Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2005. Том 46, № 3

УДК 517.98

АБСТРАКТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ СУПЕРПОЗИЦИИ НА ОТОБРАЖЕНИЯХ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ ДВУХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ. I

В. В. Чистяков

Аннотация: Определяется и изучается метрическая полугруппа $\mathrm{BV}_2(I_a^b;M)$ отображений двух вещественных переменных ограниченной полной вариации в смысле Витали, Харди и Краузе на прямоугольнике I_a^b со значениями в метрической полугруппе или абстрактном выпуклом конусе M. Приводится полное описание непрерывных по Липшицу операторов суперпозиции Немыцкого, действующих из $\mathrm{BV}_2(I_a^b;M)$ в такую же полугруппу $\mathrm{BV}_2(I_a^b;N)$, и, как следствие, характеризуются многозначные операторы суперпозиции. Устанавливается связь отображений из $\mathrm{BV}_2(I_a^b;M)$ с отображениями ограниченной повторной вариации и исследуется повторный оператор суперпозиции на отображениях ограниченной повторной вариации. Результаты настоящей работы развивают и обобщают недавние результаты Матковского и Мища (1984 г.), Завадзкой (1990 г.) и автора (2002, 2003 гг.) на случай (многозначных) операторов суперпозиции на отображениях двух вещественных переменных.

Ключевые слова: отображения двух переменных, полная вариация, метрическая полугруппа, оператор суперпозиции Немыцкого, многозначный оператор, свойство типа банаховости алгебры, условие Липшица.

§ 1. Введение

Пусть I, M и N — некоторые непустые множества. Обозначим через M^I семейство всех отображений, действующих из I в M. Для заданного отображения $h : I \times N \to M$ оператор $\mathscr{H} : N^I \to M^I$, определенный правилом: $(\mathscr{H}g)(x) = h(x, g(x))$ для $x \in I$ и $g \in N^I$, называется *оператором суперпозиции* (*Немыцкого*) *с генератором* h.

Оператор суперпозиции является классическим «простейшим» нелинейным оператором, действующим между функциональными пространствами, и исследованию его свойств посвящена обширная литература. Этот оператор достаточно хорошо изучен в классах измеримых и непрерывных функций, идеальных пространствах, пространствах Лебега, Орлича, Гёльдера, Соболева (см. работы [1–6] и ссылки в них). Как выясняется, «хорошие» свойства генератора h не обязательно переносятся на оператор $\mathscr{H}$. Таково, например, поведение оператора суперпозиции в пространствах Лебега: гладкость и даже аналитичность генератора еще не означают гладкость соответствующего оператора суперпозиции (эти и другие эффекты отражены в [4]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 03–01–00473).

Хотя действие оператора суперпозиции в большинстве классических функциональных пространств полностью описано, тем не менее о нем мало что известно в пространствах BV функций ограниченной вариации даже одной действительной переменной на отрезке $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ при $N = M = \mathbb{R}$ [4, § 6.5; 7]. В этом случае более подробно изучен важный класс операторов суперпозиции, удовлетворяющих условию Липшица, и однозначных [8], и многозначных ([9], когда M есть семейство компактных выпуклых подмножеств нормированного пространства). В случае одной переменной липшицевы операторы суперпозиции в классах функций и отображений ограниченной обобщенной вариации и классах липшицевых функций и отображений охарактеризованы в работах [10–23]. Для вещественных функций ограниченной вариации двух переменных (в смысле Витали, Харди и Краузе) липшицевы операторы суперпозиции полностью описаны в [24, 25].

Первый результат о характеризации липшицевых операторов суперпозиции принадлежит Матковскому [10]. Пусть $I = [a, b]$, $M = N = \mathbb{R}$ и $B(I) \subset \mathbb{R}^I$ — некоторое банахово функциональное пространство с нормой $\|\cdot\|$. Нас интересуют такие условия на генератор $h : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, при которых соответствующий ему оператор суперпозиции $\mathscr{H} : B(I) \to B(I)$ является липшицевым: существует постоянная $L > 0$ такая, что $\|\mathscr{H}g_1 - \mathscr{H}g_2\| \le L\|g_1 - g_2\|$ для всех $g_1, g_2 \in B(I)$. Напомним, что (при $L < 1$) такой оператор $\mathscr{H}$ тесно связан с решением $g \in B(I)$ функционального уравнения $\mathscr{H}g = g$ при помощи теоремы Банаха о сжимающих отображениях. В работе [10] показано, что если $B(I) = \mathrm{Lip}(I)$ есть пространство липшицевых функций на I с обычной липшицевой нормой, то $\mathscr{H}$ удовлетворяет условию Липшица тогда и только тогда, когда $h(x, u) = f(x)u + h_0(x)$ для всех $x \in I$ и $u \in \mathbb{R}$, где f и h_0 — некоторые функции из $\mathrm{Lip}(I)$. Заметим, что такого рода представление для генератора h не имеет места в пространстве $B(I) = C(I)$ непрерывных на I функций с обычной sup-нормой и в пространстве $B(I) = L^p(I)$ суммируемых по Лебегу со степенью $p \ge 1$ функций на I со стандартной нормой (например, $h(x, u) = \cos u$, $x \in I$, $u \in \mathbb{R}$).

Этот результат Матковского можно интерпретировать двояко. С одной стороны, он показывает, что множество липшицевых операторов на пространстве $\mathrm{Lip}(I)$ весьма бедно (генераторы h таких операторов необходимо линейны по второй переменной). С другой стороны, упомянутое выше функциональное уравнение $\mathscr{H}g = g$ нельзя решить в пространстве $\mathrm{Lip}(I)$ при помощи теоремы Банаха, если генератор h нелинейно зависит от второго аргумента $u \in \mathbb{R}$ (и следует привлечь более мощную теорему о неподвижной точке, например теорему Шаудера и т. п., см. [26]). Практически такая же ситуация имеет место и для пространства $B(I) = \mathrm{BV}(I)$ функций на I ограниченной вариации по Жордану (см. [8] и замечание 6 в конце § 3).

Целью настоящей работы является исчерпывающее описание абстрактных липшицевых операторов суперпозиции Немыцкого, действующих в пространствах отображений ограниченной вариации нескольких вещественных переменных со значениями в метрических полугруппах и абстрактных выпуклых конусах, а также, как следствие, описание генераторов многозначных операторов суперпозиции (в том или ином контексте отображения ограниченной вариации со значениями в метрических пространствах изучались в работах [9; 14; 23; 27, гл. 4; 28] в случае одной переменной и в [22, 29–31] в случае нескольких переменных). В этой работе рассматриваются лишь отображения ограниченной вариации двух переменных, введенные в [22, 31], поскольку принципиальное различие с одномерным случаем видно более явно. При этом наши результаты расширяют результаты работ [24, 25] и [32, § 8.3]; в краткой форме они опубликованы в [33] и докладывались в [34]. Значительно более громоздкий общий случай отображений BV произвольного конечного числа переменных и операторов суперпозиции на них будет опубликован в отдельной работе.

Настоящая работа состоит из пяти параграфов и разбита на две части. К первой части относятся § 1–3. В § 2 вводится и изучается пространство отображений ограниченной вариации типа Витали, Харди и Краузе со значениями в метрической полугруппе (или абстрактном выпуклом конусе) и показывается, что оно само образует метрическую полугруппу (или абстрактный выпуклый конус). В § 3 устанавливается необходимое условие липшицевости оператора суперпозиции (теорема 1), которое является двумерным аналогом условия из работы [8], при этом наши результаты являются новыми и для операторов суперпозиции, действующих на отображения ограниченной вариации одной переменной (см. замечание 6 в конце этой части). Ко второй части относятся § 4, 5. В § 4 приводится достаточное условие (теоремы 2 и 3), которое обобщает условие типа банаховости алгебры из [25]. В последнем § 5 предлагается другое описание пространства отображений ограниченной вариации двух переменных и исследуется повторный оператор суперпозиции Немыцкого на отображениях ограниченной повторной вариации (теорема 4).

Отметим, что наши результаты, вообще говоря, не имеют место в более широком пространстве BV из работы [30], поскольку оно не обладает свойством типа банаховости алгебры (ср. с теоремой 2 из части II). Естественность же рассмотрения нашего пространства отображений BV состоит в том, что оно существенно связано с интегральным представлением линейных непрерывных функционалов на пространстве непрерывных функций на прямоугольнике [35, гл. 2].

Автор искренне признателен А. А. Толстоногову (Иркутск, Россия) за заинтересованное обсуждение результатов этой работы и указание на ссылку [36] и W. Smajdor (Katowice, Poland) за плодотворный обмен мнениями во время моего визита в г. Катовице в апреле 2000 г.

