} = k/\varkappa_0 = j) + \dots\right]$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_t^\infty e^{i\mu y} \Bigg[\sum_{i_1=1}^{\infty} z^{i_1} \int_t^\infty \mathbb{P}(\tau = n, S_\tau \in du, \varkappa_n = l, S_\tau + \chi_1 \in dy, \eta_1 = i_1,$$

$$\varkappa_{n+i_1} = k/\varkappa_0 = j) + \sum_{i_1, i_2 = 1}^{\infty} z^{i_1+i_2} \int_t^\infty \mathbb{P}(\tau = n, \eta_1 = i_1, S_\tau + \chi_1 \in du, \eta_2 = i_2,$$

$$\left. S_\tau + \chi_1 + \chi_2 \in dy, \varkappa_{n+i_1} = l, \varkappa_{n+i_1+i_2} = k/\varkappa_0 = j) + \dots \right].$$

Используя ранее введенное обозначение

$$R^{(1)}_{lk}(z,\mu) = \sum_{i_1=1}^{\infty} z^{i_1} \int_0^\infty e^{i\mu y} \mathbb{P}(\eta_1 = i_1, \chi_1 \in dy, \varkappa_{i_1} = k/\varkappa_0 = l),$$

получаем

$$T_3 = \sum_{l=1}^{m} \Bigg([G_{jl}(z,\mu)]^{[t,\infty)} + \sum_{s=1}^{m} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i_1=1}^{\infty} z^{n+i_1} \int_t^\infty e^{i\mu y} \mathbb{P}(\tau = n,$$

$$\left. \sup_{n \le m < n+i_1} < S_{n+i_1}, S_{n+i_1} \in dy, \varkappa_n = s, \varkappa_{n+i_1} = l/\varkappa_0 = j) \right) R^{(1)}_{lk}(z,\mu)$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \Bigg([G_{jl}(z,\mu)]^{[t,\infty)} + \sum_{s=1}^{m} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \int_t^\infty e^{i\mu y} \mathbb{P}(\tau = n, S_\tau \in dy, \varkappa_n = s, /\varkappa_0 = j) \right)$$

$$\times \left. \left(\sum_{i_1=1}^{\infty} z^{i_1} \int_0^\infty e^{i\mu y} \mathbb{P}(\sup_{0 \le m < i_1} S_m < S_{i_1}, S_{i_1} \in dy, \varkappa_{i_1} = l/\varkappa_0 = s) \right) R^{(1)}_{lk}(z,\mu) \right)$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \big[G(z,\mu) R^{-1}_{z+}(\mu) \big]^{[t,\infty)}_{jl} R^{(1)}_{lk}(z,\mu).$$

Суммируя найденные выражения, приходим к одному из утверждений теоремы. Другое утверждение доказывается аналогично. Теорема доказана.

3. Факторизационные представления производящих функций

1. Рассмотрим сначала задачу о выходе случайного блуждания (1) из отрезка (или из полосы, если рассматривать траектории на плоскости). Пусть $a > 0$, $b > 0$ — произвольные числа. Введем случайную величину

$$N = N(a,b) = \min\{n \ge 1 : S_n \notin (-a, b)\},$$

равную моменту первого выхода из полосы, и пусть

$$T_{jk}(z, A) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbb{P}(S_N \in A, N = n, \varkappa_n = k/\varkappa_0 = j), \quad A \subset (-\infty, -a] \cup [b, \infty),$$

$$Q_1(z,\mu)=\left\|\int\limits_{-\infty}^{-a+0}e^{i\mu y}T_{jk}(z,dy)\right\|,\quad Q_2(z,\mu)=\left\|\int\limits_{b}^{\infty}e^{i\mu y}T_{jk}(z,dy)\right\|.$$

Обозначим для краткости $\mathscr{A}_{-a}=\mathscr{A}$, $\mathscr{B}_b=\mathscr{B}$.

