Сибирский математический журнал
Июль—август, 2005. Том 46, № 4

УДК 517.956

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С БОЛЬШИМИ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМИ СЛАГАЕМЫМИ

В. Б. Левенштам

Аннотация: Развивается теория метода усреднения для параболических задач с быстро осциллирующими слагаемыми, среди которых имеются большие, пропорциональные корню квадратному из частоты осцилляций. Соответствующие усредненные задачи в этом случае не совпадают, вообще говоря, с задачами, полученными традиционным способом усреднения, т. е. путем формального усреднения слагаемых исходной задачи (так как главный член асимптотики решения последней задачи не является, вообще говоря, решением полученной таким путем задачи). В данной работе рассмотрен вопрос о периодических по времени решениях первой краевой задачи для полулинейного параболического уравнения произвольного порядка $2k$, нелинейные члены которого, включая большие, зависят от производных неизвестной до порядка $k-1$. Построены усредненная задача и формальная асимптотика решения. В том случае, когда большие слагаемые зависят от неизвестной, но не от ее производных, осуществлены обоснования метода усреднения и полной асимптотики решения.

Ключевые слова: параболические уравнения, асимптотика, метод пограничного слоя, метод усреднения.

§ 0. Введение

В классической теории метода усреднения Н. Н. Боголюбова [1] (см. также [2]) рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений, представимые в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(x, \omega t), \tag{0.1}$$

где вектор-функция $f(x,\tau)$ обладает средним по τ:

$$\langle f(x,\tau)\rangle = \lim_{N\to\infty} N^{-1}\int\limits_0^N f(x,\tau)\,d\tau,$$

ω — большой параметр. В настоящее время основные результаты этой теории перенесены (см., например, [3] и библиографию там) на параболические задачи и абстрактные параболические уравнения вида

$$\frac{dy}{dt} = Ay + g(y, \omega t), \tag{0.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 01–01–00678) и научной программы «Университеты России» (грант УР.04.01.029).

где A — линейный неограниченный оператор (в случае параболической задачи он порожден соответствующим эллиптическим дифференциальным выражением и граничными условиями), а вектор-функция $g(y,\tau)$ в определенном смысле подчинена A и обладает средним по τ. В частности, в [4, 5] построены и обоснованы полные асимптотические разложения (их частичные суммы можно рассматривать как старшие приближения) решений такого вида параболических задач.

Наряду с подробно исследованными широкими классами уравнений (0.1) и (0.2) метод усреднения в той или иной форме применяется для изучения и некоторых других классов обыкновенных дифференциальных и параболических уравнений (другие разделы мы здесь не рассматриваем) и отдельных задач. К ним, в частности, относятся обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x,\omega t) + \omega^{\alpha} f_1(x,\omega t) \tag{0.3}$$

и (абстрактные) параболические задачи вида

$$\frac{dy}{dt} = Ay + g(y,\omega t) + \omega^{\alpha} g_1(y,\omega t), \tag{0.4}$$

где $\alpha > 0$, которые отличаются от (0.1) и (0.2) соответственно наличием высокочастотных слагаемых, пропорциональных некоторым положительным степеням частоты ω и обладающих нулевым средним по τ: $\langle f_1(x,\tau)\rangle = 0$, $\langle g_1(x,\tau)\rangle = 0$. К числу задач с такими большими слагаемыми относятся известные задачи: об устойчивости верхнего положения математического маятника при высокочастотных вибрациях его точки подвеса [6, 7]; о стабилизации прямолинейной формы балки при ее высокочастотных сжатиях-растяжениях [8]; о влиянии высокочастотных вибраций на возникновение конвекции [9]; о движении материальной точки под действием вибрационных сил и связей; о движении идеальной жидкости в высокочастотных вибрационных полях [10–13]. Выявленные важные физические эффекты в этих задачах связаны именно с наличием в них больших высокочастотных слагаемых. Это является одним из стимулов построения систематической теории усреднения для широких классов уравнений с большими высокочастотными членами.

Интерес к развитию теории усреднения для уравнений вида (0.3), (0.4) возник у автора под влиянием лекций В. И. Юдовича (1991 г.) по методу усреднения. В этих лекциях, в частности, отмечалось, что теория усреднения для уравнений (0.3) и (0.4) представляет интерес в случае показателей степени $\alpha \geq 1/2$, поскольку при $\alpha < 1/2$ усредненные уравнения для (0.3), (0.4) те же, что и для (0.1), (0.2), и поэтому такая ситуация малоинтересна с точки зрения приложений, а ее математическое исследование не представляет труда. Показатель $\alpha = 1/2$ назван В. И. Юдовичем [12] *первым перестроечным показателем.* В настоящей работе рассматривается параболическая задача (2.1), (2.2) вида (0.4) с показателем $\alpha = 1/2$.

Следует отметить естественность того факта, что теория усреднения для уравнений (0.4) при $\alpha = 1/2$ строится при существенно более жестких требованиях к нелинейным слагаемым уравнений, нежели теория усреднения для уравнений (0.2). Поскольку настоящая работа посвящена вопросам теории метода усреднения для полулинейной параболической задачи (2.1), (2.2) типа (0.4), пояснения дадим на примере таких задач. В этом случае указанное ужесточение требований состоит в снижении максимального порядка производных неизвестной, входящих в нелинейную часть уравнения. Так, в работе [4], посвященной построению полной асимптотики полулинейной параболической задачи порядка $2k$ типа (0.2), предполагается, что ее нелинейная часть может зависеть от производных решения по пространственным переменным до порядка $2k-1$ включительно. В данной же работе, где рассматривается параболическая задача (2.1), (2.2) порядка $2k$ типа (0.4), удается рассмотреть лишь нелинейности, зависящие от производных до порядка $k-1$ включительно. Связано это с тем, что в [4] главный погранслойный член асимптотики решения (по норме C) имеет порядок $O(\omega^{-1})$, а в данной работе — $O(\omega^{-1/2})$, $\omega \to \infty$. Производные же порядка k в последнем случае имеют асимптотический порядок $O(1)$. Поэтому в случае зависимости нелинейной части полулинейной параболической задачи типа (0.4) от производных порядка выше $k-1$ обычные рассуждения приводят к, вообще говоря, нелинейной и неразрешимой задаче для главного погранслойного члена асимптотики.

В § 2 для задачи (2.1), (2.2) построены усредненная задача и полная формальная асимптотика периодического по времени решения. Однако обосновать принцип усреднения и асимптотику для всего класса таких задач не удается (мешает зависимость большого слагаемого $\sqrt{\omega}\varphi$ от производных решения). В § 1 осуществлены обоснования метода усреднения и полной асимптотики периодического решения, построенной в § 2, для более узкого, нежели (2.1), (2.2), класса задач. Именно, для задач (1.1), (1.2), в которых большое слагаемое может зависеть лишь от неизвестной, но не от ее производных. Последнее требование, по-видимому, уже не является необходимым, а диктуется лишь известными здесь методами обоснования асимптотик. Отметим, кстати, что в случае финитных по x функций $f_s(x, e)$ и $\varphi_s(x, e)$ удается обосновать полную асимптотику решения задачи (2.1), (2.2).

Заметим в заключение, что члены рассматриваемых в работе уравнений представлены конечными суммами гармоник (относительно временной переменной) с кратными частотами $s\omega$, $s \in \mathbb{Z}$, и мы исследуем периодические по времени решения. Однако, заменив в этих уравнениях $s\omega$ выражениями $\lambda_s\omega$, где λ_s — произвольные действительные числа, точно так же можно рассмотреть задачу о почти периодических по времени решениях.

Автор выражает благодарность В. И. Юдовичу за внимание к работе и полезное обсуждение.