§ 2. Полугруппы и конусы отображений

Определение 1. *Метрической полугруппой* [22] называется тройка $(M, d, +)$, где (M, d) — метрическое пространство с метрикой d, $(M, +)$ — аддитивная коммутативная полугруппа с операцией сложения $+$ и d инвариантна относительно сдвигов: $d(u + w, v + w) = d(u, v)$ для всех $u, v, w \in M$. Метрическая полугруппа $(M, d, +)$ называется *полной*, если (M, d) — полное метрическое пространство. Если M содержит элемент *нуль* $0 \in M$ (так что $u + 0 = 0 + u = u$ для всех $u \in M$), то для $u \in M$ полагаем $|u|_d = d(u, 0)$.

Для любых элементов $u, v, \bar{u}, \bar{v} \in M$ метрической полугруппы $(M, d, +)$ имеем

$$d(u, v) \le d(u + \bar{u}, v + \bar{v}) + d(\bar{u}, \bar{v}), \tag{1}$$

$$d(u + \bar{u}, v + \bar{v}) \le d(u, v) + d(\bar{u}, \bar{v}). \tag{2}$$

Из (2) вытекает, что если последовательности $\{u_k\} = \{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{v_k\}$, $\{\bar{u}_k\}$ и $\{\bar{v}_k\}$ элементов M сходятся соответственно к элементам u, v, $\bar{u}$ и $\bar{v}$ из M при $k \to \infty$, то

$$\lim_{k\to\infty} d(u_k + \bar{u}_k, v_k + \bar{v}_k) = d(u + \bar{u}, v + \bar{v}) \tag{3}$$

и, в частности, операция сложения $(u,v)\mapsto u+v$ является непрерывным отображением из $M\times M$ в M.

Определение 2. Четверку $(M,d,+,\cdot)$ называют *абстрактным выпуклым конусом*, если $(M,d,+)$ — метрическая полугруппа с нулем $0\in M$ и операция $\cdot:\mathbb{R}^+\times M\to M$ умножения элементов M на неотрицательные числа, действующая по правилу $(\lambda,u)\mapsto\lambda u$, обладает для всех $u,v\in M$ и $\lambda,\mu\in\mathbb{R}^+$ свойствами: $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$, $(\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$, $\lambda(\mu u)=(\lambda\mu)u$, $1\cdot u=u$ и $d(\lambda u,\lambda v)=\lambda d(u,v)$. Если (M,d) полно, то такой конус называется *полным*, а для $u\in M$, как и в определении 1, полагаем $|u|_d=d(u,0)$.

Отметим, что в абстрактном выпуклом конусе $(M,d,+,\cdot)$ имеет место равенство

$$d(\lambda u+\mu v,\lambda v+\mu u)=|\lambda-\mu|d(u,v),\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}^+,\ u,v\in M. \tag{4}$$

Следовательно, $d(\lambda u,\mu v)\le\lambda d(u,v)+|\lambda-\mu|\cdot|v|_d$, а потому операция умножения на неотрицательные числа в M непрерывна.

Простейшим примером метрической полугруппы и абстрактного выпуклого конуса служит любое нормированное линейное пространство $(Y,|\cdot|)$ с индуцированной метрикой $d(u,v)=|u-v|$, $u,v\in Y$, и операциями $+$ и $\cdot$ из Y. Если $K\subset Y$ есть выпуклый конус (т. е. $u+v,\lambda u\in K$ для всех $u,v\in K$ и $\lambda\ge 0$), то $(K,d,+,\cdot)$ есть абстрактный выпуклый конус, который будет полным в том случае, когда Y есть банахово пространство и K замкнут в Y.

Пусть $(Y,|\cdot|)$ есть вещественное нормированное линейное пространство. Обозначим через $\mathrm{cbc}(Y)$ семейство всех непустых замкнутых ограниченных выпуклых подмножеств Y, наделенное хаусдорфовой метрикой D, порожденной нормой в Y:

$$D(P,Q)=\max\{\sup_{p\in P}\inf_{q\in Q}|p-q|,\sup_{q\in Q}\inf_{p\in P}|p-q|\},\quad P,Q\in\mathrm{cbc}(Y).$$

Для $P,Q\in\mathrm{cbc}(Y)$ положим $P+Q=\{p+q\mid p\in P,q\in Q\}$, $\lambda P=\{\lambda p\mid p\in P\}$, $\lambda\in\mathbb{R}^+$, и $P\overset{*}{+}Q=\mathrm{cl}(P+Q)$, где cl означает замыкание в Y. Тогда в $\mathrm{cbc}(Y)$ имеют место равенства [36, 37]: $P\overset{*}{+}Q=\mathrm{cl}(\mathrm{cl}\,P+\mathrm{cl}\,Q)$, $\lambda(P\overset{*}{+}Q)=\lambda P\overset{*}{+}\lambda Q$, $(\lambda+\mu)P=\lambda P\overset{*}{+}\mu P$, $\lambda(\mu P)=(\lambda\mu)P$ и $D(\lambda P,\lambda Q)=\lambda D(P,Q)$ для всех $\lambda,\mu\in\mathbb{R}^+$. Кроме того, поскольку (см. [38, лемма 3; 39, лемма 2.2])

$$D(P\overset{*}{+}R,Q\overset{*}{+}R)=D(P+R,Q+R)=D(P,Q),\quad P,Q,R\in\mathrm{cbc}(Y),$$

то $(\mathrm{cbc}(Y),D,\overset{*}{+},\cdot)$ является абстрактным выпуклым конусом; этот конус является полным, если Y — банахово пространство (что вытекает из свойств метрики D, см., например, [40, теоремы II-9 и II-14]). Заметим, что в силу сказанного ранее непрерывны следующие два многозначных отображения: операции $\overset{*}{+}$-сложения в $\mathrm{cbc}(Y)$ и умножения на числа из $\mathbb{R}^+$. Другие необходимые для наших целей примеры метрических полугрупп и абстрактных выпуклых конусов будут приведены ниже.

Пусть (M,d) — метрическое пространство и $[a,b]\subset\mathbb{R}$ — отрезок. Напомним, что *вариация* (*по Жордану*) *отображения* $\varphi:[a,b]\to M$ есть величина (см., например, [27, гл. 4, § 9; 28])

$$V_a^b(\varphi)=\sup_\xi\sum_{i=1}^m d(\varphi(t_i),\varphi(t_{i-1})),$$

где супремум берется по всем разбиениям $\xi = \{t_i\}_{i=0}^m$ отрезка $[a,b]$ (т. е. $m \in \mathbb{N}$ и $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b$). Если эта величина конечна, говорим, что φ есть *отображение ограниченной вариации* на $[a,b]$ и пишем $\varphi \in \mathrm{BV}_1([a,b];M)$. В том случае, когда $(M,d,+)$ есть (полная) метрическая полугруппа (или абстрактный выпуклый конус), на множестве $\mathrm{BV}_1([a,b];M)$ можно ввести (см. [9, 20, 23]) структуру (полной) метрической полугруппы (или абстрактного выпуклого конуса), определив поточечную операцию сложения (и умножения на неотрицательные числа) и инвариантную относительно сдвигов метрику d_1 правилом

$$d_1(\varphi,\psi) = d\big(\varphi(a),\psi(a)\big) + W_a^b(\varphi,\psi), \quad \varphi,\psi \in \mathrm{BV}_1([a,b];M),$$

где полуметрика $W_a^b(\varphi,\psi)$, называемая *совместной вариацией φ и ψ*, есть

$$W_a^b(\varphi,\psi) = \sup_\xi \sum_{i=1}^m d(\varphi(t_i) + \psi(t_{i-1}), \psi(t_i) + \varphi(t_{i-1})). \tag{5}$$

Корректность этого следует из свойств величины $W_a^b(\varphi,\psi)$ (ср. [32, леммы 2.14 и 2.15]).

Лемма 1. *Пусть $\varphi,\psi \in \mathrm{BV}_1([a,b];M)$. Тогда*

(a) $|d(\varphi(t),\psi(t)) - d(\varphi(s),\psi(s))| \le d(\varphi(t)+\psi(s), \psi(t)+\varphi(s)) \le W_a^b(\varphi,\psi)$, $t,s \in [a,b]$;

(b) $d(\varphi(t),\psi(t)) \le d_1(\varphi,\psi)$ *для всех* $t \in [a,b]$;

(c) $\big|V_a^b(\varphi) - V_a^b(\psi)\big| \le W_a^b(\varphi,\psi) \le V_a^b(\varphi) + V_a^b(\psi)$;

(d) $W_a^t(\varphi,\psi) + W_t^b(\varphi,\psi) = W_a^b(\varphi,\psi)$, *если* $t \in [a,b]$;

(e) *если последовательности $\{\varphi_k\}$ и $\{\psi_k\}$ из $\mathrm{BV}_1([a,b];M)$ сходятся поточечно на $[a,b]$ к отображениям φ и ψ соответственно, то*

$$W_a^b(\varphi,\psi) \le \liminf_{k\to\infty} W_a^b(\varphi_k,\psi_k).$$

Перейдем к рассмотрению отображений ограниченной полной вариации двух вещественных переменных.

