Сибирский математический журнал
Июль—август, 2005. Том 46, № 4

УДК 512.554

n–ЛИЕВЫ СТРУКТУРЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ВРОНСКИАНАМИ

А. С. Джумадильдаев

Аннотация: Изучены $(k+1)$-лиевы, k-левокоммутативные и гомотопические $(k+1)$-лиевы структуры относительно умножения, порожденного вронскианами. Доказано, что вронскианы порождают нетривиальные структуры n-лиевых алгебр только в случаях малых характеристик.

Ключевые слова: n-лиева алгебра, гомотопическая алгебра, модулярные алгебры Ли, вронскиан, якобиан.

Пусть U — ассоциативная коммутативная алгебра с перестановочными дифференцированиями $\partial_1,\dots,\partial_n$. Следующий определитель на U называется *якобианом*:

$$\mathrm{Jac}_n(u_1,\dots,u_n)=\begin{vmatrix}\partial_1u_1 & \cdots & \partial_1u_n\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \partial_nu_1 & \cdots & \partial_nu_n\end{vmatrix}.$$

В [1, 2] доказано, что (U,Jac_n) как n-арная алгебра является n-лиевой, т. е. якобиан удовлетворяет правилу Лейбница

$$\mathrm{Jac}_n(u_1,\dots,u_{n-1},\mathrm{Jac}_n(u_n,\dots,u_{2n-1}))\\ =\sum_{i=n}^{2n-1}(-1)^{i+n}\,\mathrm{Jac}_n(\mathrm{Jac}_n(u_1,\dots,u_{n-1},u_i),u_n,\dots,\hat{u}_i,\dots,u_{2n-1}),$$

где $\hat{u}_i$ означает, что элемент u_i опущен.

Существует не менее замечательный определитель — вронскиан. Он определен на некоторой ассоциативной коммутативной алгебре U с дифференцированием ∂ по правилу

$$V^{0,1,\dots,k}(u_0,\dots,u_k)=\begin{vmatrix}u_0 & u_1 & \cdots & u_k\\ \partial u_0 & \partial u_1 & \cdots & \partial u_k\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \partial^k u_0 & \partial^k u_1 & \cdots & \partial^k u_k\end{vmatrix}.$$

Цель работы — изучить алгебру U как n-арную алгебру относительно умножения, порожденного вронскианом.

Пусть A и M — векторные пространства и $T^k(A,M)=\mathrm{Hom}(A^{\otimes k},M)$ — пространство полилинейных отображений $A\times\cdots\times A\to M$ с k аргументами. Положим $T^0(A,M)=M$ и $T^k(A,M)=0$, если $k<0$. Положим $T^*(A,M)=\bigoplus_k T^k(A,M)$.

Пусть $\wedge^k A$ — k-я внешняя степень A и $C^k(A,M)=\mathrm{Hom}(\wedge^k A,M)$ — подпространство $T^k(A,M)$. Положим $C^0(A,M)=M$ и $C^k(A,M)=0$, если $k<0$, и $C^*(A,M)=\bigoplus\limits_k C^k(A,M)$.

Пусть A — алгебра с сигнатурой Ω [3]. Это означает, что Ω есть множество полилинейных отображений $A\times\dots\times A\to A$. Элемент $\omega\in\Omega$ назовем *n-арным умножением*, если $\omega\in T^n(A,A)$. Положим $|\omega|=n$, если $\omega\in T^n(A,A)$. Если необходимо обратить внимание на сигнатуру, то вместо A будем писать (A,Ω). Если Ω состоит из одного элемента ω, то положим $A=(A,\omega)$.

Пусть (A,ω) — n-арная алгебра с векторным пространством A над полем K характеристики $p\geq 0$ и ω — полилинейное отображение с n аргументами $A\times\dots\times A\to A$. Напомним, что линейное отображение $D:A\to A$ называется *дифференцированием* A, если

$$D(\omega(a_1,\dots,a_n))=\sum_{i=1}^n\omega(a_1,\dots,a_{i-1},D(a_i),a_{i+1},\dots,a_n)$$

для любых $a_1,\dots,a_n\in A$. Пусть $L_{a_1\dots a_{n-1}}:A\to A$ — линейное отображение, определенное по правилу

$$L_{a_1,\dots,a_{n-1}}a=\omega(a_1,\dots,a_{n-1},a).$$

Пусть $\mathrm{Der}\,A$ — алгебра всех дифференцирований алгебры (A,ω). Алгебра (A,ω) называется *n-лиевой* [1], если ω кососимметрична и

$$L_{a_1,\dots,a_{n-1}}\in\mathrm{Der}\,A$$

для любых $a_1,\dots,a_{n-1}\in A$. Иногда n-лиевы алгебры называются *алгебрами Намбу — Тахтаджяна*, хотя такие алгебры впервые были определены В. Т. Филипповым.

Пусть Sym_k — группа перестановок и $\mathrm{sign}\,\sigma$ — четность перестановки $\sigma\in\mathrm{Sym}_k$. Обозначим через $\mathrm{Sym}_{k,l}$ подмножество (k,l)-тасующих перестановок, т. е. перестановок $\sigma\in\mathrm{Sym}_{k+l}$ таких, что $\sigma(1)<\dots<\sigma(k),\sigma(k+1)<\dots<\sigma(k+l)$. Обычно под множеством, на котором действуют перестановки из Sym_k, понимают стандартное множество $\{1,\dots,k\}$, но мы будем использовать некоторые нестандартные множества порядка k (типа $\{2,3,\dots,k+1\}$ в определении Q_l, секция 2). Какого типа множество мы используем, будет понятно из контекста.

Алгебра (A,ω) с n-арным умножением ω называется *$(n-1)$-левокоммутативной*, если

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}_{2n-2}}\mathrm{sign}\,\sigma\omega(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(n-1)},\omega(a_{\sigma(n)},\dots,a_{\sigma(2n-2)},a_{2n-1}))=0$$

для любых $a_1,\dots,a_{2n-2},a_{2n-1}\in A$.

Алгебру (A,ω) называем *гомотопически n-лиевой* [4], если $\omega\in C^n(A,A)$ и

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}_{n-1,n}}\mathrm{sign}\,\sigma\omega(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(n-1)},\omega(a_{\sigma(n)},\dots,a_{\sigma(2n-2)},a_{\sigma(2n-1)}))=0$$

для любых $a_1,\dots,a_{2n-2},a_{2n-1}\in A$. В [5] такие алгебры называются *n-алгебрами Ли*.

Алгебра (A,Ω) называется *гомотопической* алгеброй Ли [4], если Ω состоит из элементов $\omega_1,\omega_2,\dots$ таких, что $\omega_k\in C^k(A,A)$ и

$$\sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}_{i-1,j}}\mathrm{sign}\,\sigma\omega_i(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(i-1)},\omega_j(a_{\sigma(i)},\dots,a_{\sigma(i+j-1)}))=0$$

для любых $a_1, \dots, a_{i+j-1} \in A$ и $i, j = 1, 2, \dots$.