§ 1. Построение полной асимптотики и ее обоснование для одного класса полулинейных параболических задач

1°. Пусть k, m и n — натуральные числа и Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$ с C^∞-гладкой границей $\partial\Omega$. Рассмотрим зависящую от большого параметра ω задачу о вещественных $2\pi\omega^{-1}$-периодических по времени t решениях полулинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|\alpha|\le 2k} a_\alpha(x) D^\alpha u - \sum_{0\le|s|\le m} f_s(x, \delta^{k-1}u)\exp(is\omega t)$$
$$- \sqrt{\omega} \sum_{0<|s|\le m} \varphi_s(x, u)\exp(is\omega t) = 0, \quad (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^1 \equiv Q, \quad (1.1)$$

с граничными условиями Дирихле

$$u|_\Gamma = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \dots = \left.\frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}}\right|_\Gamma = 0. \tag{1.2}$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс длины $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$, $D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\Gamma = \partial\Omega \times \mathbb{R}^1$, ν — вектор внутренней нормали к $\partial\Omega$, $\delta^{k-1}u$ — вектор-функция, составленная из функции $u(x,t)$ и ее всевозможных производных по x до порядка $k-1$ включительно. Обозначим количество компонент такой вектор-функции через p. Предположим, что вещественнозначные функции $a_\alpha(x)$ имеют производные любого порядка, непрерывные в замыкании $\overline{\Omega}$ области Ω, и для уравнения (1.1) выполнено условие параболичности, т. е. при всех векторах $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и $x \in \overline{\Omega}$ справедливо неравенство

$$(-1)^{k+1} \sum_{|\alpha|=2k} a_\alpha(x) \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n} \geq 0.$$

Будем также предполагать, что комплекснозначные функции $f_s(x,e)$, где $e = (e_0, e_1, \dots, e_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$, и $\varphi_s(x, e_0)$ определены и непрерывны на множествах[1)] $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^p$ и $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^1$ соответственно и имеют там непрерывные производные по всем своим аргументам сколь угодно высокого порядка. Будем считать, что значения $f_s(x,e)$ и $f_{-s}(x,e)$, а также $\varphi_s(x,e_0)$ и $\varphi_{-s}(x,e_0)$ комплексно сопряжены. Наряду с возмущенной задачей (1.1), (1.2) рассмотрим следующую задачу, которую будем называть усредненной:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{|\alpha| \leq 2k} a_\alpha(x) D^\alpha v - f_0(x, \delta^{k-1} v) \\ - \sum_{0<|s|\leq m} i s^{-1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial v}(x,v) \varphi_{-s}(x,v) = 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{1.3}$$

$$v|_\Gamma = \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_\Gamma = \dots = \left.\frac{\partial^{k-1} v}{\partial \nu^{k-1}}\right|_\Gamma = 0. \tag{1.4}$$

Предположим, что эта задача имеет невырожденное стационарное решение $u_0(x)$. Невырожденность u_0 означает, что задача

$$Lv \equiv \sum_{|\alpha| \leq 2k} a_\alpha(x) D^\alpha v + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\partial f_0[x, \delta^{k-1} u_0(x)]}{\partial e_j} (\delta^{k-1} v)_j \\ + \sum_{0<|s|\leq m} i s^{-1} \frac{\partial^2 \varphi_s}{\partial u^2}[x, u_0(x)] \varphi_{-s}[x, u_0(x)] v = 0, \quad x \in \Omega, \tag{1.5}$$

$$v|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega} = \dots = \left.\frac{\partial^{k-1} v}{\partial \nu^{k-1}}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

имеет только нулевое решение. Здесь $(\delta^{k-1}v)_j$ — j-я компонента вектор-функции $\delta^{k-1}v$.

[1)] Можно считать, что f_s определены лишь на множестве $\overline{\Omega} \times U_p$, а φ_s — на $\overline{\Omega} \times U_0$, где U_p и U_0 — шары в $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^1$, содержащие строго внутри себя множества $\{\delta^{k-1}u_0(x),\ x \in \overline{\Omega}\}$ и $\{u_0(x),\ x \in \overline{\Omega}\}$ соответственно, $u_0(x)$ — решение усредненной задачи (1.3), (1.4).

Позже (см. пп. 1, 2 теоремы) будет установлено существование единственного в некоторой окрестности u_0 $2\pi\omega^{-1}$-периодического по времени t решения u_ω задачи (1.1), (1.2). В следующем пункте мы построим асимптотику такого решения.

2°. Поскольку асимптотическое разложение u_ω будем строить методом пограничного слоя [14], предварительно введем в некоторой пограничной полоске области Ω местные криволинейные координаты.

Пусть $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$ — криволинейные ортогональные координаты на поверхности $\partial\Omega$. Для любой точки $x \in \Omega$, лежащей в столь малой окрестности границы $\partial\Omega$, что нормали к $\partial\Omega$ в ней не пересекаются, обозначим через $r(x)$ расстояние от x до $\partial\Omega$, отсчитываемое вдоль нормали. Для таких x определим затем ортогональные криволинейные координаты $(\varphi, r) \equiv (\varphi(x), r(x))$, где $\varphi(x)$ — точка поверхности $\partial\Omega$, лежащая на одной нормали с x. Для достаточно малого числа $r_0 > 0$ положим $\Omega_0 = \{x \in \Omega : r(x) < r_0\}$. Для краткости погранслойные члены асимптотического разложения решения $u_\omega(x,t)$ будем рассматривать лишь при $x \in \Omega_0$. Напомним, что согласно методу пограничного слоя [14], построив эти члены в погранполоске Ω_0, нужно затем их продолжить нулем на множество $\Omega \setminus \Omega_0$, а после этого умножить на гладкую в $\overline{\Omega}$ срезающую функцию $\mu(x)$ такую, что $\mu(x) = 1$ при $r(x) < r_0/2$ и $\mu(x) = 0$ при $x \in \Omega \setminus \Omega_0$. Отметим еще, что применение метода пограничного слоя в задаче (1.1), (1.2) потребует перехода в ней к криволинейным координатам (φ, ρ), $\rho = r\omega^{1/2k}$. При этом будет использоваться представление

$$\sum_{|\alpha| \le 2k} a_\alpha(x) D^\alpha u = \omega \left[b(\varphi) \frac{\partial^{2k} u}{\partial \rho^{2k}} + \sum_{j=1}^{N} \omega^{-\frac{j}{2k}} M_j(\varphi, \rho) u + \omega^{-\frac{N+1}{2k}} M_{N+1}(\varphi, \rho, r) u \right]. \tag{1.6}$$

Здесь $b \in C^\infty(\partial\Omega)$, $(-1)^{k+1} b > 0$, N — произвольное натуральное число, M_j, $1 \le j \le N$, — дифференциальные выражения относительно φ, ρ, коэффициенты которых — полиномы по ρ с бесконечно дифференцируемыми по φ коэффициентами, M_{N+1} — дифференциальное выражение относительно φ, ρ с бесконечно дифференцируемыми по φ, r коэффициентами.

Асимптотическое разложение решения u_ω будем строить в виде

$$\begin{aligned} u_\omega(x,t) = u_0(x) &+ \omega^{-1/2}[u_k(x) + v_k(x,\tau) + z_k(\varphi,\rho,\tau)] \\ &+ \sum_{j=k+1}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2k}} [u_j(x) + z_j(\varphi,\rho,\tau)] + \sum_{j=2k}^{\infty} \omega^{-\frac{j}{2k}} [v_j(x,\tau) + w_j(\varphi,\rho)], \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $\rho = \omega^{1/(2k)} r$, $\tau = \omega t$. Здесь $u_i(x)$, $v_i(x,\tau)$ — так называемые регулярные, а $z_i(\varphi,\rho,\tau)$, $w_i(\varphi,\rho)$ — погранслойные функции[2)], так что $\lim\limits_{\rho\to\infty} z_i(\varphi,\rho,\tau) = 0$, $\lim\limits_{\rho\to\infty} w_i(\varphi,\rho) = 0$. При этом функции $v_i(x,\tau)$ и $z_i(\varphi,\rho,\tau)$ являются 2π-периодическими по τ с нулевым средним:

$$\langle v_i(x,\tau) \rangle = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} v_i(x,\tau)\, d\tau = 0, \quad \langle z_i(\varphi,\rho,\tau) \rangle = 0.$$

[2)] Допуская вольность, в качестве пространственных аргументов погранслойных функций мы пишем (φ, ρ) вместо x, подчеркивая тем самым, что эти функции интересуют нас при $x \in \Omega_0$, так как при $x \in \Omega \setminus \Omega_0$ они равны нулю.