Координатное представление точек $x,\ y \in \mathbb{R}^2$ будем записывать в виде $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$ и считать, что $x \le y$ или $x < y$ (в $\mathbb{R}^2$), если эти неравенства выполнены покоординатно. Пусть $a = (a_1,a_2) < b = (b_1,b_2)$ в $\mathbb{R}^2$ и $I_a^b = I_{a_1,a_2}^{b_1,b_2} = [a_1,b_1]\times[a_2,b_2]$ есть *основной* прямоугольник на плоскости (область определения большинства отображений). Для отображения $f : I_a^b \to M$ и точек $x_1 \in [a_1,b_1]$ и $x_2 \in [a_2,b_2]$ определяем два отображения одной переменной $f(\cdot,x_2) : [a_1,b_1] \to M$ и $f(x_1,\cdot) : [a_2,b_2] \to M$ правилами: $f(\cdot,x_2)(t) = f(t,x_2)$ для $t \in [a_1,b_1]$ и $f(x_1,\cdot)(s) = f(x_1,s)$ для $s \in [a_2,b_2]$.

Пусть $(M,d,+)$ — метрическая полугруппа и I_a^b — основной прямоугольник.

Определение 3. *Смешанная разность* (Витали) отображения $f : I_a^b \to M$ на прямоугольнике $I_x^y = [x_1,y_1]\times[x_2,y_2] \subset I_a^b$, где $x,y \in I_a^b$, $x \le y$, есть [22, 31]

$$\mathrm{md}\big(f, I_x^y\big) = \mathrm{md}\big(f, I_{x_1,x_2}^{y_1,y_2}\big) = d(f(x_1,x_2) + f(y_1,y_2), f(x_1,y_2) + f(y_1,x_2)).$$

Назовем пару (ξ,η) (сеточным) *разбиением* I_a^b, если найдутся такие $m,n \in \mathbb{N}$, что $\xi = \{t_i\}_{i=0}^m$ — разбиение $[a_1,b_1]$ (см. выше) и $\eta = \{s_j\}_{j=0}^n$ — разбиение $[a_2,b_2]$. Тогда на прямоугольниках, составляющих это разбиение,

$$I_{ij} = I_{t_{i-1},s_{j-1}}^{t_i,s_j} = [t_{i-1},t_i]\times[s_{j-1},s_j], \quad i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n, \tag{6}$$

смешанная разность $\mathrm{md}(f, I_{ij})$ вычисляется согласно равенству

$$\mathrm{md}\big(f, I_{t_{i-1},s_{j-1}}^{t_i,s_j}\big) = d(f(t_{i-1}, s_{j-1}) + f(t_i, s_j), f(t_{i-1}, s_j) + f(t_i, s_{j-1})).$$

Определение 4. *Двойная вариация* отображения $f : I_a^b \to M$ определяется правилом (Витали [41] при $M = \mathbb{R}$)

$$V_2\big(f, I_a^b\big) = \sup_{(\xi,\eta)} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{md}(f, I_{ij}),$$

где супремум берется по всем разбиениям (ξ, η) прямоугольника I_a^b указанного выше вида. *Полной вариацией* (в модификации Харди и Краузе, см. [42] при $M = \mathbb{R}$) отображения f называется величина

$$TV_d\big(f, I_a^b\big) = V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot, a_2)) + V_{a_2}^{b_2}(f(a_1, \cdot)) + V_2\big(f, I_a^b\big), \tag{7}$$

а класс всех отображений конечной полной вариации называется *пространством отображений ограниченной вариации* (в смысле Витали, Харди и Краузе) и обозначается через $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)$.

Отметим, что понятие полной вариации (7) эффективно применялось для доказательства поточечного принципа выбора Хелли в пространстве $\mathrm{BV}_n\big(I_a^b; M\big)$ в работах [43, § III.6.5; 44, теорема 3.2] (при $n = 2$, $M = \mathbb{R}$), [45, теорема 4] (при $n \in \mathbb{N}$, $M = \mathbb{R}$) и [31, теорема 2] (для $n = 2$ и метрической полугруппы M).

Основные свойства двойной вариации $V_2(\cdot, \cdot)$ — это *аддитивность* по второму аргументу: для любого, как выше, разбиения (ξ, η) прямоугольника I_a^b, порождающего подпрямоугольники $\{I_{ij}\}_{i,j=1}^{m,n}$, имеем

$$V_2\big(f, I_a^b\big) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} V_2(f, I_{ij}); \tag{8}$$

и (секвенциальная) *полунепрерывность снизу* по первому аргументу: если последовательность отображений $f_k : I_a^b \to M$ сходится поточечно на I_a^b в метрике d к отображению $f : I_a^b \to M$, то справедливо неравенство

$$V_2\big(f, I_a^b\big) \le \liminf_{k\to\infty} V_2\big(f_k, I_a^b\big). \tag{9}$$

Учитывая аддитивность по второму аргументу и полунепрерывность снизу по первому аргументу жордановой вариации $V_a^b(\cdot, \cdot)$ (см., например, [28, § 2]), найдем, что свойство (9) имеет место, если в нем заменить $V_2(\cdot, \cdot)$ на $TV_d(\cdot, \cdot)$.

Если $f \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)$, то $f(\cdot, s) \in \mathrm{BV}_1([a_1, b_1]; M)$ для всех $s \in [a_2, b_2]$, и аналогично $f(t, \cdot) \in \mathrm{BV}_1([a_2, b_2]; M)$ для всех $t \in [a_1, b_1]$ и имеют место неравенства [25, 31]

$$V_{x_1}^{y_1}(f(\cdot, s)) \le V_{x_1}^{y_1}(f(\cdot, a_2)) + V_2\big(f, I_{x_1,a_2}^{y_1,s}\big), \quad x_1, y_1 \in [a_1, b_1],\ x_1 \le y_1, \tag{10}$$

$$V_{x_2}^{y_2}(f(t, \cdot)) \le V_{x_2}^{y_2}(f(a_1, \cdot)) + V_2\big(f, I_{a_1,x_2}^{t,y_2}\big), \quad x_2, y_2 \in [a_2, b_2],\ x_2 \le y_2. \tag{11}$$

Для $f \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)$ функция $\nu_f(x) = TV_d\big(f, I_a^x\big)$, $x \in I_a^b$, называется *функцией полной вариации* f на I_a^b и обладает следующими свойствами [25, 31]:

$$d(f(y), f(x)) \le TV_d\big(f, I_x^y\big) \le \nu_f(y) - \nu_f(x), \quad x, y \in I_a^b,\ x \le y; \tag{12}$$

$$V_2\big(\nu_f, I_a^b\big) = V_2\big(f, I_a^b\big) \quad \text{и} \quad TV\big(\nu_f, I_a^b\big) = TV_d\big(f, I_a^b\big);$$

$$\text{функция } \nu_f : I_a^b \to \mathbb{R} \text{ является } \textit{вполне монотонной}, \tag{13}$$

т. е. $\nu_f(\cdot, a_2)$ неубывающая на отрезке $[a_1, b_1]$, $\nu_f(a_1, \cdot)$ неубывающая на $[a_2, b_2]$ и для всех точек $x, y \in I_a^b$, $x \le y$, имеем $\nu_f(x_1, x_2) + \nu_f(y_1, y_2) - \nu_f(x_1, y_2) - \nu_f(y_1, x_2) \ge 0$.

В случае, когда $(M, d, +)$ есть метрическая полугруппа (или абстрактный выпуклый конус), структура метрической полугруппы (или абстрактного выпуклого конуса) на $\mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b; M\bigr)$ определяется следующим образом [32, § 8.3].