В разд. 2 мы доказываем, что любая n-лиева алгебра является $(n-1)$-левокоммутативной и любая $(n-1)$-левокоммутативная алгебра будет гомотопической n-лиевой. Примеры вронскиановых алгебр показывают, что утверждение, обратное этому, неверно.

1. Формулировка основного результата

Пусть U — ассоциативная коммутативная алгебра с дифференцированием ∂. Пусть $V^{i_1,\dots,i_k} = \partial^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial^{i_k}$ является *обобщенным вронскианом,* т. е.

$$V^{i_1,\dots,i_k}(u_1,\dots,u_k) = \begin{vmatrix} \partial^{i_1} u_1 & \cdots & \partial^{i_1} u_k \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial^{i_k} u_1 & \cdots & \partial^{i_k} u_k \end{vmatrix}.$$

Например, $V^{0,1,2,\dots,k}$ — это стандартный вронскиан.

Теорема 1.1. *Пусть U — некоторая ассоциативная коммутативная алгебра над полем K характеристики $p \geq 0$ с дифференцированием ∂. Тогда*

(i) *Для любого $k > 0$ алгебра $(U, V^{0,1,\dots,k})$ гомотопическая $(k+1)$-лиева. Более того, $(U, \{0, \lambda_{i+1} V^{0,1,\dots,i}, i = 1, 2, \dots\})$ — гомотопическая алгебра Ли для любого $\lambda_i \in K, \lambda_1 = 0$.*

(ii) *Алгебра $(U, V^{0,1,\dots,k})$, $k > 0$, является k-левокоммутативной, если и только если $k \neq 2$.*

(iii) *Алгебра $(U, V^{0,1,\dots,k})$ является $(k+1)$-лиевой, если и только если выполняется одно из следующих условий:*

$k = 1$ и p — любое простое число или 0;

$k = 2$ и $p = 2$;

$k = 3$ и $p = 3$;

$k = 4$ и $p = 2$.

По теореме 1.1 вронскианы как n-лиевые умножения для $n > 2$ возникают только в случаях малых характеристик $p = 2, 3$. В [1] установлен следующий результат: если A — n-лиевая алгебра с умножением ω, то A является $(n-1)$-лиевой с умножением $i(a)\omega$ для любого $a \in A$. Здесь под $i(a)\omega$ понимается $(n-1)$-умножение, определяемое по правилу

$$i(a)\omega(a_1,\dots,a_{n-1}) = \omega(a, a_1, \dots, a_{n-1}).$$

Используя эту конструкцию из $(k+1)$-лиевых алгебр $V^{0,1,\dots,k}$, можно получить другие n-лиевы алгебры с $n \leq k$.

Теорема 1.2. *Пусть $n \geq 2$ и $p = \operatorname{char} K \geq 0$. Следующие обобщенные вронскианы являются n-лиевыми умножениями:*

$n = 2$

$p = 2, \quad V^{2^r - 2^l, 2^r}, \ 0 \leq l \leq r;$

$p = 2, \quad \sum_{i=1}^{2^l} V^{i, 2^l + 1 - i}, \ 0 < l;$

$p = 3, \quad V^{2\cdot 3^r, 3^{r+1}}, \ 0 \leq r;$

$n = 3$

$p = 2, \quad V^{1,2,4};$

$p = 2, \quad V^{2,3,4};$

$p=2,\quad \sum\limits_{i=1}^{2^l} V^{0,i,2^l+1-i},\ 0<l;$

$p=3,\quad V^{1,2,3};$

$n=4$

$p=2,\quad V^{1,2,3,4};$

$p=3,\quad V^{0,1,2,3};$

$n=5$

$p=2,\quad V^{0,1,2,3,4}.$

Над полем характеристики 0 вронскиан $V^{0,1,\dots,k}$ может служить как n-лиево умножение только в случае алгебры Ли, $n=2$, $k=1$.

Заметим, что всякая 3-лиева алгебра над полем характеристики 3 образует тройную систему Ли. Имеется стандартный способ сопоставить тройной системе Ли алгебру Ли [6]. Поэтому всякой 3-лиевой алгебре характеристики 3 можно сопоставить алгебру Ли. Простые алгебры Ли, соответствующие нашим 3-лиевым алгебрам в характеристике 3, будут исключительными простыми алгебрами Кузнецова и Ермолаева [7]. Серии простых n-лиевых алгебр для любой характеристики p построены в [8]. Наши n-лиевы алгебры, порожденные вронскианами, являются исключительными в том смысле, что их нельзя определить для характеристик $p>3$.

Вычисления базируются на двух идеях. Первая идея (полиномиальный прием) означает следующее. Допустим, что некоторое утверждение $\mathscr{X}$ об ассоциативной коммутативной алгебре с единицей U с перестановочными дифференцированиями $\mathscr{D}=\langle\partial_1,\dots,\partial_n\rangle$ получено с использованием линейных свойств U; ассоциативности, коммутативности и свойств единицы U; правила Лейбница для дифференцирований $\partial_1,\dots,\partial_n$; свойства коммутативности дифференцирований $[\partial_i,\partial_j]=0$, $i,j=1,2,\dots,n$. Тогда это утверждение истинно для любой ассоциативной коммутативной алгебры с единицей и перестановочными дифференцированиями.

В частности, в качестве U можем взять алгебру многочленов $K[x_1,\dots,x_n]$ и $\partial_i=\partial/\partial x_i$ или алгебру многочленов разделенных степеней (в случае $p>0$):

$$O_n(\mathbf{m})=\left\{x^\alpha=\prod_{i=1}^n x^{(\alpha_i)}:0\le\alpha_i<p^{m_i},\mathbf{m}=(m_1,\dots,m_n)\right\},$$

$$x^\alpha x^\beta=\prod_{i=1}^n\binom{\alpha_i+\beta_i}{\alpha_i}x^{\alpha+\beta},$$

со специальными дифференцированиями

$$\partial_i:x^\alpha\mapsto x^{\alpha-\epsilon_i},\quad \epsilon_i=(0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0),\quad i=1,\dots,n.$$

Вторая идея относится к $\mathscr{D}$-инвариантным многочленам [9]. Пусть $\mathscr{D}=\{\partial_1,\dots,\partial_n\}$ — система коммутативных дифференцирований и $\psi\in T^k(U,U)$. Будем называть ψ *$\mathscr{D}$-инвариантным*, если

$$\partial\psi(u_1,\dots,u_k)=\sum_{i=1}^k\psi(u_1,\dots,u_{i-1},\partial u_i,u_{i+1},\dots,u_k)$$

для любых $u_1, \dots, u_k \in U$ и $\partial \in \mathscr{D}$. Другими словами, ψ является $\mathscr{D}$-инвариантным, если любой $\partial \in \mathscr{D}$ — дифференцирование для ψ. Заметим, что U является $\mathscr{D}$-градуированным:

$$U = \bigoplus_{s\geq 0} U_s, \quad U_s U_l \subseteq U_{s+l}, \quad U_0 = \langle 1 \rangle,$$

$$\partial_i U_s \subseteq U_{s-1}, \quad U^{\mathscr{D}} = \{u \in U : \partial_i u = 0 \ \forall i = 1, \dots, n\} = U_0.$$