Для нахождения коэффициентов ряда (1.7) подставим его вместо u в равенства (1.1), (1.2), формально разложим функции f_s и φ_s в ряды Тейлора с центрами $(x, \delta^{k-1}u_0)$ и (x, u_0) соответственно и, учитывая (1.6), сгруппируем и приравняем в полученных равенствах коэффициенты при одинаковых степенях ω отдельно для регулярных и погранслойных функций. Полученные уравнения разобьем затем на уравнения для стационарных и осциллирующих по τ (с нулевым средним) коэффициентов (эту процедуру можно интерпретировать как следствие условия разрешимости полученных уравнений). В результате придем к рекуррентной последовательности задач, из которой, как будет показано ниже, однозначно определены коэффициенты разложения (1.7).

Для коэффициента $v_k(x,\tau)$ ряда (1.7) указанным путем получаем задачу

$$\frac{\partial v_k}{\partial \tau} = \sum_{0<|s|\le m} \varphi_s[x, u_0(x)] \exp(is\tau), \quad \langle v_k(x,\tau)\rangle = 0,$$

в которую x входит в качестве параметра. Отсюда находим

$$v_k(x,\tau) = -\sum_{0<|s|\le m} is^{-1}\varphi_s[x, u_0(x)] \exp(is\tau). \tag{1.8}$$

Для коэффициента u_0 получаем задачу (1.3), (1.4), которая разрешима согласно предположению п. 1°.

Коэффициент v_{2k} удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_{2k}}{\partial \tau} = &\sum_{0<|s|\le m} f_s(x, \delta^{k-1}u_0) \exp(is\tau) \\ &- \sum_{\substack{0<|s_1|,|s_2|\le m\\ s_1+s_2\neq 0}} is_2^{-1}\frac{\partial \varphi_{s_1}[x,u_0(x)]}{\partial u}\varphi_{s_2}[x,u_0(x)]\exp[i(s_1+s_2)\tau] \\ &+ \sum_{0<|s|\le m}\frac{\partial\varphi_s}{\partial u}[x,u_0(x)]u_k(x)\exp(is\tau), \quad \langle v_{2k}\rangle = 0.\end{aligned}$$

Отсюда

$$v_{2k}(x,\tau) = \sum_{0<|\ell|\le 2m}\gamma_\ell(x)\exp(i\ell\tau) + \sum_{0<|s|\le m} is^{-1}\frac{\partial\varphi_s}{\partial u}[x,u_0(x)]\exp(is\tau)u_k, \tag{1.9}$$

где $\gamma_\ell(x)$ — известные функции.

Коэффициент $u_k(x)$ является решением задачи

$$Lu_k = \psi_k(x), \quad u_k|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial u_k}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega} = 0, \dots, \left.\frac{\partial^{k-1}u_k}{\partial\nu^{k-1}}\right|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.10}$$

где ψ_k — известная функция. Определив из (1.10) u_k и подставив в (1.9), найдем v_{2k}.

Коэффициент $z_k(\varphi, p, \tau)$ разложения (1.7) согласно представлению (1.6) является решением задачи

$$\frac{\partial z_k}{\partial\tau} = b(\varphi)\frac{\partial^{2k} z_k}{\partial\rho^{2k}}, \quad z_k|_{\rho=0} = -v_k|_{r=0}, \quad \left.\frac{\partial z_k}{\partial\rho}\right|_{\rho=0} = 0, \dots, \left.\frac{\partial^{k-1}z_k}{\partial\rho^{k-1}}\right|_{\rho=0} = 0. \tag{1.11}$$

В силу представления (1.8) решение задачи (1.11) имеет вид

$$z_k(\varphi,\rho,\tau)=\sum_{0<|s|\le m} c_s(\varphi,\rho)\exp(is\tau), \tag{1.12}$$

где коэффициенты c_s являются, в свою очередь, решениями задач

$$\begin{gathered} isc_s - b(\varphi)\frac{\partial^{2k}c_s}{\partial\rho^{2k}}=0,\\ c_s|_{\rho=0}=is^{-1}\varphi_s[x,u_0(x)]|_{r=0}\equiv a_s(\varphi),\quad \frac{\partial c_s}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=0}=0,\dots,\frac{\partial^{k-1}c_s}{\partial\rho^{k-1}}\bigg|_{\rho=0}=0,\\ c_s|_{\rho=\infty}=0,\quad s=\pm1,\pm2,\dots,\pm m. \end{gathered} \tag{1.13}$$

Обозначив через $\lambda_{js}(\varphi)$, $j=1,2,\dots,k$, корни уравнения $b(\varphi)\lambda^{2k}=is$, удовлетворяющие условию $\operatorname{Re}\lambda_{js}<0$, однозначно найдем решение задачи (1.13) в виде

$$c_s=\sum_{j=1}^{k} d_{js}(\varphi)\exp(\lambda_{js}\rho). \tag{1.14}$$

Из соотношений (1.12), (1.14) находим решение задачи (1.11).

Коэффициент w_{2k} разложения (1.7) является решением задачи

$$b(\varphi)\frac{\partial^{2k}w_{2k}}{\partial\rho^{2k}}=\left\langle\frac{\partial\varphi_s}{\partial u}[x,u_0(x)]|_{r=0}z_k\right\rangle\equiv\sum_{\substack{0<|s|\le m\\1\le j\le k}} e_{js}(\varphi)\exp(\lambda_{js}\rho),\quad w_{2k}|_{\rho=\infty}=0.$$

Отсюда

$$w_{2k}(\varphi,\rho)=\sum_{\substack{0<|s|\le m\\1\le j\le k}} f_{js}(\varphi)\exp(\lambda_{js}\rho),\quad f_{js}(\varphi)=\frac{e_{js}(\varphi)}{b(\varphi)\lambda_{js}^{2k}(\varphi)}.$$

Нетрудно показать, что описанным выше способом можно найти любые коэффициенты разложения (1.7). В данном параграфе мы останавливаться на этом не будем, так как в § 2 установим указанный факт для более широкого класса задач.

Введем функцию

$$\begin{aligned} \overset{N}{u}_\omega(x,t)&=u_0(x)+\omega^{-1/2}[u_k(x)+v_k(x,\omega t)+z_k(\varphi,\rho,\omega t)]\\ &+\sum_{j=k+1}^{N}\omega^{-\frac{j}{2k}}[u_j(x)+z_j(\varphi,\rho,\omega t)]+\sum_{j=2k}^{N}\omega^{-\frac{j}{2k}}[v_j(x,\omega t)+w_j(\varphi,\rho)], \end{aligned} \tag{1.15}$$

где для простоты записи считаем $N\ge 2k$. Если же $N<2k$, то представление (1.15) понимается естественным образом: при $N<k$ — как $\overset{N}{u}_\omega(x,t)=u_0(x)$, а при $k\le N<2k$ в (1.15) следует зачеркнуть последнее слагаемое: $\sum\limits_{j=2k}^{N}\dots$.

Сформулируем теорему об оценке разности $2\pi\omega^{-1}$-периодического по t решения задачи (1.1), (1.2) и приближения $\overset{N}{u}$ по норме гёльдерова пространства $C^{\ell,\ell/2k}(Q)\equiv C^{\ell,\ell/2k}$, $\ell\ge 0$. Напомним [15, с. 81], что пространство $C^{\ell,\ell/2k}(Q)$ состоит из функций $u(x,t)$, $(x,t)\in Q$, удовлетворяющих условию

$$\|u\|_{C^{\ell,\ell/2k}}=\sum_{j=0}^{[\ell]}\sum_{2k\mu+|\nu|=j}\sup_{(x,t)\in Q}\left|\frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu}D^\nu u(x,t)\right|$$

$$+\,\delta_\ell\biggl(\frac{1}{|x-y|^{\ell-[\ell]}}\sum_{2k\mu+|\nu|=[\ell]}\sup_{\substack{(x,t),(y,t)\in Q\\ x\neq y}}\left|\frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu}D^\nu u(x,t)-\frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu}D^\nu u(y,t)\right|$$

$$+\sum_{0<\ell-2k\mu-|\nu|<2k}\sup_{\substack{(x,t),(x,\tau)\in Q\\ t\neq\tau}}\left|\frac{\partial^\mu}{\partial t^\mu}D^\nu u(x,t)-\frac{\partial^\mu}{\partial \tau^\mu}D^\nu u(x,\tau)\right||t-\tau|^{-\frac{\ell-2k\mu-|\nu|}{2k}}\biggr)<\infty,$$

где $[\ell]$ — целая часть ℓ, $\delta_\ell=0$ при целом ℓ и $\delta_\ell=1$ при ℓ нецелом.