Определение 5. Пусть $f, g \in \mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b; M\bigr)$. *Операция сложения* $+$ (умножения на неотрицательное число λ) в $\mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b; M\bigr)$ вводится поточечно: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ (соответственно $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$), $x \in I_a^b$, а инвариантная относительно сдвигов *метрика* d_2 на $\mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b; M\bigr)$ определяется согласно правилу

$$d_2(f, g) = d(f(a), g(a)) + TW_d\bigl(f, g, I_a^b\bigr),$$

где *совместная полная вариация* отображений f и g есть

$$TW_d\bigl(f, g, I_a^b\bigr) = W_{a_1}^{b_1}(f(\cdot, a_2), g(\cdot, a_2)) + W_{a_2}^{b_2}(f(a_1, \cdot), g(a_1, \cdot)) + W_2\bigl(f, g, I_a^b\bigr).$$

Здесь первое слагаемое справа есть величина (5), вычисленная в метрике d для отображений $t \mapsto f(t, a_2)$ и $t \mapsto g(t, a_2)$ на отрезке $[a_1, b_1]$, и аналогичный смысл имеет второе слагаемое, а *совместная двойная вариация* $W_2\bigl(f, g, I_a^b\bigr)$ отображений f и g определяется в обозначениях (6) правилом

$$W_2\bigl(f, g, I_a^b\bigr) = \sup_{(\xi, \eta)} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \mathrm{md}_2(f, g, I_{ij}),$$

где супремум берется по всем разбиениям $\xi = \{t_i\}_{i=0}^m$ и $\eta = \{s_j\}_{j=0}^n$ отрезков $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$ соответственно ($m, n \in \mathbb{N}$) и значение *совместной смешанной разности* $\mathrm{md}_2\bigl(f, g, I_x^y\bigr)$ на подпрямоугольнике $I_x^y = [x_1, y_1] \times [x_2, y_2] \subset I_a^b$ есть

$$\begin{aligned}\mathrm{md}_2\bigl(f, g, I_{x_1, x_2}^{y_1, y_2}\bigr) = d(f(x_1, x_2) + f(y_1, y_2) + g(x_1, y_2) + g(y_1, x_2),\\ g(x_1, x_2) + g(y_1, y_2) + f(x_1, y_2) + f(y_1, x_2)).\end{aligned}$$

Корректность определения операций в $\mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b; M\bigr)$ проверяется с учетом (2) непосредственно:

$$TV_d\bigl(f + g, I_a^b\bigr) \le TV_d\bigl(f, I_a^b\bigr) + TV_d\bigl(g, I_a^b\bigr) \quad \bigl(TV_d\bigl(\lambda f, I_a^b\bigr) = \lambda TV_d\bigl(f, I_a^b\bigr)\bigr).$$

Дальнейшая проверка корректности определения 5 опирается на основные свойства полуметрики $TW_d\bigl(\cdot, \cdot, I_a^b\bigr)$, которые отражены в следующей лемме.

Лемма 2. *Если $(M, d, +)$ — метрическая полугруппа и $f, g \in \mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b; M\bigr)$, то*

(a) $|d(f(y), g(y)) - d(f(x), g(x))| \le TW_d\bigl(f, g, I_x^y\bigr)$ *для всех* $x, y \in I_a^b$, $x \le y$;

(b) $\bigl|TV_d\bigl(f, I_a^b\bigr) - TV_d\bigl(g, I_a^b\bigr)\bigr| \le TW_d\bigl(f, g, I_a^b\bigr) \le TV_d\bigl(f, I_a^b\bigr) + TV_d\bigl(g, I_a^b\bigr)$;

(c) *если* $\{f_k\}, \{g_k\} \subset \mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b; M\bigr)$ *и* $d(f_k(x), f(x)) \to 0$, $d(g_k(x), g(x)) \to 0$ *при* $k \to \infty$ *для всех* $x \in I_a^b$, *то* $TW_d\bigl(f, g, I_a^b\bigr) \le \liminf\limits_{k\to\infty} TW_d\bigl(f_k, g_k, I_a^b\bigr)$.

Доказательство. (a) Трижды применяя неравенство (1) и учитывая инвариантность d относительно сдвигов, для любых $x, y \in I_a^b$, $x \le y$, найдем, что

$$\begin{aligned}
&|d(f(y_1,y_2),g(y_1,y_2)) - d(f(x_1,x_2),g(x_1,x_2))| \\
&\qquad \le d(f(y_1,y_2)+g(x_1,x_2), g(y_1,y_2)+f(x_1,x_2)) \\
&\le d(f(y_1,y_2)+g(x_1,x_2)+f(y_1,x_2)+g(y_1,y_2), g(y_1,y_2)+f(x_1,x_2)+f(y_1,y_2) \\
&\qquad + g(y_1,x_2)) + d(f(y_1,x_2)+g(y_1,y_2), f(y_1,y_2)+g(y_1,x_2)) \\
&\qquad \le d(f(y_1,x_2)+g(x_1,x_2), g(y_1,x_2)+f(x_1,x_2)) \\
&\qquad + d\big(f(x_1,y_2)+g(x_1,x_2), g(x_1,y_2)+f(x_1,x_2)) \\
&\qquad + d\big(g(x_1,x_2)+g(y_1,y_2)+f(x_1,y_2)+f(y_1,x_2), \\
&\qquad f(x_1,x_2)+f(y_1,y_2)+g(x_1,y_2)+g(y_1,x_2)) \\
&\le W_{x_1}^{y_1}(f(\cdot,x_2),g(\cdot,x_2)) + W_{x_2}^{y_2}(f(x_1,\cdot),g(x_1,\cdot)) + W_2\big(f,g,I_x^y\big) = TW_d\big(f,g,I_x^y\big).
\end{aligned}$$

(b) Вначале заметим, что

$$\big|V_2\big(f,I_a^b\big) - V_2\big(g,I_a^b\big)\big| \le W_2\big(f,g,I_a^b\big) \le V_2\big(f,I_a^b\big) + V_2\big(g,I_a^b\big). \tag{14}$$

Действительно, для любого подпрямоугольника $I_x^y \subset I_a^b$ имеем

$$\mathrm{md}\big(f,I_x^y\big) \le \mathrm{md}\big(g,I_x^y\big) + \mathrm{md}_2\big(f,g,I_x^y\big), \tag{15}$$

поскольку в силу неравенства (1)

$$\begin{aligned}
\mathrm{md}\big(f,I_x^y\big) &= d(f(x_1,x_2)+f(y_1,y_2), f(x_1,y_2)+f(y_1,x_2)) \\
&\le d(g(x_1,x_2)+g(y_1,y_2), g(x_1,y_2)+g(y_1,x_2)) \\
&+ d(f(x_1,x_2)+f(y_1,y_2)+g(x_1,y_2)+g(y_1,x_2), \\
g(x_1,x_2)+g(y_1,y_2)&+f(x_1,y_2)+f(y_1,x_2)) = \mathrm{md}\big(g,I_x^y\big) + \mathrm{md}_2\big(f,g,I_x^y\big)
\end{aligned}$$

и аналогично ввиду неравенства (2)

$$\mathrm{md}_2\big(f,g,I_x^y\big) \le \mathrm{md}\big(f,I_x^y\big) + \mathrm{md}\big(g,I_x^y\big). \tag{16}$$

Из (15) и (16) вытекают неравенства (14). В силу (7), леммы 1(c) и (14) получаем

$$\begin{aligned}
&\big|TV_d\big(f,I_a^b\big) - TV_d\big(g,I_a^b\big)\big| \le \big|V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot,a_2)) - V_{a_1}^{b_1}(g(\cdot,a_2))\big| \\
&\qquad + \big|V_{a_2}^{b_2}(f(a_1,\cdot)) - V_{a_2}^{b_2}(g(a_1,\cdot))\big| + \big|V_2\big(f,I_a^b\big) - V_2\big(g,I_a^b\big)\big| \\
&\le W_{a_1}^{b_1}(f(\cdot,a_2),g(\cdot,a_2)) + W_{a_2}^{b_2}(f(a_1,\cdot),g(a_1,\cdot)) + W_2\big(f,g,I_a^b\big) = TW_d\big(f,g,I_a^b\big) \\
&\le V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot,a_2)) + V_{a_1}^{b_1}(g(\cdot,a_2)) + V_{a_2}^{b_2}(f(a_1,\cdot)) + V_{a_2}^{b_2}(g(a_1,\cdot)) + V_2\big(f,I_a^b\big) + V_2\big(g,I_a^b\big) \\
&\qquad = TV_d\big(f,I_a^b\big) + TV_d\big(g,I_a^b\big).
\end{aligned}$$

(c) Пусть $\xi = \{t_i\}_{i=0}^m$ и $\eta = \{s_j\}_{j=0}^n$ суть разбиения $[a_1,b_1]$ и $[a_2,b_2]$ соответственно и I_{ij} — порожденные прямоугольники (6). Из определения W_2 следует, что

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathrm{md}_2(f_k,g_k,I_{ij}) \le W_2\big(f_k,g_k,I_a^b\big), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Взяв нижний предел при $k \to \infty$ и учтя поточечную сходимость f_k к f и g_k к g и свойство (3), найдем, что

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \mathrm{md}_2(f,g,I_{ij}) \le \liminf_{k\to\infty} W_2\big(f_k,g_k,I_a^b\big),$$

откуда $W_2\bigl(f,g,I_a^b\bigr) \le \liminf\limits_{k\to\infty} W_2\bigl(f_k,g_k,I_a^b\bigr)$. Принимая во внимание лемму 1(e), получим утверждение (c): следует воспользоваться неравенством

$$\liminf(\alpha_k+\beta_k) \ge \liminf \alpha_k + \liminf \beta_k$$

для действительных последовательностей $\{\alpha_k\}$ и $\{\beta_k\}$, где правая часть не представляет собой выражений вида $\mp\infty \pm \infty$. (Отметим, кроме того, что величина $W_2(\cdot,\cdot)$ обладает свойством аддитивности вида (8).) $\square$

Лемма 3. *Если* $(M,d,+)$ — (*полная*) *метрическая полугруппа* (*абстрактный выпуклый конус*), *то* $\bigl(\mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b;M\bigr),d_2,+\bigr)$ *также является* (*соответственно полной*) *метрической полугруппой* (*абстрактным выпуклым конусом*).