Для градуированного $\mathscr{D}$-инвариантного полилинейного отображения $\psi \in T^k(U, U)$ обозначим через $\pi\psi$ полилинейную форму $\pi\psi \in T^k(U, U_0)$, определенную на однородных базисных элементах $e_1, \dots, e_k \in U$ как

$$\pi\psi(e_1, \dots, e_k) = \psi(e_1, \dots, e_k),$$

если $\psi(e_1, \dots, e_k) \in U_0$, и

$$\pi\psi(e_1, \dots, e_k) = 0,$$

если $\psi(e_1, \dots, e_k) \in \bigoplus_{s>0} U_s$. Назовем $\pi\psi$ *опорой* ψ и k-кортеж базисных однородных элементов $(e_1, \dots, e_k)$ таких, что $\pi\psi(e_1, \dots, e_k) \neq 0$, *опорной цепью*. Пусть Γ — множество опорных цепей. Тогда [9] ψ может быть восстановлен при помощи $\pi\psi$ единственным образом. Именно,

$$\psi(u_1, \dots, u_k) = \sum_{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\} \in \Gamma} \frac{\partial^{\alpha_1}(u_1)}{\alpha_1!} \dots \frac{\partial^{\alpha_k}(u_k)}{\alpha_k!} \pi\psi(x^{\alpha_1}, \dots, x^{\alpha_k}).$$

Таким образом, для того чтобы найти $\mathscr{D}$-полилинейную форму, достаточно вычислить ее опору. Мы используем этот метод в вычислении $Q\psi$, $Q_{\mathrm{short}}\psi$, $Q_{\mathrm{long}}\psi$ и $Q_{\mathrm{alt}}\psi$. В нашем случае $n = 1$ и восстанавливающая формула выглядит более просто:

$$\psi = \sum_{i_1, \dots, i_k \in \Gamma} \lambda_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial^{i_1} u_1}{i_1!} \dots \frac{\partial^{i_k} u_k}{i_k!},$$

где $\lambda_{i_1, \dots, i_k} = \pi\psi(x^{i_1}, \dots, x^{i_k}) \in K$. В случае разделенных многочленов x^i следует заменить на $x^{(i)}$ и $\frac{\partial^i u}{i!}$ на $\partial^i u$.

2. Связь между n-лиевыми, $(n-1)$-левокоммутативными и гомотопическими n-лиевыми структурами

Определим квадратичные отображения

$$Q, Q_{\mathrm{short}}, Q_{\mathrm{long}}, Q_{\mathrm{alt}} : C^k(A, A) \to T^{2k-1}(A, A)$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} Q\psi(a_1, \dots, a_{2k-1}) &= \psi(a_1, \dots, a_{k-1}, \psi(a_k, \dots, a_{2k-1})) \\ &- \sum_{i=0}^{k-1} \psi(a_k, \dots, a_{k+i-1}, \psi(a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+i}), a_{k+i+1}, \dots, a_{2k-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &Q_{\mathrm{long}}\psi(a_1, \dots, a_{2k-1}) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}_{k-1,k}, \sigma(k-1) = 2k-1} \operatorname{sign}\sigma\, \psi(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(k-2)}, a_{\sigma(k-1)}, \psi(a_{\sigma(k)}, \dots, a_{\sigma(2k-1)})), \end{aligned}$$

$$Q_{\mathrm{short}}\psi(a_1,\dots,a_{2k-1}) = \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}_{k-1,k},\sigma(2k-1)=2k-1} \operatorname{sign}\sigma\psi(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(k-1)},\psi(a_{\sigma(k)},\dots,a_{\sigma(2k-2)},a_{2k-1})),$$

$$Q_{\mathrm{alt}}\psi(a_1,\dots,a_{2k-1}) = \sum_{\sigma\in\mathrm{Sym}_{k-1,k}} \operatorname{sign}\sigma\psi(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(k-1)},\psi(a_{\sigma(k)},\dots,a_{\sigma(2k-2)},a_{\sigma(2k-1)})).$$

Эти определения делят элементы $\{a_1,\dots,a_{2k-1}\}$ на два типа. Назовем элементы $(k-1)$ элементного подмножества $\{a_1,\dots,a_{k-1}\}$ *короткими*, а элементы k элементного подмножества $\{a_k,\dots,a_{2k-1}\}$ *длинными*.

Если $\psi\in C^k(A,A)$, то $Q\psi\in T^{2k-1}(A,A)$ кососимметричен по всем коротким аргументам и по всем длинным аргументам, т. е. по первым $k-1$ аргументам и по последним k аргументам. Легко видеть, что $Q_{\mathrm{short}}\psi\in T^{2k-1}(A,A)$ кососимметричен по всем коротким и по всем длинным, за исключением одного, аргументам, если $\psi\in C^k(A,A)$. Аналогично $Q_{\mathrm{long}}\psi\in T^{2k-1}(A,A)$ кососимметричен по всем коротким и по всем длинным, за исключением одного, аргументам, если $\psi\in C^k(A,A)$. Заметим, что $Q_{\mathrm{alt}}\psi\in C^{2k-1}(A,A)$.

Предложение 2.1. *Предположим, что $\omega\in C^k(A,A)$ и выполняется одно из следующих условий:*

$p=0$, $k>2$;

$p>0$, $k\not\equiv 0,1(\operatorname{mod}p)$, $k\equiv 1(\operatorname{mod}2)$;

$p>0$, $k\not\equiv -1,2(\operatorname{mod}p)$, $k\equiv 0(\operatorname{mod}2)$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

(i) *если $Q\omega=0$, то $Q_{\mathrm{short}}\omega=0$ и $Q_{\mathrm{long}}\omega=0$.*

(ii) *если $Q_{\mathrm{short}}\omega=0$ или $Q_{\mathrm{long}}\omega=0$, то $Q_{\mathrm{alt}}\omega=0$.*

Доказательство. Назовем $\sigma\in\mathrm{Sym}_{k-1,k}$ *короткой перестановкой*, если $\sigma(k-1)=2k-1$. Любой короткой перестановке σ соответствуют $(k-2)$-кортеж $r'(\sigma)$ и k-кортеж $r''(\sigma)$, определенные по правилам

$$r'(\sigma)=\{\sigma(1),\dots,\sigma(k-2)\},\quad r''(\sigma)=\{\sigma(k),\dots,\sigma(2k-1)\}.$$

Назовем $\sigma\in\mathrm{Sym}_{k-1,k}$ *длинной перестановкой*, если $\sigma(2k-1)=2k-1$. Любой длинной перестановке σ соответствуют $(k-1)$-кортеж $r'(\sigma)$ и $(k-1)$-кортеж $r''(\sigma)$, определенные как

$$r'(\sigma)=\{\sigma(1),\dots,\sigma(k-1)\},\quad r''(\sigma)=\{\sigma(k),\dots,\sigma(2k-2)\}.$$

Заметим, что

$$r'(\sigma)\cup r''(\sigma)=\{1,\dots,2k-2\}$$

для любого $\sigma\in\mathrm{Sym}_{k-1,k}$. Другими словами, любой $r'(\sigma)$ однозначно определяется с помощью $r''(\sigma)$.