Аналогично определяется банахово пространство $C^{\ell_1,\ell_2}(Q)\equiv C^{\ell_1,\ell_2}_{x,t}(Q)$, $\ell_1\geq 0$, $\ell_2\geq 0$.

Через $C_\mu(R,E)$, где E — банахово пространство, $\mu\in(0,1]$, обозначим банахово пространство вектор-функций u: $R\to E$, удовлетворяющих условию

$$\|u\|_{C_\mu(R,E)}=\sup_{t\in\mathbb{R}}\|u(t)\|_E+\sup_{-\infty<t_1<t_2<\infty}\|u(t_2)-u(t_1)\|/(t_2-t_1)^\mu<\infty.$$

Будем использовать также аналогичное пространство $C_\mu([T_1,T_2],E)$, $-\infty<T_1<T_2<\infty$, и пространство непрерывных и ограниченных вектор-функций $C(R,E)$.

Теорема. *Существует такое число $\omega_0>0$, что при $\omega>\omega_0$ справедливы следующие утверждения.*

1. *Существует бесконечно дифференцируемое $2\pi\omega^{-1}$-периодическое по времени t решение $u_\omega(x,t)$ задачи* (1.1), (1.2), *удовлетворяющее неравенству*

$$\|u_\omega-u_0\|_{C^{\ell,\ell/2k}}\leq C(0,\ell)\omega^{-\frac12+\frac{\ell}{2k}},\quad C(0,\ell)=\mathrm{const}.$$

2. *Решение u_ω единственно в шаре $\|u-u_0\|_{C^{k-1},0}\leq r_0$ при некотором $r_0>0$.*

3. *Старшие приближения $\overset{N}{u}$* (1.15) *при всех $\ell\geq0$ удовлетворяют оценкам*

$$\|u_\omega-\overset{N}{u}\|_{C^{\ell,\ell/2k}}\leq C(0,\ell)\omega^{-\frac12+\frac{\ell}{2k}},\quad N<k;$$

$$\|u_\omega-\overset{N}{u}\|_{C^{\ell,\ell/2k}}\leq C(N,\ell)\omega^{-\frac{N+1-\ell}{2k}},\quad N\geq k,$$

где $C(N,\ell)=\mathrm{const}$. *Построение приближения $\overset{N}{u}$ сводится к решению N линейных однозначно разрешимых эллиптических задач Дирихле в области Ω с единым дифференциальным выражением L порядка $2k$* (см. (1.5)) *и бесконечно дифференцируемыми правыми частями и краевыми условиями.*

Доказательство теоремы изложено в следующих двух пунктах.

3°. В задаче (1.1), (1.2) сделаем замену переменных

$$u=w+y_\omega,\tag{1.16}$$

где

$$\begin{aligned}y_\omega=u_0+\omega^{-1/2}&[u_k(x)+v_k(x,\omega t)+z_k(\varphi,\rho,\omega t)]\\&+\sum_{j=k+1}^{M+2k+1}\omega^{-\frac{j}{2k}}u_j(x)+\sum_{j=k+1}^{2k-1}\omega^{-\frac{j}{2k}}z_j(\varphi,\rho,\omega t)\\&+\sum_{j=2k}^{M+3k}\omega^{-\frac{j}{2k}}[v_j(x,\omega t)+z_j(\varphi,\rho,\omega t)+w_j(\varphi,\rho)]\end{aligned}$$

$$+\left(1-\delta_k^1\right)\sum_{j=M+2k+2}^{M+3k}\omega^{-\frac{j}{2k}}\hat{u}_j(x)\equiv u_0+\hat{y}_\omega.$$

Здесь u_j, v_j, z_j, w_j те же, что и в п. 2° (см. (1.7), (1.15)), а функции $\hat{u}_j$ найдены из тех же дифференциальных уравнений, что и соответствующие коэффициенты u_j ряда (1.7), но удовлетворяют таким краевым условиям, при которых для функции y_ω выполнены условия (1.2). В результате замены получим задачу

$$\frac{\partial w}{\partial t}-Lw=\Phi_\omega(x,t,w)+\beta_\omega(x,t)+\sqrt{\omega}\sum_{0<|s|\le m}\frac{\partial\varphi_s}{\partial u}(x,u_0)\exp(is\omega t)w, \tag{1.17}$$

$$w|_\Gamma=\left.\frac{\partial w}{\partial\nu}\right|_\Gamma=\dots=\left.\frac{\partial^{k-1}w}{\partial\nu^{k-1}}\right|_\Gamma=0. \tag{1.18}$$

Здесь

$$\beta_\omega(x,t)=-P_\omega(y_\omega), \tag{1.19}$$

где $P_\omega(u)$ — левая часть равенства (1.1), $\Phi_\omega=\Phi_{\omega,1}+\Phi_{\omega,2}$, где

$$\Phi_{\omega,1}(x,t,w)=\sum_{0<|s|\le m}\sum_{j=0}^{p-1}\left\{\int_0^1\frac{\partial f_s}{\partial e_j}[x,\delta^{k-1}(y_\omega+\theta w)]\,d\theta-\frac{\partial f_s}{\partial e_j}(x,\delta^{k-1}u_0)\right\}$$
$$\times(\delta^{k-1}w)_j\exp(is\omega t)+\sum_{j=0}^{p-1}\left\{\int_0^1\frac{\partial f_0}{\partial e_j}[x,\delta^{k-1}(y_\omega+\theta w)]d\theta-\frac{\partial f_0}{\partial e_j}(x,\delta^{k-1}u_0)\right\}(\delta^{k-1}w)_j$$
$$+\sum_{0<|s|\le m}\left[\frac{\partial^2\varphi_s}{\partial u^2}(x,u_0+\theta_1\hat{y}_\omega)-\frac{\partial^2\varphi_s}{\partial u^2}(x,u_0)\right]u_k\exp(is\omega t)w$$
$$+\sum_{0<|s|\le m}\frac{\partial^2\varphi_s}{\partial u^2}(x,u_0+\theta_1\hat{y}_\omega)\left[\sum_{j=k+1}^{M+2k+1}\omega^{-\frac{j-k}{2k}}u_j+\sum_{j=2k}^{M+3k}\omega^{-\frac{j-k}{2k}}(v_j+z_j+w_j)\right.$$
$$\left.\sum_{j=k+1}^{2k-1}\omega^{-\frac{j-k}{2k}}z_j+\sum_{j=2k+2}^{M+3k}\omega^{-\frac{j-k}{2k}}\hat{u}_j+z_k\right]\exp(is\omega t)w$$
$$-\sum_{\substack{0<|s_1|,|s_2|\le m\\ s_1+s_2\ne0}}is_2^{-1}\left[\frac{\partial^2\varphi_{s_1}}{\partial u^2}(x,u_0+\theta_1\hat{y}_\omega)-\frac{\partial^2\varphi_{s_1}}{\partial u^2}(x,u_0)\right]\varphi_{s_2}(x,u_0)\exp[i(s_1+s_2)\omega t]w$$
$$+\sqrt{\omega}\sum_{0<|s|\le m}\int_0^1(1-\theta)\frac{\partial^2\varphi_s}{\partial u^2}(x,y_\omega+\theta w)\,d\theta\,w^2, \tag{1.20}$$

$0\le\theta_1\le1$,

$$\Phi_{\omega,2}=\sum_{0<|s|\le m}\sum_{j=0}^{p-1}\frac{\partial f_s}{\partial e_j}(x,\delta^{k-1}u_0)(\delta^{k-1}w)_j\exp(is\omega t)$$
$$+\sum_{\substack{0<|s_1|,|s_2|\le m\\ s_1+s_2\ne0}}is_2^{-1}\frac{\partial^2\varphi_{s_1}}{\partial u^2}(x,u_0)\varphi_{s_2}(x,u_0)\exp[i(s_1+s_2)\omega t]w$$
$$+\sum_{0<|s|\le m}\frac{\partial^2\varphi_s(x,u_0)}{\partial u^2}u_k\exp(is\omega t)w. \tag{1.21}$$