Доказательство. Пусть $f,g\in \mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b;M\bigr)$. Ясно, что если $f=g$, то $d_2(f,g)=0$, а если $d_2(f,g)=0$, то в силу леммы 2(a)

$$d(f(x),g(x)) = d(f(a),g(a)) = 0, \quad x\in I_a^b,\ x\ne a,$$

т. е. $f=g$. Симметричность d_2, неравенство треугольника для d_2 и инвариантность d_2 относительно сдвигов вытекают из соответствующих свойств метрики d.

Установим полноту. Пусть $\{f_k\}\subset \mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b;M\bigr)$ — последовательность Коши, т. е. $d_2(f_k,f_j)\to 0$ при $k,j\to\infty$. Тогда из леммы 2(a) находим, что $\{f_k(x)\}$ — последовательность Коши в M при всех $x\in I_a^b$, поэтому существует такое отображение $f: I_a^b\to M$, что $d(f_k(x),f(x))\to 0$ при $k\to\infty$ для всех $x\in I_a^b$. В силу леммы 2(c)

$$TW_d\bigl(f_k,f,I_a^b\bigr) \le \liminf_{j\to\infty} TW_d\bigl(f_k,f_j,I_a^b\bigr) \le \lim_{j\to\infty} d_2(f_k,f_j), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Поскольку $\{f_k\}$ — последовательность Коши в $\mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b;M\bigr)$, то

$$\limsup_{k\to\infty} TW_d\bigl(f_k,f,I_a^b\bigr) \le \lim_{k\to\infty}\lim_{j\to\infty} d_2(f_k,f_j) = 0,$$

откуда $d_2(f_k,f)\to 0$ при $k\to\infty$. Осталось заметить, что $f\in \mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b;M\bigr)$: по лемме 2(b) $\bigl\{TV_d\bigl(f_k,I_a^b\bigr)\bigr\}$ — последовательность Коши в $\mathbb{R}$, поэтому она ограничена и сходится, а в силу (9) для $TV_d(\cdot,\cdot)$ находим, что

$$TV_d\bigl(f,I_a^b\bigr) \le \lim_{k\to\infty} TV_d\bigl(f_k,I_a^b\bigr) < \infty. \qquad \square$$

Пусть (N,ρ) — метрическое пространство и $(M,d,+)$ — метрическая полугруппа (или абстрактный выпуклый конус). Как обычно, оператор $T:N\to M$ называем *липшицевым*, если конечна его (наименьшая) *константа Липшица*:

$$L(T) = \sup\{d(Tu,Tv)/\rho(u,v) \mid u,v\in N,\ u\ne v\},$$

а множество всех таких операторов обозначаем через $\mathrm{Lip}(N;M)$. Это множество замкнуто относительно поточечной операции сложения (умножения на число $\lambda\in\mathbb{R}^+$), ибо $L(T+S)\le L(T)+L(S)$ ($L(\lambda T)=\lambda L(T)$) для $T,S\in \mathrm{Lip}(N;M)$ в силу (2). Для фиксированного $u_0\in N$ инвариантная относительно сдвигов метрика d_L на $\mathrm{Lip}(N;M)$ определяется правилом (см., например, [16])

$$d_L(T,S) = d(Tu_0,Su_0) + d_\ell(T,S), \quad T,S\in \mathrm{Lip}(N;M), \tag{17}$$

где

$$d_\ell(T,S) = \sup\{d(Tu+Sv,Su+Tv)/\rho(u,v) \mid u,v\in N,\ u\ne v\}.$$

В следующей лемме даны свойства инвариантной относительно сдвигов полуметрики d_ℓ.

Лемма 4. *Для $T, S \in \mathrm{Lip}(N; M)$ имеют место соотношения:*

(a) $|d(Tu, Su) - d(Tv, Sv)| \leq d(Tu + Sv, Su + Tv) \leq d_\ell(T, S)\rho(u, v)$ *для* $u, v \in N$;

(b) $|L(T) - L(S)| \leq d_\ell(T, S) \leq L(T) + L(S)$;

(c) *если* $\{T_k, S_k\} \subset \mathrm{Lip}(N; M)$, $d(T_k u, Tu) \to 0$ *и* $d(S_k u, Su) \to 0$ *при* $k \to \infty$ *для всех* $u \in N$, *то* $d_\ell(T, S) \leq \liminf\limits_{k\to\infty} d_\ell(T_k, S_k)$.

Таким образом, $(\mathrm{Lip}(N; M), d_L, +)$ — метрическая полугруппа (абстрактный выпуклый конус), являющаяся полной, если метрическая полугруппа $(X, d, +)$ полная.

Пусть $(N, \rho, +)$ и $(M, d, +)$ — две метрические полугруппы. Оператор $T : N \to M$ называется *аддитивным*, если он удовлетворяет уравнению Коши: $T(u+v) = Tu+Tv$ для всех $u, v \in N$. Обозначим через $\mathrm{L}(N; M)$ множество всех липшицевых аддитивных операторов из N в M. Если дополнительно N и M содержат нули (обозначаемые одним символом 0) и $T \in \mathrm{L}(N; M)$, то $T(0) = 0$, ибо $T(0) = T(0 + 0) = T(0) + T(0)$ и $d(0, T(0)) = d(T(0), T(0) + T(0)) = 0$. В этом случае $d_L = d_\ell$ (см. (17) при $u_0 = 0$) является метрикой на $\mathrm{L}(N; M)$ и справедливы равенства $L(T) = d_L(T, 0) = |T|_{d_L}$.

Если $(N, \rho, +, \cdot)$ и $(M, d, +, \cdot)$ — два абстрактных выпуклых конуса, то всякий аддитивный непрерывный оператор $T : N \to M$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}^+$ и $u \in N$ обладает также свойством $T(\lambda u) = \lambda Tu$. Действительно, пусть $\{\lambda_k\}$ есть последовательность положительных рациональных чисел, сходящаяся к λ при $k \to \infty$. Из аддитивности T вытекает, что $T(\lambda_k u) = \lambda_k Tu$, а из непрерывности T — что $d\big(T(\lambda u), T(\lambda_k u)\big) \to 0$ при $k \to \infty$. В силу (4)

$$d(T(\lambda_k u), \lambda Tu) = d(\lambda_k Tu, \lambda Tu) = |\lambda_k - \lambda| d(Tu, 0),$$

а потому

$$d(T(\lambda u), \lambda Tu) \leq d(T(\lambda u), T(\lambda_k u)) + d(T(\lambda_k u), \lambda Tu) \to 0 \quad \text{при } k \to \infty.$$

§ 3. Липшицевы операторы суперпозиции. Необходимое условие

Центральным результатом этого раздела является теорема 1, дающая необходимое условие липшицевости оператора суперпозиции $\mathscr{H}$, который действует между абстрактными выпуклыми конусами $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)$. Для его формулировки нам потребуется понятие левой-левой регуляризации отображения из $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)$ и две вспомогательные леммы (леммы 5 и 6).

Если $(M, d, +)$ — полная метрическая полугруппа, то для отображения $f \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)$ определим его *левую-левую регуляризацию* $f^- : I_a^b \to M$ правилом [25]

$$f^-(x_1, x_2) = \begin{cases} \lim\limits_{(y_1,y_2)\to(x_1-0,x_2-0)} f(y_1, y_2), & \text{если } a_1 < x_1 \leq b_1 \text{ и } a_2 < x_2 \leq b_2, \\ \lim\limits_{(y_1,y_2)\to(x_1-0,a_2+0)} f(y_1, y_2), & \text{если } a_1 < x_1 \leq b_1 \text{ и } x_2 = a_2, \\ \lim\limits_{(y_1,y_2)\to(a_1+0,x_2-0)} f(y_1, y_2), & \text{если } x_1 = a_1 \text{ и } a_2 < x_2 \leq b_2, \\ \lim\limits_{(y_1,y_2)\to(a_1+0,a_2+0)} f(y_1, y_2), & \text{если } x_1 = a_1 \text{ и } x_2 = a_2. \end{cases}$$

Следует отметить, что условие $(y_1, y_2) \to (x_1 - 0, x_2 - 0)$ (короткая запись: $y \to x - 0$) понимается как $(y_1, y_2) \in I_a^b$, $y_1 < x_1$, $y_2 < x_2$ и $(y_1, y_2) \to (x_1, x_2)$ в

$\mathbb{R}^2$, и аналогично для других трех пределов, а сами пределы вычисляются в метрическом пространстве M. Существование всех этих пределов будет доказано ниже в лемме 5.