Назовем элемент формы

$$A_\sigma:=\psi(a_{\sigma(1)},\dots,a_{\sigma(k-1)},\psi(a_{\sigma(k)},\dots,a_{\sigma(2k-1)}))$$

коротким (*длинным*) *σ-элементом* или просто *коротким* (*длинным*) *элементом*, если σ — короткая (длинная) перестановка. Пусть $\mathrm{Sym}^s_{k-1,k}$ — множество коротких перестановок и $\mathrm{Sym}^l_{k-1,k}$ — множество длинных перестановок. Очевидно, что

$$\mathrm{Sym}_{k-1,k} = \mathrm{Sym}^s_{k-1,k} \cup \mathrm{Sym}^l_{k-1,k}$$

и

$$Q_{\mathrm{alt}}\psi = Q_{\mathrm{short}}\psi + Q_{\mathrm{long}}\psi, \tag{1}$$

Тождество $Q\psi = 0$ для $\psi \in C^k(A, A)$ дает нам, что

$$\begin{aligned}&\psi(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(k-1)}, \psi(a_{\sigma(k)}, \dots, a_{\sigma(2k-1)}))\\ &= \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i-1} \psi(a_{\sigma(k)}, \dots, \widehat{a_{\sigma(k+i)}}, \dots, a_{\sigma(2k-1)}, \psi(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(k-1)}, a_{\sigma(k+i)})).\end{aligned} \tag{2}$$

В частности, (2) означает, что любой короткий σ-элемент может быть представлен как сумма k длинных элементов. Более точно, короткий элемент A_σ есть сумма k длинных элементов A_τ, где длинная перестановка τ удовлетворяет условию $r'(\tau) \subset r''(\sigma)$. Так как $|r''(\sigma) \setminus r'(\tau)| = 1$, существует один элемент, скажем i, такой, что $r''(\sigma) = r'(\tau) \cup \{i\}$. Тогда $i \le 2k - 2$ и i не равен $k - 1$ элементам из $r'(\tau)$. Таким образом, существует $k - 1$ возможностей выбрать i.

Другими словами, в соответствии с (2) элемент

$$\begin{aligned}&Q_{\mathrm{long}}\psi(a_1, \dots, a_{2k-1})\\ &\qquad = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}^s_{k-1,k}} \operatorname{sign}\sigma \psi(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(k-1)}, \psi(a_{\sigma(k)}, \dots, a_{\sigma(2k-1)}))\end{aligned}$$

может быть представлен в виде

$$(k-1) \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}^l_{k-1,k}} \psi(a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(k-1)}, \psi(a_{\sigma(k)}, \dots, a_{\sigma(2k-1)})).$$

Итак, из условий $\psi \in C^k(A, A)$, $Q\psi = 0$ можно получить, что

$$Q_{\mathrm{long}}\psi = (k-1) Q_{\mathrm{short}}\psi. \tag{3}$$

Дадим другую интерпретацию (2). Если σ — длинная перестановка, то A_σ — сумма $k - 1$ коротких элементов и одного длинного элемента $A_{\tilde\sigma}$, где

$$\tilde\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & k-1 & k & \cdots & 2k-2 & 2k-1 \\ \sigma(k) & \cdots & \sigma(2k-2) & \sigma(1) & \cdots & \sigma(k-1) & 2k-1 \end{pmatrix}.$$

Тем самым A_σ может быть представлен как сумма коротких элементов формы A_τ, где $r'(\tau) \subset r''(\sigma)$. Точнее, $r''(\sigma) \setminus r'(\tau) = \{i\}$ для некоторого $i \in \{1, 2, \dots, 2k-2\}$, и i может быть равен одному из $k - 2$ элементов из $r'(\tau)$. Таким образом, здесь есть k возможностей для длинной перестановки σ такой, что A_τ может быть одним слагаемым из A_σ. Заметим, что

$$\operatorname{sign}\sigma = (-1)^{k-1} \operatorname{sign}\tilde\sigma.$$

Следовательно, суммирование $\operatorname{sign}\sigma A_\sigma$ для всех $\sigma \in \mathrm{Sym}^l_{k-1,k}$ в соответствии с (2) дает нам, что

$$Q_{\mathrm{short}}\psi = k Q_{\mathrm{long}}\psi + (-1)^{k-1} Q_{\mathrm{short}}\psi. \tag{4}$$

Мы видим, что определитель системы линейных уравнений (3) и (4) равен

$$\begin{vmatrix} 1 & -k+1 \\ k & -1-(-1)^k \end{vmatrix} = -k^2+k+1+(-1)^k.$$

Значит, из условий $Q\psi = 0$ и $\psi \in C^k(A,A)$ вытекают тождества

$$Q_{\text{long}}\psi + 2Q_{\text{short}}\psi = 0, \quad k \equiv -1 (\operatorname{mod} p),\ k \equiv 0 (\operatorname{mod} 2),\ p > 0,$$

$$Q_{\text{long}}\psi - Q_{\text{short}}\psi = 0, \quad k \equiv 2 (\operatorname{mod} p),\ k \equiv 0 (\operatorname{mod} 2),\ p > 0,$$

$$Q_{\text{long}}\psi + Q_{\text{short}}\psi = 0, \quad k \equiv 0 (\operatorname{mod} p),\ k \equiv 1 (\operatorname{mod} 2),\ p > 0,$$

$$Q_{\text{long}}\psi = 0, \quad k \equiv 1 (\operatorname{mod} p),\ k \equiv 1 (\operatorname{mod} 2),\ p > 0,$$

и

$$Q_{\text{long}}\psi = 0, Q_{\text{short}}\psi = 0, \quad p = 0,\ k > 2.$$

Таким образом, по (1)

$$Q_{\text{alt}}\psi = 0,$$

если $p = 0$, $k > 2$ или $k \not\equiv 0, 1 (\operatorname{mod} p)$, $k \equiv 1 (\operatorname{mod} 2)$, или $k \not\equiv -1, 2 (\operatorname{mod} p)$, $k \equiv 0 (\operatorname{mod} 2)$.

Следствие 2.2. *Если алгебра (A, ω) является n-лиевой, то она $(n-1)$-левокоммутативная. Если алгебра (A, ω) $(n-1)$-левокоммутативная, то она гомотопическая n-лиева.*

В частности, любая n-лиева алгебра является гомотопической n-лиевой. Как показывают теоремы 1.1 и 1.2, обратное неверно.