Теорема 2. *Для* $|z|<1$, $\operatorname{Im}\mu=0$

$$Q_1(z,\mu)=(\mathscr{A}E)(z,\mu)-(\mathscr{A}Q_2)(z,\mu),\quad Q_2(z,\mu)=(\mathscr{B}E)(z,\mu)-(\mathscr{B}Q_1)(z,\mu).$$

Эти соотношения доказаны в [4] методом Винера — Хопфа. Мы покажем, что они легко следуют из теоремы 1. Рассмотрим, к примеру, второе из утверждений теоремы. Слагаемое $(\mathscr{B}E)(z,\mu)$ (двойное преобразование над совместным распределением момента достижения уровня b и положения в этот момент) соответствует всем траекториям, выходящим из нуля и когда-либо впервые достигшим уровня b. Эти траектории делятся на траектории, впервые вышедшие из полосы через верхнюю границу (им соответствует $Q_2(z,\mu)$), и траектории, вышедшие из полосы через нижнюю границу, а затем достигшие уровня b — им соответствует слагаемое $(\mathscr{B}Q_1)(z,\mu)$.

Подставляя одно из полученных соотношений в другое, приходим к тождествам

$$Q_1(z,\mu)=(\mathscr{A}E)(z,\mu)-(\mathscr{A}\mathscr{B}E)(z,\mu)+(\mathscr{A}\mathscr{B}Q_1)(z,\mu),$$
$$Q_2(z,\mu)=(\mathscr{B}E)(z,\mu)-(\mathscr{B}\mathscr{A}E)(z,\mu)+(\mathscr{B}\mathscr{A}Q_2)(z,\mu).$$

Эти соотношения можно использовать как основу рекуррентного процесса, что фактически является реализацией известного принципа «включений — исключений» [6]; они явились основой для получения асимптотических разложений вероятностей в [4].

2. Для произвольных $a>0$, $b>0$ рассмотрим случайные величины $\eta_n^{(1)}$, $\eta_n^{(2)}$, равные соответственно числу пересечений снизу вверх и сверху вниз полосы $-a\le y\le b$ на координатной плоскости точек (x,y) траекторией случайного блуждания $\{(n,S_n)\}_{n=0}^{\infty}$.

С помощью теоремы 1 мы получим здесь факторизационные представления производящих функций вероятностей $\mathbb{P}\big(\eta_n^{(1)}=k/\varkappa_0=s\big)$, $\mathbb{P}\big(\eta_n^{(2)}=k/\varkappa_0=s\big)$. Обозначим

$$Q_i(z,k,s)=\sum_{n=1}^{\infty}z^n\mathbb{P}\big(\eta_n^{(i)}=k/\varkappa_0=s\big),\quad i=1,2.$$

Для рассматриваемого случайного блуждания определим моменты остановки $\tau_0^+=\tau_0^-=0$, $\tau_i^-=\inf\{n\ge\tau_{i-1}^+:S_n\le -a\}$, $\tau_i^+=\inf\{n\ge\tau_i^-:S_n\ge b\}$, $i\ge 1$.

Из теоремы 1 следует, что при $|z|<1$, $\operatorname{Im}\mu=0$

$$\big\|\mathbb{E}\big(z^{\tau_k^+}\exp\{i\mu S_{\tau_k^+}\};\tau_k^+<\infty,\varkappa_{\tau_k^+}=l/\varkappa_0=s\big)\big\|=((\mathscr{B}\mathscr{A})^kE)(z,\mu).\qquad(3)$$

Рассмотрим еще одну последовательность моментов остановки: $\nu_0^+=\nu_0^-=0$, $\nu_i^+=\inf\{n\ge\nu_{i-1}^-:S_n\ge b\}$, $\nu_i^-=\inf\{n\ge\nu_i^+:S_n\le -a\}$, $i\ge 1$. Тогда

$$\big\|\mathbb{E}\big(z^{\nu_k^-}\exp\{i\mu S_{\nu_k^-}\};\nu_k^-<\infty,\varkappa_{\nu_k^-}=l/\varkappa_0=s\big)\big\|=((\mathscr{A}\mathscr{B})^kE)(z,\mu).\qquad(4)$$

Положив $\mu=0$ в (3), (4), получим производящие функции вероятностей $\mathbb{P}\big(\tau_k^+=i,\varkappa_i=l/\varkappa_0=s\big)$, $\mathbb{P}\big(\nu_k^-=i,\varkappa_i=l/\varkappa_0=s\big)$:

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}z^i\mathbb{P}\big(\tau_k^+=i,\varkappa_i=l/\varkappa_0=s\big)\right\|=((\mathscr{B}\mathscr{A})^kE)(z,0),$$

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty} z^i \mathbb{P}(\nu_k^- = i, \varkappa_i = l/\varkappa_0 = s)\right\| = ((\mathscr{A}\mathscr{B})^k E)(z,0).$$