Отображение $f : I_a^b \to M$ называется *непрерывным слева-слева*, если

$$\lim_{(y_1,y_2)\to(x_1-0,x_2-0)} f(y_1,y_2) = f(x_1,x_2) \quad \text{для всех } x_1 \in (a_1,b_1] \text{ и } x_2 \in (a_2,b_2].$$

Обозначим через $\mathrm{BV}_2^-\big(I_a^b;M\big)$ подпространство в $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b;M\big)$ тех отображений, которые непрерывны слева-слева на $(a_1,b_1]\times(a_2,b_2]$.

Лемма 5. *Если $(M,d,+)$ — полная метрическая полугруппа и $f \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b;M\big)$, то $f^- \in \mathrm{BV}_2^-\big(I_a^b;M\big)$, причем*

$$V_2\big(f^-,I_a^b\big) \le V_2\big(f,I_a^b\big) \text{ и } TV_d\big(f^-,I_a^b\big) \le 3TV_d\big(f,I_a^b\big).$$

Доказательство. 1. Покажем, что отображение f^- определено корректно. Используя свойство (13), из [43, § III.5.3] получаем существование левой-левой регуляризации $\nu_f^- : I_a^b \to \mathbb{R}$ для функции ν_f. Установим существование предела $f^-(x) \in M$, например, в точке $x = (x_1,x_2)$, где $x_i \in (a_i,b_i]$, $i = 1,2$ (оставшиеся три возможности рассматриваются аналогично). Пусть $y',y'' \in I_a^b$ и $y' < x$, $y'' < x$. Если $y' \le y''$ или $y'' \le y'$, то в силу (12)

$$d(f(y'),f(y'')) \le |\nu_f(y') - \nu_f(y'')| \to |\nu_f^-(x) - \nu_f^-(x)| = 0 \quad \text{при } y',y'' \to x.$$

Если же $y_1'' < y_1'$ и $y_2' < y_2''$, то, снова пользуясь (12), получим

$$\begin{aligned} d(f(y'),f(y'')) &\le d(f(y_1',y_2'),f(y_1',y_2'')) + d(f(y_1',y_2''),f(y_1'',y_2'')) \\ &\le \nu_f(y_1',y_2'') - \nu_f(y_1',y_2') + \nu_f(y_1',y_2'') - \nu_f(y_1'',y_2'') \\ &\qquad \to \nu_f^-(x) - \nu_f^-(x) + \nu_f^-(x) - \nu_f^-(x) = 0 \quad \text{при } y',y'' \to x. \end{aligned}$$

Подобным же образом разбирается случай, когда $y_1' < y_1''$ и $y_2'' < y_2'$. Таким образом, $d(f(y'),f(y'')) \to 0$ при $y',y'' \to x$, и остается привлечь критерий Коши существования предела $f(y)$ при $y \to x-0$ в полном пространстве M.

2. Покажем, что f^- непрерывно слева во всех точках $x \in I_a^b$, $a < x \le b$. В силу [43, § III.5.4] все точки разрыва вполне монотонной функции ν_f лежат на не более чем счетном множестве линий, параллельных координатным осям. Тогда из оценки (12) вытекает, что этим же свойством обладают точки разрыва отображения f. Поэтому найдется последовательность $\{y_k\} \subset I_a^b$ точек непрерывности f таких, что $y_k < x$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $y_k \to x$ в $\mathbb{R}^2$ при $k \to \infty$. Отсюда следует, что

$$\lim_{y\to x-0} f^-(y) = \lim_{k\to\infty} f^-(y_k) = \lim_{k\to\infty} f(y_k) = \lim_{y\to x-0} f(y) = f^-(x) \quad \text{в } M.$$

3. Докажем, что f^- лежит в $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b;M\big)$. Пусть $a_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b_1$, $a_2 = s_0 < s_1 < \dots < s_{n-1} < s_n = b_2$ и $\varepsilon > 0$ задано. По определению f^- существуют точки $t_i' \in (t_{i-1},t_i)$, $i = 1,\dots,m$, $s_j' \in (s_{j-1},s_j)$, $j = 1,\dots,n$, $t_0' \in (a_1,t_1')$ и $s_0' \in (a_2,s_1')$ такие, что

$$d(f^-(t_i,s_j),f(t_i',s_j')) \le \varepsilon/(4mn), \quad i = 0,1,\dots,m,\ j = 0,1,\dots,n.$$

Тогда, применяя неравенство треугольника и (2), с учетом (6) получим

$$\begin{aligned}\mathrm{md}(f^-, I_{ij}) &= d(f^-(t_{i-1}, s_{j-1}) + f^-(t_i, s_j), f^-(t_{i-1}, s_j) + f^-(t_i, s_{j-1}))\\ &\le d(f(t'_{i-1}, s'_{j-1}) + f(t'_i, s'_j), f(t'_{i-1}, s'_j) + f(t'_i, s'_{j-1}))\\ &\quad + d(f^-(t_{i-1}, s_{j-1}), f(t'_{i-1}, s'_{j-1})) + d(f^-(t_i, s_j), f(t'_i, s'_j))\\ &+ d(f^-(t_{i-1}, s_j), f(t'_{i-1}, s'_j)) + d(f^-(t_i, s_{j-1}), f(t'_i, s'_{j-1})) \le \mathrm{md}(f, I'_{ij}) + \varepsilon/(mn),\end{aligned}$$

где $I'_{ij} = [t'_{i-1}, t'_i] \times [s'_{j-1}, s'_j]$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Суммируя по этим i и j, беря супремум по всем разбиениям I_a^b и учитывая произвольность $\varepsilon > 0$, найдем, что $V_2\bigl(f^-, I_a^b\bigr) \le V_2\bigl(f, I_a^b\bigr)$.

Чтобы показать, что $V_{a_1}^{b_1}(f^-(\cdot, a_2)) < \infty$, возьмем $a_1 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = b_1$ и $\varepsilon > 0$. По определению f^- найдем $t'_i \in (t_{i-1}, t_i)$, $i = 1, \dots, m$, $t'_0 \in (a_1, t'_1)$ и $s_0 \in (a_2, b_2)$ такие, что

$$d(f^-(t_i, a_2), f(t'_i, s_0)) \le \varepsilon/(2m), \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

В силу неравенства треугольника для $i = 1, \dots, m$ имеем

$$\begin{aligned}d(f^-(t_i, a_2), f^-(t_{i-1}, a_2)) &\le d(f(t'_i, s_0), f(t'_{i-1}, s_0)) + d(f^-(t_i, a_2), f(t'_i, s_0))\\ &+ d(f^-(t_{i-1}, a_2), f(t'_{i-1}, s_0)) \le d(f(t'_i, s_0), f(t'_{i-1}, s_0)) + (\varepsilon/m).\end{aligned}$$

Суммируя по i и применяя неравенство (10), найдем, что

$$\sum_{i=1}^m d(f^-(t_i, a_2), f^-(t_{i-1}, a_2)) \le V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot, s_0)) + \varepsilon \le V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot, a_2)) + V_2\bigl(f, I_{a_1, a_2}^{b_1, s_0}\bigr) + \varepsilon,$$

откуда $V_{a_1}^{b_1}(f^-(\cdot, a_2)) \le V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot, a_2)) + V_2\bigl(f, I_a^b\bigr)$. С учетом (11) следующая оценка получается аналогично: $V_{a_2}^{b_2}(f^-(a_1, \cdot)) \le V_{a_2}^{b_2}(f(a_1, \cdot)) + V_2\bigl(f, I_a^b\bigr)$. $\square$

Частные случаи следующей леммы для операторов T с компактными выпуклыми значениями устанавливались также в [46, теорема 2; 47, теорема 5.6].

Лемма 6 [17, теорема 1 и следствие 2]. *Пусть $(N, +)$ — коммутативная полугруппа с нулем и делением на 2 и $(M, d, +, \cdot)$ — полный абстрактный выпуклый конус. Тогда отображение $T : N \to M$ удовлетворяет функциональному уравнению Иенсена:*

$$2T\left(\frac{u+v}{2}\right) = Tu + Tv \quad \text{в } M \text{ для всех } u, v \in N,$$

тогда и только тогда, когда существуют единственное аддитивное отображение $A : N \to M$ и постоянная $h_0 \in M$ такие, что $Tu = Au + h_0$ для всех $u \in N$.