3. Доказательства теорем 1.1 и 1.2

Пусть $\mathbf{Z}^n = \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : \alpha_i \in \mathbf{Z}\}$ и $\mathbf{Z}^n_+ = \{\alpha \in \mathbf{Z}^n : \alpha_i \geq 0,\ i = 1, \dots, n\}$. Для $\alpha \in \mathbf{Z}^n$ положим

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

Пусть U — ассоциативная коммутативная алгебра с дифференцированием ∂. Пусть $\psi \in C^k(U,U)$ и $g \in C^l(U,U)$. Определим $f \smile g, f \wedge g \in C^{k+l}(U,U)$ и билинейные отображения

$$Q(f,g), Q_{\text{alt}}(f,g) \in C^{k+l-1}(U,U), \quad Q_{\text{short}}(f,g) \in T^{k+l-1}(U,U)$$

следующим образом:

$$f \smile g(u_1, \dots, u_{k+l}) = f(u_1, \dots, u_k) g(u_{k+1}, \dots, u_{k+l}),$$

$$f \wedge g(u_1, \dots, u_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \mathrm{Sym}_{k+l}} \operatorname{sign} \sigma (f \smile g)(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(k+l)}),$$

$$f \star g(u_1, \dots, u_{k+l-1}) = f(u_1, \dots, u_{k-1}, g(u_k, \dots, u_{k+l-1})),$$

$$\begin{aligned} Q(f,g) = {} & f(u_1, \dots, u_{k-1}, g(u_k, \dots, u_{k+l-1})) \\ & - \sum_{i=1}^{l} g(u_k, \dots, u_{k+i-2}, f(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+i-1}), u_{k+i}, \dots, u_{k+l-1}), \end{aligned}$$

$$Q_{\text{alt}}(f,g)(u_1,\dots,u_{k+l-1}) = \sum_{\sigma\in\text{Sym}_{k-1,l}} \operatorname{sign}\sigma (f\star g)(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(k+l-1)}),$$

$$Q_{\text{short}}(f,g)(u_1,\dots,u_{k+l-1}) = \sum_{\sigma\in\text{Sym}_{k-1,l-1}} \operatorname{sign}\sigma (f\star g)(u_{\sigma(1)},\dots,u_{\sigma(k+l-2)},u_{k+l-1}).$$

Заметим, что определения Q как билинейных отображений согласуются с определениями Q как квадратичных отображений в предыдущем разделе:

$$Q(f,f)=Q(f),\quad Q_{\text{alt}}(f,f)=Q_{\text{alt}}(f),\quad Q_{\text{short}}(f,f)=Q_{\text{short}}(f).$$

Так как $(C^*(U,U),\smile)$ ассоциативно, $(C^*(U,U),\wedge)$ также ассоциативно. Пусть

$$C^k_{\text{loc},s}(U)=\{\partial^{i_1}\wedge\dots\wedge\partial^{i_k} : 0\le i_1<\dots<i_k, i_1+\dots+i_k=s\}$$

и

$$C^k_{\text{loc}}(U)=\bigoplus_s C^k_{\text{loc},s}(U).$$

Заметим, что $V^\alpha\in C^k_{\text{loc},|\alpha|}(U)$ для любых $\alpha\in\mathbf{Z}^n_+$. Положим $|\psi|=s$, если $\psi\in C^k_{\text{loc},s}(U)$.

Пусть $\psi\in T^k(A,A)$. Определим $i(a)\psi\in T^{k-1}(A,A)$ через

$$i(a)\psi(a_1,\dots,a_{k-1})=\psi(a,a_1,\dots,a_{k-1}).$$

Предложение 3.1. *Если ψ k-лиева, то $i(a)\psi$ является $(k-1)$-лиевой для любого $a\in A$.*

Доказательство. См. [1].

Предложение 3.1 может быть изменено следующим образом.

Лемма 3.2. *Если ψ k-лиева, то для $(k-l)$-лиева умножения*

$$\psi_l := i(a_1)i(a_2)\cdots i(a_l)\psi$$

имеют место соотношения

$$Q(\psi_i,\psi_j)=0,\quad i\le j.$$

Лемма 3.3. $C^k_{\text{loc},s}(U)=0$, *если $s<k(k-1)/2$.*

Доказательство. Если $0\ne\partial^{i_1}\wedge\dots\wedge\partial^{i_k}\in C^k_{\text{loc},s}(U)$, то $s=i_1+\dots+i_k\ge 0+1+2+\dots+(k-1)=(k-1)k/2$.

Лемма 3.4 (см. [10]). *Для любых $\alpha\in\mathbf{Z}^k_+$ и $\beta\in\mathbf{Z}^l_+$*

$$Q_{\text{alt}}(V^\alpha,V^\beta)\in C^{k+l-1}_{\text{loc},|\alpha|+|\beta|}(U).$$

Следствие 3.5. $Q_{\text{alt}}(V^{0,1,\dots,k},V^{0,1\dots,l})=0$ *для любых $k,l>0$.*

Доказательство. Заметим, что $|V^{0,1,\dots,k}|=k(k+1)/2$. Следовательно,

$$Q_{\text{alt}}(V^{0,1,\dots,k},V^{0,1,\dots,l})\in C^{k+l+1}_{\text{loc},(k^2+l^2+k+l)/2}(U).$$

Очевидно, что $(k^2+l^2+k+l)/2<(k+l+1)(k+l)/2$. Поэтому по лемме 3.3 $C^{k+l+1}_{\text{loc},(k^2+l^2+k+l)/2}(U)=0$. Итак, $Q_{\text{alt}}(V^{0,1,\dots,k},V^{0,1,\dots,l})=0$.

Лемма 3.6. *$Q_{\text{short}}(V^{0,1,\dots,k}, V^{0,1,\dots,k}) = 0$, если $k > 2$. Если $k = 2$, то $Q_{\text{short}}(V^{0,1,2}, V^{0,1,2}) = 2V^{0,1,2,3} \smile \mathrm{id}$.*

Доказательство. Заметим, что $Q_{\text{short}}(V^{0,1,\dots,k}, V^{0,1,\dots,k})$ является линейной комбинацией коцепей формы $(\partial^{i_1} \wedge \dots \wedge \partial^{i_{2k}}) \smile \partial^{i_{2k+1}}$ такой, что $i_1 + \dots + i_{2k} + i_{2k+1} = k^2 + k$ и $0 \le i_1 < i_2 < \dots < i_{2k}$. Имеем $i_1 + \dots + i_{2k} \ge 0 + 1 + 2 + \dots + (2k-1) = (2k-1)k$. Следовательно,

$$k^2 + k = i_1 + \dots + i_{2k+1} > (2k-1)k.$$

Неравенство невозможно, если $k > 2$.