В задаче (1.17), (1.18) произведем замену переменных

$$w = v\chi_\omega(x,t), \tag{1.22}$$

где

$$\chi_\omega(x,t) = \exp\biggl\{\omega^{-1/2} \sum_{0<|s|\le m} (is)^{-1} \frac{\partial\varphi_s}{\partial u}(x,u_0)\exp(is\omega t)\biggr\}.$$

Придем к задаче

$$\frac{\partial v}{\partial t} - Lv = F_\omega(x,t,v) + b_\omega(x,t), \tag{1.23}$$

$$v|_\Gamma = \frac{\partial v}{\partial \nu}\Big|_\Gamma = \dots = \frac{\partial^{k-1} v}{\partial \nu^{k-1}}\Big|_\Gamma = 0. \tag{1.24}$$

Здесь

$$F_\omega(x,t,v) = \bigl\{\Phi_{\omega,1}(x,t,v\chi_\omega)\chi_\omega^{-1} + [L(v\chi_\omega)\chi_\omega^{-1} - Lv]\bigr\} \\ + \Phi_{\omega,2}(x,t,v\chi_\omega)\chi_\omega^{-1} \equiv F_{\omega,1}(x,t,v) + F_{\omega,2}(x,t,v), \tag{1.25}$$

$$b_\omega(x,t) = \beta_\omega(x,t)\chi_\omega^{-1}. \tag{1.26}$$

Обозначим через A линейный оператор в банаховом пространстве $B = L_r(\Omega)$, $r > 1$, с областью определения $D(A) = \{v \in W_r^{2k}(\Omega) : v$ удовлетворяет условиям (1.18)$\}$, действующий по правилу $Av = Lv$. Как известно, спектр $\sigma(A)$ оператора A дискретен, и существуют такие числа c_0, λ_0 (см., например, ссылку в [16, с. 349]), для которых при любом λ с $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$ справедливо неравенство

$$\|(A - \lambda_0 I)^{-1}\| \le c_0(1 + |\lambda|)^{-1}.$$

В силу этого неравенства оператор A порождает в B аналитическую полугруппу $\exp(tA)$ (см., например, [17]). Это позволяет трактовать задачу (1.23), (1.24) как абстрактное параболическое уравнение в банаховом пространстве B. Пусть $t_0 > 0$ — число такое, что при всех $\lambda \in \sigma(A)$ справедливо соотношение $\exp(\lambda t_0) \ne 1$, и пусть $T_\omega = 2\pi\omega^{-1}[t_0(2\pi)^{-1}\omega]$, где $[a]$ — целая часть числа a. Тогда при больших ω будет $\exp(\lambda T_\omega) \ne 1$, $\lambda \in \sigma(A)$, а отсюда, как известно, следует, что задача о T_ω-периодических по времени t решениях системы (1.23), (1.24) при указанных ω эквивалентна интегральному уравнению

$$v(t) = \int_0^t \exp[(t-\tau)A]\{F_\omega[\,\cdot\,,\tau,v(\tau)] + b_\omega(\,\cdot\,,\tau)\}d\tau + [I - \exp(T_\omega L)]^{-1} \\ \times \int_0^{t_\omega} \exp[(T_\omega + t - \tau)A]\{F_\omega[\,\cdot\,,\tau,v(\tau)] + b(\,\cdot\,,\tau)\}\,d\tau \equiv [M_\omega(v)](t), \tag{1.27}$$

$v \in C([0,t_0], C^{2k-1}(\overline{\Omega}))$[3]. Обозначим через B^α, $\alpha \ge 0$, банахово пространство, состоящее из функций $v \in D((-A_1)^\alpha)$, где $(-A_1)^\alpha$ — дробная степень оператора $-A_1 = -A + \lambda_0 I$, с нормой $\|v\|_{B^\alpha} = \|(-A_1)^\alpha v\|_B$. Как известно [17, 3], для $q > n$ найдется такое $\beta \in (0,1)$, при котором справедливо непрерывное вложение

$$B^\beta \subset \overset{\circ}{C}{}^{2k-1}(\overline{\Omega}), \tag{1.28}$$

где $\overset{\circ}{C}{}^{2k-1}(\overline{\Omega})$ — подпространство пространства $C^{2k-1}(\overline{\Omega})$, состоящее из функций $v \in C^{2k-1}(\overline{\Omega})$, удовлетворяющих условию (1.18).

[3] Говоря об эквивалентности, мы здесь имеем в виду соответствующую связь между T_ω-периодическими решениями задачи (1.23), (1.24) и T_ω-периодическими по t продолжениями решений задачи (1.28) на всю ось $t \in \mathbb{R}$.

Лемма 1. *Пусть* $\mu \in (0, 1-\beta)$. *Тогда существуют такие числа* r *и* ω_0, *что при* $\omega > \omega_0$ *оператор* M_ω, *действующий в пространстве* $C_\mu([0,t_0], \overset{\circ}{C}{}^{2k-1}(\overline{\Omega}))$ *по формуле, представленной правой частью равенства* (1.27), *является в шаре* $S_{\omega,r}$: $\|v\|_{C_\mu([0,t_0],\overset{\circ}{C}{}^{2k-1}(\overline{\Omega}))} \le r\omega^{-\frac{M+1+k}{2k}}$ *оператором сжатия.*

Доказательство. Мы не приводим здесь полного доказательства леммы, а отмечаем лишь его основные моменты. Прежде всего выпишем два известных неравенства [17, 3]:

$$\|(-A_1)^\gamma \exp(tA)\|_{\mathrm{Hom}(B,B)} \le c_1 t^{-\gamma}, \quad t \in (0, \tau_0], \tag{1.29}$$

$$\|(-A_1)^\gamma [\exp(t_2 A) - \exp(t_1 A)]\|_{\mathrm{Hom}(B,B)} \le c_2 (t_2 - t_1)^\eta t_1^{-\gamma-\eta}, \tag{1.30}$$

$0 < t_1 < t_2 \le \tau_0$. Здесь $\gamma \ge 0$, $\eta \in (0,1]$, $\tau_0 > 0$; $c_1 = c_1(\gamma, \tau_0)$, $c_2 = c_2(\gamma, \eta, \tau_0)$ — постоянные; $\mathrm{Hom}(B,B)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих в B, с обычной операторной нормой. На основании соотношений (1.28)–(1.30) устанавливается, что оператор M_ω при достаточно больших ω действует в пространстве $C_\mu([0,t_0], \overset{\circ}{C}{}^{2k-1}(\overline{\Omega}))$. Отметим теперь два простых свойства функции $\chi_\omega(x,t)$, которые вплоть до конца этого параграфа будут существенно использоваться:

$$\left\|D^\alpha \chi_\omega^{\pm 1}\right\|_{C(R, C(\overline{\Omega}))} = O(\omega^{-1/2}), \quad \omega \to \infty,$$

если $|\alpha| \ne 0$;

$$\left\|\chi_\omega^{\pm 1}(x,t_2) - \chi_\omega^{\pm 1}(x,t_1)\right\|_{C(\overline{\Omega})} \le c_5 |t_2 - t_1|^{1/2}$$

при любых значениях $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $c_5 = \mathrm{const}$. Из равенств (1.19), (1.26) и (1.25) и результатов п. 2° вытекают соотношения

$$\|b_\omega\|_{C([0,t_0],B)} \le c_3 \omega^{-\frac{M+1+k}{2k}}, \ c_3 = \mathrm{const}, \quad F_\omega(x,t,0) = 0,$$

где $B = L_q(\Omega)$, $q > n$. Отсюда в силу соотношений (1.28)–(1.30) следует оценка

$$\|M_\omega(0)\|_{C_\mu([0,t_0],\overset{\circ}{C}{}^{2k-1}(\overline{\Omega}))} \le c_4 \omega^{-\frac{M+1+k}{2k}}. \tag{1.31}$$