Основным результатом настоящего раздела является следующая

Теорема 1. *Пусть $(N, \rho, +, \cdot)$ и $(M, d, +, \cdot)$ — два абстрактных выпуклых конуса, причем M полный, и отображение $h : I_a^b \times N \to M$ является генератором оператора суперпозиции $\mathscr{H}$ при $I = I_a^b$. Если $\mathscr{H} \in \mathrm{Lip}\bigl(\mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b; N\bigr); \mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b; M\bigr)\bigr)$, то $h(x, \cdot) \in \mathrm{Lip}(N; M)$ для всех $x \in I_a^b$ и найдутся два отображения $f : I_a^b \to \mathrm{L}(N; M)$ и $h_0 : I_a^b \to M$ такие, что $f(\cdot)u$, $h_0 \in \mathrm{BV}_2^-\bigl(I_a^b; M\bigr)$ при всех $u \in N$ и имеет место представление $h^-(x, u) = f(x)u + h_0(x)$ для всех $x \in I_a^b$ и $u \in N$, где $f(\cdot)u$ действует по правилу $x \mapsto f(x)u$, а $h^-(\cdot, u)$ есть левая-левая регуляризация отображения $h(\cdot, u)$ при каждом фиксированном $u \in N$.*

Доказательство. Из условия липшицевости оператора $\mathscr{H}$ и определения 5 метрик ρ_2 и d_2 на $\mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b; N\bigr)$ и $\mathrm{BV}_2\bigl(I_a^b; M\bigr)$ соответственно вытекает неравенство $d_2(\mathscr{H}g_1,\mathscr{H}g_2)\le L(\mathscr{H})\rho_2(g_1,g_2)$ для всех $g_1,g_2\in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b;N\big)$, которое в более развернутом виде выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}d((\mathscr{H}g_1)(a),(\mathscr{H}g_2)(a))+W_{a_1}^{b_1}((\mathscr{H}g_1)(\cdot,a_2),(\mathscr{H}g_2)(\cdot,a_2))\\ +W_{a_2}^{b_2}((\mathscr{H}g_1)(a_1,\cdot),(\mathscr{H}g_2)(a_1,\cdot))+W_2\big(\mathscr{H}g_1,\mathscr{H}g_2,I_a^b\big)\\ \le L(\mathscr{H})\big(\rho(g_1(a),g_2(a))+W_{a_1}^{b_1}(g_1(\cdot,a_2),g_2(\cdot,a_2))\\ +W_{a_2}^{b_2}(g_1(a_1,\cdot),g_2(a_1,\cdot))+W_2\big(g_1,g_2,I_a^b\big)\big).\end{aligned}\tag{18}$$

1. Вначале покажем, что $h(x,\cdot)\in \mathrm{Lip}(N;M)$ для всех $x\in I_a^b$. (Отметим, что рассуждения в этом шаге пригодны для любой метрической полугруппы M.) Для точки $x=(x_1,x_2)\in I_a^b$ возможны следующие четыре случая:

(i) $a_1<x_1\le b_1$ и $a_2<x_2\le b_2$;
(ii) $a_1<x_1\le b_1$ и $x_2=a_2$;
(iii) $x_1=a_1$ и $a_2<x_2\le b_2$;
(iv) $x_1=a_1$ и $x_2=a_2$.

Определим функции $\zeta_{\alpha,\beta}\in \mathrm{Lip}(\mathbb{R};[0,1])$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$, правилом

$$\zeta_{\alpha,\beta}(t)=\begin{cases}0, & \text{если } t\le\alpha,\\ (t-\alpha)/(\beta-\alpha), & \text{если } \alpha\le t\le\beta,\\ 1, & \text{если } t\ge\beta.\end{cases}\tag{19}$$

Пусть $u_1,\ u_2\in N$ — произвольные элементы.

Случай (i). Определим два отображения $g_1,\ g_2\in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b;N\big)$ правилами

$$g_k(y_1,y_2)=\frac12(\zeta_{a_1,x_1}(y_1)+\zeta_{a_2,x_2}(y_2))u_k,\quad y_k\in[a_k,b_k],\ k=1,2,$$

и заметим, что $g_k(a)=0$, $k=1,\ 2$, в силу (4)

$$W_{a_1}^{b_1}(g_1(\cdot,a_2),g_2(\cdot,a_2))=\frac12V_{a_1}^{b_1}(\zeta_{a_1,x_1})\rho(u_1,u_2)=\rho(u_1,u_2)/2$$

и аналогично $W_{a_2}^{b_2}(g_1(a_1,\cdot),g_2(a_1,\cdot))=\rho(u_1,u_2)/2$, а также $W_2\big(g_1,g_2,I_a^b\big)=0$, поэтому в правой части (18) $\rho_2(g_1,g_2)=\rho(u_1,u_2)$. Принимая во внимание, что

$$(\mathscr{H}g_k)(a_1,a_2)=h(a_1,a_2,g_k(a_1,a_2))=h(a_1,a_2,0),\quad k=1,2,$$

привлекая неравенство (1) и учитывая инвариантность d относительно сдвигов, ввиду (18) получим, что

$$\begin{aligned}d(h(x,u_1),h(x,u_2))&=d((\mathscr{H}g_1)(x_1,x_2),(\mathscr{H}g_2)(x_1,x_2))\\ &\le d((\mathscr{H}g_1)(x_1,a_2)+(\mathscr{H}g_2)(a_1,a_2),(\mathscr{H}g_2)(x_1,a_2)+(\mathscr{H}g_1)(a_1,a_2))\\ &+d((\mathscr{H}g_1)(a_1,x_2)+(\mathscr{H}g_2)(a_1,a_2),(\mathscr{H}g_2)(a_1,x_2)+(\mathscr{H}g_1)(a_1,a_2))\\ &+d((\mathscr{H}g_1)(a_1,a_2)+(\mathscr{H}g_1)(x_1,x_2)+(\mathscr{H}g_2)(a_1,x_2)+(\mathscr{H}g_2)(x_1,a_2),\\ &(\mathscr{H}g_2)(a_1,a_2)+(\mathscr{H}g_2)(x_1,x_2)+(\mathscr{H}g_1)(a_1,x_2)+(\mathscr{H}g_1)(x_1,a_2))\\ &\le W_{a_1}^{b_1}((\mathscr{H}g_1)(\cdot,a_2),(\mathscr{H}g_2)(\cdot,a_2))+W_{a_2}^{b_2}((\mathscr{H}g_1)(a_1,\cdot),(\mathscr{H}g_2)(a_1,\cdot))\\ &+W_2\big(\mathscr{H}g_1,\mathscr{H}g_2,I_a^b\big)=d_2(\mathscr{H}g_1,\mathscr{H}g_2)\le L(\mathscr{H})\rho_2(g_1,g_2)=L(\mathscr{H})\rho(u_1,u_2),\end{aligned}$$

и приходим к нужному утверждению в этом случае.

Случаи (ii), (iii). В случае (ii) положим $g_k(y_1,y_2)=\zeta_{a_1,x_1}(y_1)u_k$ для всех $y_k\in[a_k,b_k]$ и $k=1,2$. Тогда $g_k(a)=0$, $k=1,2$, $W_{a_1}^{b_1}(g_1(\cdot,a_2),g_2(\cdot,a_2))=$

$\rho(u_1,u_2)$, $W_{a_2}^{b_2}(g_1(a_1,\cdot),g_2(a_1,\cdot)) = 0$ и $W_2\big(g_1,g_2,I_a^b\big) = 0$, поэтому $\rho_2(g_1,g_2) = \rho(u_1,u_2)$. Поскольку $g_k(x_1,a_2) = u_k$, $k = 1,2$, из (18) находим, что

$$\begin{aligned} d(h(x_1,a_2,u_1),h(x_1,a_2,u_2)) &= d((\mathscr{H}g_1)(x_1,a_2),(\mathscr{H}g_2)(x_1,a_2)) \\ &= d((\mathscr{H}g_1)(x_1,a_2)+(\mathscr{H}g_2)(a_1,a_2),(\mathscr{H}g_2)(x_1,a_2)+(\mathscr{H}g_1)(a_1,a_2)) \\ &\le W_{a_1}^{b_1}((\mathscr{H}g_1)(\cdot,a_2),(\mathscr{H}g_2)(\cdot,a_2)) = d_2(\mathscr{H}g_1,\mathscr{H}g_2) \le L(\mathscr{H})\rho(u_1,u_2). \end{aligned}$$

В случае (iii) полагаем $g_k(y_1,y_2) = \zeta_{a_2,x_2}(y_2)u_k$ для всех $y_k \in [a_k,b_k]$ и $k = 1,2$ и рассуждаем аналогично.