Рассмотрим случай $k = 2$. Имеем

$$Q_{\text{short}}(V^{0,1,2}, V^{0,1,2}) = \lambda V^{0,1,2,3} \smile \partial^0 \tag{5}$$

для некоторого $\lambda \in K$. Получая эту формулу, мы использовали только ассоциативность, коммутативность, свойства линейности U и правило Лейбница для дифференцирований. Следовательно, (5) справедливо для любой ассоциативной коммутативной алгебры U с дифференцированием ∂, и λ не зависит от U и ∂. В частности, мы можем взять $U = K[x]$ и $\partial = \partial/\partial x$. Имеем

$$Q_{\text{short}}(V^{0,1,2}, V^{0,1,2})(1, x, x^2, x^3, 1) = \lambda V^{0,1,2,3} \smile \partial^0(1, x, x^2, x^3, 1).$$

Далее,

$$\begin{aligned}
&Q_{\text{short}}(V^{0,1,2}, V^{0,1,2})(1, x, x^2, x^3, 1)\\
&\quad = V^{0,1,2}(1, x, V^{0,1,2}(x^2, x^3, 1)) - V^{0,1,2}(1, x^2, V^{0,1,2}(x, x^3, 1))\\
&\quad + V^{0,1,2}(1, x^3, V^{0,1,2}(x, x^2, 1)) + V^{0,1,2}(x, x^2, V^{0,1,2}(1, x^3, 1))\\
&\quad - V^{0,1,2}(x, x^3, V^{0,1,2}(x, x^2, 1)) + V^{0,1,2}(x^2, x^3, V^{0,1,2}(1, x, 1))\\
&\quad = \partial^2(V^{0,1,2}(1, x^2, x^3)) - V^{0,1,2}(1, x^2, 6x) + V^{0,1,2}(1, x^3, 2x^0)\\
&\qquad + V^{0,1,2}(x, x^2, 0) - V^{0,1,2}(x, x^3, 2x^0) + V^{0,1,2}(x^2, x^3, 0) = 24
\end{aligned}$$

и

$$\lambda V^{0,1,2,3} \smile \partial^0(1, x, x^2, x^3, 1) = 12\lambda.$$

Итак, $\lambda = 2$.

Лемма 3.7. *Пусть $\psi \in C^k(A, A)$, X — линейная оболочка множества $\{a_1, \dots, a_{k-1}\}$ и Y — линейная оболочка множества $\{b_1, \dots, b_k\}$. Тогда*

$$Q\psi(a_1, \dots, a_{k-1}, b_1, \dots, b_k) = 0,$$

если $X \subseteq Y$.

Доказательство. Пусть $X \subseteq Y$ и $\dim Y = l \le k$.

Так как ψ кососимметричен, если $l < k$, то

$$\psi(b_1, \dots, b_k) = 0$$

для любых $b_1, \dots, b_k \in Y$ и

$$\psi(a_1, \dots, a_{k-1}, b_i) = 0$$

для любых $a_1, \dots, a_{k-1} \in X \subseteq Y$, $b_i \in Y$. Следовательно, в этом случае

$$Q\psi(a_1, \dots, a_{k-1}, b_1, \dots, b_k) = 0.$$

Теперь предположим, что $\dim Y = k$. Если $\dim X < k-1$, то аналогичные рассуждения показывают, что

$$\psi(e_{i_1}, \dots, e_{i_{k-1}}, c) = 0$$

для любых $c \in A$. Итак, в этом случае лемма верна.

Осталось рассмотреть случай $\dim X = k-1$, $\dim Y = k$.

Пусть $\{e_1, \dots, e_k\}$ — базис Y такой, что $\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ — базис X. Поскольку $Q\psi$ полилинеен по аргументам $a_1, \dots, a_{k-1}$, $b_1, \dots, b_k$, для доказательства леммы достаточно установить, что

$$Q\psi(e_1, \dots, e_{k-1}, e_1, \dots, e_k) = 0.$$

Так как ψ кососимметричен, то

$$\psi(e_1, \dots, e_{k-1}, e_i) = 0$$

для всех $i \leq k-1$. Итак,

$$\sum_{i=1}^{k} \psi(e_1, \dots, e_{i-1}, \psi(e_1, \dots, e_{k-1}, e_i), e_{i+1}, \dots, e_k) \\ = \psi(e_1, \dots, e_{k-1}, \psi(e_1, \dots, e_{k-1}, e_k)).$$

Другими словами, $Q\psi(e_1, \dots, e_{k-1}, e_1, \dots, e_k) = 0$. Лемма полностью доказана.

Лемма 3.8. *$V^{0,1,2,3}$ является 4-лиевым умножением, если $p = 3$.*

Доказательство. Имеем

$$|V^{0,1,2,3}| = 6 \Rightarrow |QV^{0,1,2,3}| = 12.$$

Выпишем множество всех $(3,4)$-разбиений 12:

$$\Gamma_{3,4}(12) = \{(\{0,1,2\},\{0,1,2,6\}),\ (\{0,1,2\},\{0,1,3,5\}),\ \{0,1,2\},\{0,2,3,4\}), \\ (\{0,1,3\},\{0,1,2,5\}),\ (\{0,1,3\},\{0,1,3,4\}),\ (\{0,1,4\},\{0,1,2,4\}), \\ (\{0,1,5\},\{0,1,2,3\}), (\{0,2,3\},\{0,1,2,4\}), (\{0,2,4\},\{0,1,2,3\}), \\ (\{1,2,3\},\{0,1,2,3\})\}.$$

Итак,

$$QV^{0,1,2,3} = \sum_{(\alpha,\beta)\in\Gamma_{3,4}(12)} \lambda_{(\alpha,\beta)} V^{\alpha} \smile V^{\beta}, \tag{6}$$

где $\alpha = \{i_1, i_2, i_3\}$, $\beta = \{i_4, i_5, i_6, i_7\}$, $0 \leq i_1 < i_2 < i_3$, $0 \leq i_4 < i_5 < i_6 < i_7$, $i_1 + \dots + i_7 = 12$. В получении формулы (6) используется только правило Лейбница. Следовательно, эта формула универсальна, т. е. коэффициенты $\lambda_{\alpha,\beta}$ не зависят от U и от дифференцирования ∂. В частности, в качестве U и ∂ можно взять $\mathbf{Q}[x], \partial = \partial/\partial_x$. Чтобы найти $\lambda_{\alpha,\beta}$, можно взять $a_l = x^{i_l}$, $l = 1, \dots, 7$, и вычислить $QV^{0,1,2,3}$ в $k[x]$. Имеем

$$\lambda_{\alpha,\beta} = \frac{1}{i_1! \dots i_7!} QV^{0,1,2,3}.$$

По лемме 3.7

$$QV^{0,1,2,3}(1, x, x^2, 1, x, x^2, x^6) = 0,$$
$$QV^{0,1,2,3}(1, x, x^3, 1, x, x^3, x^4) = 0,$$

$$QV^{0,1,2,3}(1,x,x^4,1,x,x^2,x^4)=0.$$

Итак, если

$$(\alpha,\beta)\in\{(\{0,1,2\},\{0,1,2,6\}),(\{0,1,3\},\{0,1,3,4\}),(\{0,1,4\},\{0,1,2,4\})\},$$

то $\lambda_{\alpha,\beta}=0$.