Из соотношений (1.20), (1.21), (1.25) получаем, что для каждой пары положительных чисел r_1, ω_1 найдется величина $c(r_1, \omega_1)$, для которой при $\omega > \omega_1$ и $\||v_1| + |v_2|\|_{C([0,t_0],C^{2k-1}(\overline{\Omega}))} \le r_1 \omega^{-1/2}$ справедлива оценка

$$\|F_{\omega,1}(x,t,v_2) - F_{\omega,1}(x,t,v_1)\|_{C([0,t_0],B)} \le c(r_1,\omega_1) \|v_2 - v_1\|_{C([0,t_0],C^{2k-1}(\overline{\Omega}))}, \tag{1.32}$$

при этом

$$\lim_{\substack{r_1 \to 0,\\ \omega_1 \to \infty}} c(r_1, \omega_1) = 0. \tag{1.33}$$

Обозначим через $M_{\omega,1}(v)$ выражение, полученное из $M_\omega(v)$ заменой в (1.27) F_ω на $F_{\omega,1}(v)$, и положим $M_{\omega,2} = M_\omega - M_{\omega,1}$. Рассмотрим шар $S_{\omega,r}$ при $r = 2c_4$, где c_4 то же, что в (1.31). Из соотношений (1.32), (1.33) и (1.28)–(1.30) вытекает существование такого $\omega_2 > 0$, что при $\omega > \omega_2$ для всех функций $v_1, v_2 \in S_{\omega,r}$ справедлива оценка

$$\|M_{\omega,1}(v_2) - M_{\omega,1}(v_1)\|_{C_\mu([0,t_0],C^{2k-1}(\overline{\Omega}))} < \frac{1}{4} \|v_2 - v_1\|_{C([0,t_0],C^{2k-1}(\overline{\Omega}))}. \tag{1.34}$$

Следуя методике [3, § 1], можно установить существование такого $\omega_3 > 0$, что при $\omega > \omega_3$ для функций $v_1, v_2 \in S_{\omega,r}$ выполняется оценка

$$\|M_{\omega,2}(v_2) - M_{\omega,2}(v_1)\|_{C_\mu([0,t_0],C^{2k-1}(\overline{\Omega}))} < \frac{1}{4}\|v_2 - v_1\|_{C_\mu([0,t_0],C^{2k-1}(\overline{\Omega}))}. \tag{1.35}$$

Из соотношений (1.32) и (1.34), (1.35) вытекает заключение леммы.

4°. Докажем теперь утверждение 1 теоремы. В п. 3° в задаче (1.1), (1.2), мы сделали замену переменных (1.16): $u = w + y_\omega$, где функция $y_\omega \equiv \overset{M}{y}_\omega$ зависит от числа M. В частности,

$$\begin{aligned}\overset{0}{y}_\omega = u_0 + \omega^{-1/2}[v_k(x,\omega t) + z_k(\varphi,\rho,\omega t)]\\ + \sum_{j=k}^{2k+1}\omega^{-\frac{j}{2k}}u_j(x) + \sum_{j=k+1}^{2k-1}\omega^{-\frac{j}{2k}}z_j(\varphi,\rho,\omega t)\\ + \sum_{j=2k}^{3k}\omega^{-\frac{j}{2k}}[v_j(x,\omega t) + z_j(\varphi,\rho,\omega t) + w_j(\varphi,\rho)] + \left(1-\delta_k^1\right)\sum_{j=2k+2}^{3k}\omega^{-\frac{j}{2k}}\hat{u}_j(x).\end{aligned} \tag{1.36}$$

На основании леммы 1 при $M = 0$ с замечанием 2, а также проведенных замен переменных (1.16), (1.22) справедливо следующее утверждение. Существуют такие числа c_0 и ω_0, что при $\omega > \omega_0$ задача (1.1), (1.2) имеет в шаре

$$\|u - \overset{0}{y}_\omega\|_{C_\mu(R,\overset{\circ}{C}{}^{2k-1}(\overline{\Omega}))} \le c_0\omega^{-\frac{k+1}{2k}} \tag{1.37}$$

единственное T_ω-периодическое по t решение $u_\omega(x,t)$. Так как вместе с $u_\omega(x,t)$ T_ω-периодическим решением задачи (1.1), (1.2) будет и функция $u_\omega(x,t+2\pi\omega^{-1})$, которая также лежит в шаре (1.37), то $u_\omega(x,t) = u_\omega(x,t+2\pi\omega^{-1})$, а значит, $u_\omega(x,t)$ — $2\pi\omega^{-1}$-периодическое по t решение.

Бесконечная дифференцируемость решения u_ω вытекает из доказанного выше соотношения $u_\omega \in C_\mu(R, C^{2k-1}(\overline{\Omega}))$ и известных априорных оценок [15] решений линейных начально-краевых задач.

Первое утверждение теоремы доказано.

На доказательстве утверждения 2 теоремы об относительной единственности решения u_ω останавливаться здесь не будем. Отметим лишь, что соответствующий результат получен в более общей ситуации, а именно для абстрактных параболических уравнений, с помощью замены переменных типа замены Крылова — Боголюбова. Из проведенных же в данной работе исследований нетрудно заключить, что существование и единственность решения u_ω при достаточно больших ω имеет место в шаре вида (1.37) с заменой $\overset{0}{y}_\omega$ на

$$a_\omega = u_0 + \omega^{-1/2}(u_k + v_k + z_k) + \omega^{-\frac{k+1}{2k}}u_{k+1} + \sum_{j=k+1}^{2k-1}\omega^{-\frac{j}{2k}}z_j + \sum_{j=2k}^{3k}\omega^{-\frac{j}{2k}}(w_j + z_j).$$

Докажем утверждение 3. Оно в силу структуры приближений $\overset{N}{u}$ (см. (1.15)) вытекает из следующего утверждения.

Лемма 2. *Для любых неотрицательных чисел ℓ и d найдется такой номер M_0, что при $M > M_0$ справедливы оценки*

$$\|u_\omega - \overset{M}{y}_\omega\|_{C^{\ell,\ell/2k}} \le C(M)\omega^{-d}, \quad C(M) = \mathrm{const}.$$

Доказательство леммы 2. Положим $r_M = (u_\omega - \overset{M}{y}_\omega)\lambda(t)$, где $\lambda(t)$ — бесконечно дифференцируемая на числовой оси $t \in \mathbb{R}$ финитная функция с носителем, лежащим в интервале $t \in (0;3)$, и такая, что $\lambda(t) = 1$ при $t \in [1,2]$. Учитывая структуру функции $y_\omega \equiv \overset{M}{y}_\omega$ и тот факт, что функция $u_\omega - \overset{M}{y}_\omega$ имеет малый период — $2\pi\omega^{-1}$, легко видеть, что лемма 2 будет доказана, если ее установить с заменой $u_\omega - y_\omega$ на r_M. Из леммы 1 следует существование таких чисел $\gamma \in (0,1)$ и $c_0 > 0$, что для $\omega > \omega_0$ и всех мультииндексов α, у которых $|\alpha| \le 2k-1$, выполняются неравенства

$$\|D^\alpha(u_\omega - y_\omega)\|_{C^{\gamma,\gamma/(2k)}}, \|D^\alpha r_M\|_{C^{\gamma,\gamma/(2k)}} \le c_0\omega^{-\frac{M+1+k}{2k}}. \tag{1.38}$$

Рассмотрим цилиндр $Q_0 = \Omega \times [0,3]$ с боковой поверхностью $\Gamma_0 = \partial\Omega \times [0,3]$. Из соотношений (1.17), (1.18) следует, что функция r_M, рассматриваемая в цилиндре Q_0, является решением задачи:

$$\begin{aligned}\frac{\partial r_M}{\partial t} - Lr_M = \Phi_\omega(x,t,u_\omega - y_\omega)\lambda(t) + \beta_\omega(x,t)\lambda(t)\\ + \sqrt{\omega}\sum_{0<|s|\le m}\frac{\partial\varphi_s}{\partial u}(x,u_0)\exp(is\omega t)r_M - (u_\omega - y_\omega)\lambda'(t) \equiv \Psi_M(x,t,\omega),\end{aligned} \tag{1.39}$$

$$r_M(x,0) = 0, \quad r_M|_{\Gamma_0} = \frac{\partial r_M}{\partial\nu}\bigg|_{\Gamma_0} = \dots = \frac{\partial^{k-1}r_M}{\partial\nu^{k-1}}\bigg|_{\Gamma_0} = 0. \tag{1.40}$$