Заметим, что

$$\mathbb{P}\big(\eta_n^{(1)} \ge k, \varkappa_{\tau_k^+} = l/\varkappa_0 = s\big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(\tau_k^+ = i, \varkappa_i = l/\varkappa_0 = s\big),$$

$$\mathbb{P}\big(\eta_n^{(2)} \ge k, \varkappa_{\nu_k^-} = l/\varkappa_0 = s\big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\nu_k^- = i, \varkappa_i = l/\varkappa_0 = s).$$

Получим теперь представление для $Q_1(z,k,s)$. Имеем

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbb{P}\big(\eta_n^{(1)} \ge k, \varkappa_{\tau_k^+} = l/\varkappa_0 = s\big)\right\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\big(\tau_k^+ = i, \varkappa_i = l/\varkappa_0 = s\big)\right\|$$
$$= (1 + z + z^2 + \dots)\left\|\sum_{i=1}^{\infty} z^i \mathbb{P}\big(\tau_k^+ = i, \varkappa_i = l/\varkappa_0 = s\big)\right\| = \frac{1}{1-z}((\mathscr{B}\mathscr{A})^k E)(z,0).$$

Аналогично

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty} z^n \mathbb{P}\big(\eta_n^{(1)} \ge k+1, \varkappa_{\tau_{k+1}^+} = l/\varkappa_0 = s\big)\right\| = \frac{1}{1-z}((\mathscr{B}\mathscr{A})^{k+1} E)(z,0).$$

Отметим, что

$$\mathbb{P}\big(\eta_n^{(1)} = k/\varkappa_0 = s\big) = \sum_{l=1}^{m} \mathbb{P}\big(\eta_n^{(1)} \ge k, \varkappa_{\tau_k^+} = l/\varkappa_0 = s\big)$$
$$- \sum_{l=1}^{m} \mathbb{P}\big(\eta_n^{(1)} \ge k+1, \varkappa_{\tau_{k+1}^+} = l/\varkappa_0 = s\big)$$

и, следовательно,

$$Q_1(z,k,s) = \sum_{l=1}^{m} \left\| \frac{1}{1-z} \{((\mathscr{B}\mathscr{A})^k E)(z,0) - ((\mathscr{B}\mathscr{A})^{k+1} E)(z,0)\} \right\|_{sl}.$$

Аналогичным образом получается представление для $Q_2(z,k,s)$. Тем самым доказана следующая

Теорема 3. *Для любых $k \ge 0$ и $|z| < 1$*

$$Q_1(z,k,s) = \sum_{l=1}^{m} \left\| \frac{1}{1-z} \{((\mathscr{B}\mathscr{A})^k E)(z,0) - ((\mathscr{B}\mathscr{A})^{k+1} E)(z,0)\} \right\|_{sl},$$

$$Q_2(z,k,s) = \sum_{l=1}^{m} \left\| \frac{1}{1-z} \{((\mathscr{A}\mathscr{B})^k E)(z,0) - ((\mathscr{A}\mathscr{B})^{k+1} E)(z,0)\} \right\|_{sl}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пресман Э. Л.* Методы факторизации и граничная задача для сумм случайных величин, заданных на цепи Маркова // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1969. Т. 33, № 4. С. 861–900.
2. *Miller H. D.* A matrix factorization problem in the theory of random variables defined on a finite Markov chain // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1962. V. 58, N 2. P. 268–285.
3. *Арндт К.* Асимптотические свойства распределения супремума случайного блуждания на цепи Маркова // Теория вероятностей и ее применения. 1980. Т. 25, № 2. С. 313–328.
4. *Лотов В. И.* Об асимптотике распределений в двуграничных задачах для случайных блужданий, заданных на цепи Маркова // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1989. Т. 13. С. 116–136.
5. *Лотов В. И.* Об одном подходе в двуграничных задачах // Статистика и управление случайными процессами. М.: Наука, 1989. С. 117–121.
6. *Гнеденко Б. В., Королюк В. С.* О максимальном расхождении двух эмпирических распределений // Докл. АН СССР. 1951. Т. 80, № 4. С. 525–528.

Статья поступила 1 июня 2004 г.

Лотов Владимир Иванович, *Орлова Нина Геннадьевна*
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
lotov@math.nsc.ru