Далее,

$$V^{0,1,2,3}(1,x^2,x^3,x^4)=\begin{vmatrix}1 & x^2 & x^3 & x^4\\ 0 & 2x & 3x^2 & 4x^3\\ 0 & 2 & 6x & 12x^2\\ 0 & 0 & 6 & 24x\end{vmatrix}=48x^3,$$

$$V^{0,1,2,3}(1,x,x^2,x^4)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & x^4\\ 0 & 1 & 2x & 4x^3\\ 0 & 0 & 2 & 12x^2\\ 0 & 0 & 0 & 24x\end{vmatrix}=48x.$$

Итак

$$\begin{aligned}QV^{0,1,2,3}&(1,x,x^2,1,x^2,x^3,x^4)\\ &=V^{0,1,2,3}(1,x,x^2,V^{0,1,2,3}(1,x^2,x^3,x^4))-0-0\\ &\quad-V^{0,1,2,3}(1,x^2,x^3,V^{0,1,2,3}(1,x,x^2,x^4))\\ &=48V^{0,1,2,3}(1,x,x^2,x^3)-48V^{0,1,2,3}(1,x^2,x^3,x)=0\end{aligned}$$

и

$$\lambda_{\{0,1,2\},\{0,2,3,4\}}=0.$$

Имеем

$$V^{0,1,2,3}(1,x,x^3,x^5)=\begin{vmatrix}1 & x & x^3 & x^5\\ 0 & 1 & 3x^2 & 5x^4\\ 0 & 0 & 6x & 20x^3\\ 0 & 0 & 6 & 60x^2\end{vmatrix}=240x^3,$$

$$V^{0,1,2,3}(1,x,x^2,x^5)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2 & x^5\\ 0 & 1 & 2x & 5x^4\\ 0 & 0 & 2 & 20x^3\\ 0 & 0 & 0 & 60x^2\end{vmatrix}=120x^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&QV^{0,1,2,3}(1,x,x^2,1,x,x^3,x^5)\\ &=V^{0,1,2,3}(1,x,x^2,V^{0,1,2,3}(1,x,x^3,x^5))-0-0-V^{0,1,2,3}(1,x,x^3,V^{0,1,2,3}(1,x,x^2,x^5))\\ &=240V^{0,1,2,3}(1,x,x^2,x^3)-120V^{0,1,2,3}(1,x,x^3,x^2)\\ &=360V^{0,1,2,3}(1,x,x^2,x^3)=4320\end{aligned}$$

и

$$\lambda_{\{0,1,2\},\{0,1,3,5\}}=\frac{4320}{0!1!2!0!1!3!5!}=3.$$

Аналогичные вычисления показывают, что

$$\lambda_{\{0,1,3\},\{0,1,2,5\}}=-3,\lambda_{\{0,1,5\},\{0,1,2,3\}}=3,\lambda_{\{0,2,3\},\{0,1,2,4\}}=\lambda_{\{0,2,4\},\{0,1,2,3\}}=0.$$

Таким образом, мы установили, что

$$QV^{0,1,2,3}=3V^{0,1,2}V^{0,1,3,5}-3V^{0,1,3}V^{0,1,2,5}+3V^{0,1,5}V^{0,1,2,3}.$$

В частности, $QV^{0,1,2,3}=0$, если $p=3$.

Следствие 3.9. *Если $p = 3$, то $V^{1,2,3}$ является 3-лиевым умножением и $V^{2,3}$ — 2-лиевым умножением.*

Доказательство следует из леммы 3.8, предложения 3.1 и из следующих формул:

$$i(1)V^{0,1,2,3} = V^{1,2,3}, \quad i(x)V^{1,2,3} = V^{2,3}.$$

Лемма 3.10. *$V^{0,1,2,3,4}$ — 5-лиево умножение, если $p = 2$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.8, поэтому мы опускаем подробности вычислений. Имеем

$$|V^{0,1,2,3,4}| = 10 \Rightarrow |QV^{0,1,2,3}| = 20.$$

Следовательно, $QV^{0,1,2,3}$ — линейная комбинация $V^\alpha \smile V^\beta$, где $(\alpha,\beta) \in \Gamma_{4,5}(20)$, и

$$\begin{gathered}\Gamma_{4,5}(20) = \{(\{0,1,2,3\},\{0,1,2,3,8\}),(\{0,1,2,3\},\{0,1,2,4,7\}),\\ (\{0,1,2,3\},\{0,1,2,5,6\}),(\{0,1,2,3\},\{0,1,3,4,6\}),(\{0,1,2,3\},\{0,2,3,4,5\}),\\ (\{0,1,2,4\},\{0,1,2,3,7\}),(\{0,1,2,4\},\{0,1,2,4,6\}),(\{0,1,2,4\},\{0,1,3,4,5\}),\\ (\{0,1,2,5\},\{0,1,2,3,6\}),(\{0,1,2,5\},\{0,1,2,4,5\}),(\{0,1,3,4\},\{0,1,2,3,6\}),\\ (\{0,1,3,4\},\{0,1,2,4,5\}),(\{0,1,2,6\},\{0,1,2,3,5\}),(\{0,1,3,5\},\{0,1,2,3,5\}),\\ (\{0,2,3,4\},\{0,1,2,3,5\}),(\{0,1,2,7\},\{0,1,2,3,4\}),(\{0,1,3,6\},\{0,1,2,3,4\}),\\ (\{0,1,4,5\},\{0,1,2,3,4\}),(\{0,2,3,5\},\{0,1,2,3,4\}),(\{1,2,3,4\},\{0,1,2,3,4\})\}.\end{gathered}$$

Итак, существует $\lambda_{\alpha,\beta} \in \mathbf{Z}$ такой, что

$$QV^{0,1,2,3,4} = \sum_{(\alpha,\beta)\in\Gamma_{4,5}(20)} \lambda_{(\alpha,\beta)} V^\alpha \smile V^\beta.$$

Вычисления, подобные вычислениям в доказательстве леммы 3.8, показывают, что

$$\begin{aligned}QV^{0,1,2,3,4} = {}& 4V^{0,1,2,7}V^{0,1,2,3,4} + 2V^{0,1,3,6}V^{0,1,2,3,4} - 2V^{0,1,4,5}V^{0,1,2,3,4}\\ &+ 2V^{0,2,3,5}V^{0,1,2,3,4} + 2V^{0,1,2,6}V^{0,1,2,3,5} - 2V^{0,2,3,4}V^{0,1,2,3,5}\\ &- 2V^{0,1,2,5}V^{0,1,2,3,6} - 2V^{0,1,3,4}V^{0,1,2,3,6} - 4V^{0,1,2,4}V^{0,1,2,3,7}\\ &+ 2V^{0,1,3,4}V^{0,1,2,4,5} + 4V^{0,1,2,3}V^{0,1,2,4,7} + 2V^{0,1,2,3}V^{0,1,2,5,6}\\ &- 2V^{0,1,2,4}V^{0,1,3,4,5} + 2V^{0,1,2,3}V^{0,1,3,4,6} + 2V^{0,1,2,3}V^{0,2,3,4,5}.\end{aligned}$$

В частности, если $p = 2$, то $QV^{0,1,2,3,4} = 0$.