Из оценок (1.35) вытекает неравенство

$$\|\Psi_M\|_{C^{\gamma,\gamma/(2k)}} \le d_0\omega^{-\frac{M+1}{2k}}, \quad d_0 = \mathrm{const}\,. \tag{1.41}$$

Из определения функции r_M следует, что для задачи (1.39), (1.40) выполнены условия согласования краевых и начальных данных сколь угодно высокого порядка [15]. В силу известных априорных оценок [15] и неравенства (1.41) имеет место оценка

$$\|r_M\|_{C^{2k+\gamma,1+\gamma/(2k)}} \le d_1\omega^{-\frac{M+1}{2k}}, \quad d_1 = \mathrm{const}\,.$$

С учетом последней вновь оцениваем правую часть Ψ_M равенства (1.36) и выписываем априорную оценку r_M и т. д., т. е. используем так называемый «метод шнуровки». За конечное (зависящее от ℓ) число шагов, очевидно, получим оценку вида $\|r_M\|_{C^{\ell/\ell/2k}} \le c_1(\ell)\omega^{-\frac{M+1}{2k}+c_2(\ell)}$, где $c_1(\ell)$, $c_2(\ell) = \mathrm{const}$. Из нее вытекает лемма 2, а значит, и утверждение 2 теоремы. Теорема доказана.

§ 2. Формальная асимптотика для более широкого класса задач

В этом параграфе числа k, m и n, а также область Ω те же, что и в § 1. Мы рассматриваем задачу о вещественных $2\pi\omega^{-1}$-периодических решениях полулинейных параболических уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{|\alpha|\le 2k} a_\alpha(x)D^\alpha u - \sum_{0\le|s|\le m} f_s(x,\delta^{k-1}u)\exp(is\omega t)\\ - \sqrt{\omega}\sum_{0<|s|\le m}\varphi_s(x,\delta^{k-1}u)\exp(is\omega t) = 0, \quad (x,t) \in Q,\end{aligned} \tag{2.1}$$

с граничными условиями Дирихле

$$u|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_\Gamma = \dots = \frac{\partial^{k-1} u}{\partial \nu^{k-1}}\bigg|_\Gamma = 0. \tag{2.2}$$

Здесь функции a_α и $f_s(x,e)$, а также граница Γ цилиндра Q и символ δ^{k-1} те же, что и в § 1, а функции $\varphi_s(x,e)$ определены и непрерывны на множестве $\Omega \times R^p$ и имеют там непрерывные производные по всем своим аргументам сколь угодно высокого порядка. Значения $\varphi_s(x,e)$ и $\varphi_{-s}(x,e)$ считаем комплексно сопряженными. Предположим, что усредненная задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{|\alpha|\le 2k} a_\alpha(x) D^\alpha v - f_0(x, \delta^{k-1} v)$$
$$- \sum_{0<s\le m} i s^{-1} \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial e_j}(x, \delta^{k-1} v)(\delta^{k-1}\varphi_{-s}(x, \delta^{k-1} v))_j = 0, \quad (x,t)\in Q, \tag{2.3}$$

$$v|_\Gamma = \frac{\partial v}{\partial \nu}\bigg|_\Gamma = \dots = \frac{\partial^{k-1} v}{\partial \nu^{k-1}}\bigg|_\Gamma = 0 \tag{2.4}$$

имеет стационарное решение $u_0(x)$. Это решение предполагается невырожденным, т. е. задача

$$Lv \equiv \sum_{|\alpha|\le 2k} a_\alpha(x) D^\alpha v + \sum_{j=0}^{p-1} \frac{\partial f_0[x, \delta^{k-1} u_0(x)]}{\partial e_j}(\delta^{k-1} v)_j$$
$$+ \sum_{0\le s\le m} i s^{-1} \sum_{j_1,j_2=0}^{p-1} \frac{\partial \varphi_s[x, \delta^{k-1} u_0(x)]}{\partial e_{j_1}} \left(\delta^{k-1} \frac{\partial \varphi_{-s}}{\partial e_{j_2}}[x, \delta^{k-1} u_0(x)](\delta^{k-1} v)_{j_2}\right)_{j_1}$$
$$+ \sum_{0\le s\le m} i s^{-1} \sum_{j_1,j_2=0}^{p-1} \frac{\partial^2 \varphi_s[x, \delta^{k-1} u_0(x)]}{\partial e_{j_1} \partial e_{j_2}} (\delta^{k-1}\varphi_{-s}[x, u_0(x)])_{j_1} (\delta^{k-1} v)_{j_2} = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.5}$$

$$v|_{\partial\Omega} = \frac{\partial v}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = \dots = \frac{\partial^{k-1} v}{\partial \nu^{k-1}}\bigg|_{\partial\Omega} = 0$$

имеет только нулевое решение. Заметим, что среднее слагаемое в правой части (2.5) в том случае, когда φ_s зависят лишь от x, u, т. е. в условиях § 1, обращается в нуль.

Формальную асимптотику решения задачи (2.1), (2.3) строим методом пограничного слоя, следуя § 1 и используя введенные там обозначения. При этом в данном параграфе асимптотическое разложение решения u_ω имеет вид

$$u_\omega(x,t) = u_0(x) + \sum_{j=2} \omega^{-\frac{j}{2k}} u_j(x) + \omega^{-1/2}\big[\delta_k^1 u_k(x) + v_k(x,\tau) + z_k(\varphi,\rho,\tau)\big]$$
$$+ \sum_{j=k+2} \omega^{-\frac{j}{2k}} v_j(x,\tau) + \sum_{j=k+1} \omega^{-\frac{j}{2k}} [w_j(\varphi,\rho) + z_j(\varphi,\rho,\tau)], \quad \tau = \omega t. \tag{2.6}$$

Покажем, что, действуя указанным в § 1 способом, мы сможем найти любые коэффициенты (2.6).

Для коэффициента v_k получаем задачу

$$\frac{\partial v_k}{\partial \tau} = \sum_{0<|s|\le m} \varphi_s[x, \delta^{k-1} u_0(x)] \exp(is\tau), \quad \langle v_k(x,\tau)\rangle = 0,$$

в которую x и $\delta^{k-1}u_0(x)$ входят в качестве параметров, а потому

$$v_k(x,\tau) = -\sum_{0<|s|\le m} is^{-1}\varphi_s[x,\delta^{k-1}u_0(x)]\exp(is\tau). \tag{2.7}$$

Для коэффициента $u_0(x)$ возникает задача (2.1), (2.2) — единственная нелинейная задача в процессе нахождения коэффициентов ряда (2.6). Она по условию разрешима, и мы уже записали в (2.6) ее невырожденное решение $u_0(x)$. Функция z_k является решением следующей параболической задачи в полупространстве $(\rho,t)\in[0,\infty)\times R$:

$$\frac{\partial z_k}{\partial\tau} = b(\varphi)\frac{\partial^{2k}z_k}{\partial\rho^{2k}}, \tag{2.8}$$

$$z_k|_{\rho=0} = -v_k|_{r=0}, \quad \left.\frac{\partial z_k}{\partial\rho}\right|_{\rho=0} = 0,\dots,\left.\frac{\partial^{k-1}z_k}{\partial\rho^{k-1}}\right|_{\rho=0} = 0, \quad z_k|_{\rho=\infty} = 0. \tag{2.9}$$

В силу (2.7)

$$z_k(\varphi,\rho,\tau) = \sum_{0<|s|\le m} d_s(\varphi,\rho)\exp(is\tau),$$

где коэффициенты c_s удовлетворяют соотношениям

$$isc_s - b(\varphi)\frac{\partial^{2k}c_s}{\partial\rho^{2k}} = 0, \tag{2.10}$$

$$c_s|_{\rho=0} = -\varphi_s[x,\delta^{k-1}u_0(x)]|_{r=0} \equiv d_s(\varphi), \quad \left.\frac{\partial c_s}{\partial\rho}\right|_{\rho=0} = 0,\dots,\left.\frac{\partial^{k-1}c_s}{\partial\rho^{k-1}}\right|_{\rho=0} = 0,$$

$$c_s|_{\rho=\infty} = 0, \quad s = \pm1,\pm2,\dots,\pm m.$$

Обозначив через $\lambda_{js}(\varphi)$ те же, что и в § 1, корни характеристического уравнения, соответствующего уравнению (2.10), найдем решение задачи (2.8), (2.9) в виде

$$z_k(\rho,\varphi,\tau) = \sum_{0<|s|\le m}\sum_{j=1}^{k} c_{js}(\varphi)\exp(\lambda_{js}\rho)\exp(is\tau).$$

Коэффициент w_{k+1} разложения (2.8) удовлетворяет соотношениям

$$b(\varphi)\frac{\partial^{2k}w_{k+1}}{\partial\rho^{2k}} = \sum_{\substack{0<|s|\le m\\ 1\le j\le k}} g_{js}(\varphi)\exp(\lambda_{js}\rho), \quad w_{k+1}|_{\rho=\infty} = 0.$$

Отсюда легко находим его в виде

$$w_{k+1}(\varphi,\rho) = \sum_{\substack{0<|s|\le m\\ 1\le j\le k}} h_{js}(\varphi)\exp(\lambda_{js}\rho).$$

Предположим теперь, что нам известны коэффициенты $u_i(x)$, $v_{i+k}(x,\tau)$, $z_{i+k}(\varphi,\rho,\tau)$, $w_{i+k+1}(\varphi,\rho)$ разложения (2.6) при $i<i_0$, $i_0\ge1$. При этом будем считать, что функции $v_j(x,\tau)$ и $z_j(\varphi,\rho,\tau)$ являются тригонометрическими многочленами относительно τ, причем коэффициенты таких многочленов, представляющих z_j, как и функции w_j, в свою очередь, суть квазимногочлены относительно ρ (с коэффициентами, зависящими от φ), показатели экспонент в

которых имеют отрицательные вещественные части. Покажем, что тогда однозначно определены и коэффициенты u_{i_0}, v_{i_0+k}, z_{i_0+k}, w_{i_0+k+1}, имеющие аналогичную структуру. Функция $v_{i_0+k}(x,\tau)$ удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial v_{i_0+k}}{\partial\tau}=\Phi_{i_0+k}(x,\tau)\ +\sum_{0<|s|\le m}\sum_{j=0}^{p-1}\frac{\partial\varphi_s}{\partial e_j}[x,\delta^{k-1}u_0(x)](\delta^{k-1}u_{i_0}))_j\exp(is\tau),$$

$$\langle v_{i_0+k}\rangle=0,$$

где $\Phi_{i_0+k}(x,\tau)$ — известная функция, являющаяся конечной суммой гармоник по τ с зависящими от x амплитудами. Считая здесь x и u_{i_0} параметрами, найдем выражения v_{i_0+k}. Коэффициент u_{i_0} является решением задачи

$$Lu_{i_0}=\psi_{i_0},$$

$$u_{i_0}|_{\partial\Omega}=-w_{i_0}|_{r=0},\quad \left.\frac{\partial u_{i_0}}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega}=-\left.\frac{\partial w_{i_0+1}}{\partial r}\right|_{r=0},\dots,$$

$$\left.\frac{\partial^{k-1}u_{i_0}}{\partial\nu^{k-1}}\right|_{\partial\Omega}=-\left.\frac{\partial^{k-1}w_{i_0+k-1}}{\partial r^{k-1}}\right|_{r=0},$$

где ψ_{i_0} — известная функция. Определив отсюда u_{i_0}, найдем после этого и v_{i_0+k}. Коэффициент z_{i_0+k} удовлетворяет соотношениям

$$\frac{\partial z_{i_0+k}}{\partial\tau}=b(\varphi)\frac{\partial^{2k}z_{i_0+k}}{\partial\rho^{2k}}+\chi_{i_0+k}(\varphi,\rho,\tau),$$

$$z_{i_0+k}|_{\rho=0}=-v_{i_0+k}|_{\partial\Omega},\quad \left.\frac{\partial z_{i_0+k}}{\partial\rho}\right|_{\rho=0}=-\left.\frac{\partial v_{i_0+k-1}}{\partial\nu}\right|_{\partial\Omega},\dots,$$

$$\left.\frac{\partial^{k-1}z_{i_0+k}}{\partial\rho^{k-1}}\right|_{\rho=0}=-\left.\frac{\partial^{k-1}v_{i_0+1}}{\partial\nu^{k-1}}\right|_{\partial\Omega},\quad z_{i_0+k}|_{\rho=\infty}=0.$$

Здесь $\chi_{i_0+k}(\varphi,\rho,\tau)$ — известная функция, зависящая, в частности, от z_{i+k}, w_{i+k}, $i<i_k$, и представленная конечной суммой гармоник по τ, амплитуды которых являются, в свою очередь, конечными суммами экспонент относительно ρ с отрицательными вещественными частями показателей, а коэффициенты при экспонентах зависят от φ. Задача для определения функции w_{i_0+k+1} имеет вид

$$b(\varphi)\frac{\partial^{2k}w_{i_0+k+1}}{\partial\rho^{2k}}=\Lambda(\varphi,\rho),\quad w_{i_0+k+1}|_{\rho=\infty}=0,$$

где $\Lambda(\varphi,\rho)$ — известная (так как коэффициент z_{i_0+k} найден) функция, являющаяся конечной суммой экспонент относительно ρ с отрицательными вещественными частями показателей и зависящими от φ коэффициентами. Так что w_{i_0+k+1} однозначно определена и имеет требуемую структуру.

Построение формальной асимптотики (2.6) завершено.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике. Киев: Изд-во АН УССР, 1945.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974.
3. *Симоненко И. Б.* Метод усреднения в теории нелинейных уравнений параболического типа с приложением к задачам гидродинамической устойчивости. Ростов н/Д: Изд-во Ростовск. ун-та, 1989.

4. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое интегрирование квазилинейных параболических уравнений с быстро осциллирующими по времени коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 2002. № 5. С. 36–43.

5. *Левенштам В. Б.* Старшие приближения метода усреднения для параболических начально-краевых задач с быстро осциллирующими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39, № 10. С. 1395–1403.

6. *Боголюбов Н. Н.* Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. ин-та строит. механики АН УССР. 1950. № 4. С. 9–34.

7. *Капица П. Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // Прикл. математика и механика. 1995. Т. 59, № 6. С. 922–929.

8. *Челомей В. Н.* О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций // Докл. АН СССР. 1956. Т. 110, № 3. С. 345–347.

9. *Зеньковская С. М., Симоненко И. Б.* О влиянии вибрации высокой частоты на возникновение конвекции // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1966. № 5. С. 51–55.

10. *Юдович В. И.* Вибродинамика систем со связями // Докл. РАН. 1997. Т. 354, № 5. С. 622–624.

11. *Юдович В. И.* Динамика материальной частицы на вибрирующей гладкой поверхности // Прикл. математика и механика. 1998. Т. 62, № 6. С. 968–976.

12. *Юдович В. И.* Вибродинамика и виброгеометрия систем со связями. I / Ростовский гос. ун-т. Деп. в ВИНИТИ 17.07.2003. № 1407-В2003.

13. *Юдович В. И.* Вибродинамика и виброгеометрия систем со связями. II / Ростовский гос. ун-т. Деп. в ВИНИТИ 17.07.2003. № 1408-В2003.

14. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.

15. *Солонников В. А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1965. Т. 83. С. 3–162.

16. *Соболевский П. Е.* Об уравнениях параболического типа в банаховых пространствах // Тр. Моск. об-ва. 1961. Т. 10. С. 207–350.

17. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.

Статья поступила 29 апреля 2004 г., окончательный вариант — 27 октября 2004 г.

Левенштам Валерий Борисович
Ростовский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Зорге, 5, Ростов-на-Дону 344090
vleven@math.rsu.ru