Следствие 3.11. *Пусть $p = 2$. Тогда $V^{1,2,3,4}$ — 4-лиево умножение, $V^{2,3,4}$ — 3-лиево умножение и $V^{3,4}$ — 2-лиево умножение.*

Доказательство следует из леммы 3.10, предложения 3.1 и из следующих формул:

$$V^{1,2,3,4} = i(1)V^{0,1,2,3,4}, \quad V^{2,3,4} = i(x)V^{1,2,3,4}, \quad V^{3,4} = i(x^2)V^{2,3,4}/2.$$

Замечание. Явные выражения для $QV^{1,2,3,4}, QV^{2,3,4}, QV^{3,4}, QV^{1,2,3}, QV^{2,3}$ над $\mathbf{Z}$ легко вытекают из вычислений $QV^{0,1,2,3,4}$ и $QV^{0,1,2,3}$. Например,

$$\begin{aligned}QV^{1,2,3,4} = {}& 4V^{1,2,7}V^{1,2,3,4} + 2V^{1,3,6}V^{1,2,3,4} - 2V^{1,4,5}V^{1,2,3,4}\\ &+ 2V^{2,3,5}V^{1,2,3,4} + 2V^{1,2,6}V^{1,2,3,5} - 2V^{2,3,4}V^{1,2,3,5}\\ &- 2V^{1,2,5}V^{1,2,3,6} - 2V^{1,3,4}V^{1,2,3,6} - 4V^{1,2,4}V^{1,2,3,7}\\ &+ 2V^{1,3,4}V^{1,2,4,5} + 4V^{1,2,3}V^{1,2,4,7} + 2V^{1,2,3}V^{1,2,5,6}\\ &- 2V^{1,2,4}V^{1,3,4,5} + 2V^{1,2,3}V^{1,3,4,6} + 2V^{1,2,3}V^{2,3,4,5}\end{aligned}$$

и

$$QV^{1,2,3} = 3V^{1,2}V^{1,3,5} - 3V^{1,3}V^{1,2,5} + 3V^{1,5}V^{1,2,3}.$$

Лемма 3.12. *Пусть $U = O_1(m), p > 0$. Тогда*

(i) $\partial^q \in \operatorname{Der} U$, *если и только если $q = p^k$ для некоторого $k > 0$;*

(ii) $\partial^{p^k-1} \wedge \partial^{p^k}$ *2-лиева, если и только если $p = 2$ или $p = 3$, $k = 1$;*

(iii) $\partial^{p^k-2} \wedge \partial^{p^k-1} \wedge \partial^{p^k}$ *3-лиева, если и только если $p = 3$, $k = 1$ или $p = 2$, $k = 1$, или $p = 2$, $k = 2$.*

Доказательство. Случай $k = 1$ рассмотрен выше. Поскольку ∂^{p^k} является дифференцированием, полиномиальный принцип показывает, что утверждение верно и в общем случае.

Следствие 3.13. (i) $p = 3$. *Для любых $k \in \mathbf{Z}_+$ операция $\partial^{p^k-p^{k-1}} \wedge \partial^{p^k}$ является 2-лиевой.*

(ii) $p = 2$. *Для любых $k, l \in \mathbf{Z}_+$, $k > l$, операция $\partial^{p^k-p^l} \wedge \partial^{p^k}$ является 2-лиевой.*

Доказательство. (i) Для $p = 3$ имеем $p^k - p^{k-1} = 2p^{k-1}$, $p^k = 3p^{k-1}$. Так как $F = \partial^{p^{k-1}} \in \operatorname{Der} U$, наше утверждение следует из леммы 3.12(ii), применяемой для F вместо ∂.

(ii) Для $p = 2$ имеем $p^k - p^l = p^l(p^{k-l} - 1)$, $p^k = p^{k-l}p^l$. Следовательно, для $F = \partial^{p^l}$

$$\partial^{p^k} = F^{p^{k-l}}, \quad \partial^{p^k-p^l} = F^{p^{k-l}-1}.$$

Утверждение следует из леммы 3.12(ii), применяемой для $F^{p^{k-l}}$ вместо ∂^{p^k}.

Доказательство теоремы 1.1.

(i) См. следствие 3.5.

(ii) См. лемму 3.6.

(iii) Предположим, что $(U, V^{0,1,\dots,q})$ является $(q+1)$-лиевой. Если $q = 1$, то она 2-лиева для любой характеристики p.

Допустим, что $q > 1$. По предложению 3.1 $V^q = i(1)i(x)\cdots i(x^{(q-1)})V^{0,1,\dots,q}$ является 1-лиевой, т. е. $\partial^q \in \operatorname{Der} U$. При $q > 1$ и $p = 0$ это невозможно.

Итак, $p > 0$. Возьмем $U = O_1(m)$. По лемме 3.12(i) q должно быть степенью p. Предположим, что $q = p^t$.

По предложению 3.1 $V^{p^t-1,p^t} = i(1)i(x)\dots i(x^{(p^t-2)})V^{0,1,\dots,p^t}$ является 2-лиевой. По лемме 3.12(ii) это возможно в случаях, когда $p = 2$ или $p = 3$, $t = 1$.

По предложению 3.1 $V^{2^t-2,2^t-1,2^t} = i(1)i(x)\cdots i(x^{(2^t-3)})V^{0,1,\dots,2^t}$ является 3-лиевой. По лемме 3.12(iii) это возможно только в случаях, когда $p = 2, t = 1$ или $p = 2, t = 2$. Теорема 1.1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 1.2 вытекает из следствий 3.9 и 3.11. Доказательство того, что $\sum\limits_{i=1}^{2^l} V^{0,i,2^l+1-i}$, $p = 2$, является 3-лиевой, можно провести аналогичным образом. По предложению 3.1 $\sum\limits_{i=1}^{2^l} V^{i,2^l+1-i}$ 2-лиева при $p = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Филиппов В. Т.* n-Лиевы алгебры // Сиб. мат. журн. 1985. Т. 26, № 6. С. 126–140.
2. *Филиппов В. Т.* Об n-лиевой алгебре якобианов // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 3. С. 660–669.
3. *Курош А. Г.* Мультиоператорные кольца и алгебры // Успехи мат. наук. 1969. Т. 24, № 1. С. 3–15.
4. *Stasheff J., Lada T.* Introduction to SH Lie algebras for physicists // Internat. J. Theoret. Phys. 1993. V. 32, N 7. P. 1087–1103.

5. *Hanlon P., Wachs M.* On Lie k-algebras // Adv. Math. 1995. V. 113. P. 206–236.
6. *Лоос О.* Симметрические пространства. М.: Наука, 1985.
7. *Скрябин С. М.* Новые серии простых алгебр Ли характеристики 3 // Мат. сб. 1992. Т. 183, № 8. С. 3–22.
8. *Пожидаев А. П.* Два класса центрально простых n-лиевых алгебр // Сиб. мат. журн. 1999. Т. 40, № 6. С. 1313–1322.
9. *Джумадильдаев А. С.* Одно замечание относительно пространства инвариантных дифференциальных операторов // Вестн. МГУ. Серия математика, механика. 1982. Т. 116, № 2. С. 49–54.
10. *Джумадильдаев А. С.* Целочисленные и $\mathrm{mod}\, p$-когомологии алгебры Ли W_1 // Функцион. анализ и его прил. 1988. Т. 22, № 3. С. 68–70.

Статья поступила 9 мая 2004 г.

Джумадильдаев Аскар
Университет С. Демиреля,
Торайгырова, 19, Алматы 480043, Казахстан
askar@math.kz