Случай (iv). Полагая

$$g_k(y_1,y_2) = \frac{1}{2}(2-\zeta_{a_1,b_1}(y_1)-\zeta_{a_2,b_2}(y_2))u_k, \quad y_k \in [a_k,b_k],\ k = 1,2,$$

имеем $g_k(a) = u_k$, $k = 1,2$,

$$W_{a_1}^{b_1}(g_1(\cdot,a_2),g_2(\cdot,a_2)) = W_{a_2}^{b_2}(g_1(a_1,\cdot),g_2(a_1,\cdot)) = \rho(u_1,u_2)/2$$

и $W_2\big(g_1,g_2,I_a^b\big) = 0$, а потому $\rho_2(g_1,g_2) = 2\rho(u_1,u_2)$. Принимая во внимание, что $(\mathscr{H}g_k)(b_1,b_2) = h(b_1,b_2,0)$, $k = 1,2$, в силу (18) получим

$$\begin{aligned} d(h(a_1,a_2,u_1),h(a_1,a_2,u_2)) &= d((\mathscr{H}g_1)(a_1,a_2),(\mathscr{H}g_2)(a_1,a_2)) \\ &\le d((\mathscr{H}g_1)(b_1,a_2)+(\mathscr{H}g_2)(a_1,a_2),(\mathscr{H}g_2)(b_1,a_2)+(\mathscr{H}g_1)(a_1,a_2)) \\ &+ d((\mathscr{H}g_1)(a_1,b_2)+(\mathscr{H}g_2)(a_1,a_2),(\mathscr{H}g_2)(a_1,b_2)+(\mathscr{H}g_1)(a_1,a_2)) \\ &+ d((\mathscr{H}g_1)(a_1,a_2)+(\mathscr{H}g_1)(b_1,b_2)+(\mathscr{H}g_2)(a_1,b_2)+(\mathscr{H}g_2)(b_1,a_2), \\ &\quad (\mathscr{H}g_2)(a_1,a_2)+(\mathscr{H}g_2)(b_1,b_2)+(\mathscr{H}g_1)(a_1,b_2)+(\mathscr{H}g_1)(b_1,a_2)) \\ &\le W_{a_1}^{b_1}((\mathscr{H}g_1)(\cdot,a_2),(\mathscr{H}g_2)(\cdot,a_2)) + W_{a_2}^{b_2}((\mathscr{H}g_1)(a_1,\cdot),(\mathscr{H}g_2)(a_1,\cdot)) \\ &\qquad + W_2\big(\mathscr{H}g_1,\mathscr{H}g_2,I_a^b\big) \le d_2(\mathscr{H}g_1,\mathscr{H}g_2) \le 2L(\mathscr{H})\rho(u_1,u_2), \end{aligned}$$

что завершает доказательство первого утверждения.

2. Установим теперь представление для $h^-(x,u)$. Пусть вначале $x = (x_1,x_2) \in I_a^b$, где $x_1 \in (a_1,b_1]$ и $x_2 \in (a_2,b_2]$. Пусть также $m \in \mathbb{N}$, $a_1 < \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_m < \beta_m < x_1$ и $a_2 < \bar\alpha_1 < \bar\beta_1 < \bar\alpha_2 < \bar\beta_2 < \dots < \bar\alpha_m < \bar\beta_m < x_2$. Из неравенства (18) и определения 5 вытекает, в частности, что

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m d((\mathscr{H}g_1)(\beta_i,a_2)+(\mathscr{H}g_2)(\alpha_i,a_2),(\mathscr{H}g_2)(\beta_i,a_2)+(\mathscr{H}g_1)(\alpha_i,a_2)) \\ + \sum_{i=1}^m d((\mathscr{H}g_1)(a_1,\bar\beta_i)+(\mathscr{H}g_2)(a_1,\bar\alpha_i),(\mathscr{H}g_2)(a_1,\bar\beta_i)+(\mathscr{H}g_1)(a_1,\bar\alpha_i)) \\ + W_2\big(\mathscr{H}g_1,\mathscr{H}g_2,I_a^b\big) \le L(\mathscr{H})\rho_2(g_1,g_2). \end{aligned} \tag{20}$$

Пусть $\zeta_m : [a_1,b_1] \to [0,1]$ и $\bar\zeta_m : [a_2,b_2] \to [0,1]$ — две непрерывные по Липшицу функции, определенные следующим образом:

$$\zeta_m(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_1 \le t \le \alpha_1, \\ \zeta_{\alpha_i,\beta_i}(t), & \text{если } \alpha_i \le t \le \beta_i,\ i = 1,\dots,m, \\ 1-\zeta_{\beta_i,\alpha_{i+1}}(t), & \text{если } \beta_i \le t \le \alpha_{i+1},\ i = 1,\dots,m-1, \\ 1, & \text{если } \beta_m \le t \le b_1, \end{cases} \tag{21}$$

$$\bar{\zeta}_m(s) = \begin{cases} 0, & \text{если } a_2 \le s \le \bar{\alpha}_1, \\ \zeta_{\bar{\alpha}_i,\bar{\beta}_i}(s), & \text{если } \bar{\alpha}_i \le s \le \bar{\beta}_i,\ i = 1,\dots,m, \\ 1 - \zeta_{\bar{\beta}_i,\bar{\alpha}_{i+1}}(s), & \text{если } \bar{\beta}_i \le s \le \bar{\alpha}_{i+1},\ i = 1,\dots,m-1, \\ 1, & \text{если } \bar{\beta}_m \le s \le b_2, \end{cases}$$

где функции $\zeta_{\alpha,\beta}$ определены в (19). Для произвольных $u_1, u_2 \in N$, $y_1 \in [a_1, b_1]$, $y_2 \in [a_2, b_2]$ и $k = 1, 2$ положим

$$g_k(y_1, y_2) = \frac{1}{4}(\zeta_m(y_1) + \bar{\zeta}_m(y_2))u_1 + \frac{1}{4}(2 - \zeta_m(y_1) - \bar{\zeta}_m(y_2))u_2 + \frac{1}{2}u_k.$$

Поскольку $\rho(g_1(y), g_2(y)) = \rho(u_1, u_2)/2$ для всех $y \in I_a^b$, то $\rho_2(g_1, g_2) = \rho(u_1, u_2)/2$. Для всех $i = 1, \dots, m$ имеет место неравенство

$$\begin{aligned} &d((\mathscr{H}g_1)(\beta_i, \bar{\beta}_i) + (\mathscr{H}g_2)(\alpha_i, \bar{\alpha}_i), (\mathscr{H}g_2)(\beta_i, \bar{\beta}_i) + (\mathscr{H}g_1)(\alpha_i, \bar{\alpha}_i)) \\ &\quad \le d((\mathscr{H}g_1)(\beta_i, a_2) + (\mathscr{H}g_2)(\alpha_i, a_2), (\mathscr{H}g_2)(\beta_i, a_2) + (\mathscr{H}g_1)(\alpha_i, a_2)) \\ &\quad + d((\mathscr{H}g_1)(a_1, \bar{\beta}_i) + (\mathscr{H}g_2)(a_1, \bar{\alpha}_i), (\mathscr{H}g_2)(a_1, \bar{\beta}_i) + (\mathscr{H}g_1)(a_1, \bar{\alpha}_i)) \\ &\quad + d((\mathscr{H}g_1)(\alpha_i, a_2) + (\mathscr{H}g_1)(\beta_i, \bar{\beta}_i) + (\mathscr{H}g_2)(\alpha_i, \bar{\beta}_i) + (\mathscr{H}g_2)(\beta_i, a_2), \\ &\qquad (\mathscr{H}g_2)(\alpha_i, a_2) + (\mathscr{H}g_2)(\beta_i, \bar{\beta}_i) + (\mathscr{H}g_1)(\alpha_i, \bar{\beta}_i) + (\mathscr{H}g_1)(\beta_i, a_2)) \\ &\quad + d((\mathscr{H}g_1)(a_1, \bar{\alpha}_i) + (\mathscr{H}g_1)(\alpha_i, \bar{\beta}_i) + (\mathscr{H}g_2)(a_1, \bar{\beta}_i) + (\mathscr{H}g_2)(\alpha_i, \bar{\alpha}_i), \\ &\qquad (\mathscr{H}g_2)(a_1, \bar{\alpha}_i) + (\mathscr{H}g_2)(\alpha_i, \bar{\beta}_i) + (\mathscr{H}g_1)(a_1, \bar{\beta}_i) + (\mathscr{H}g_1)(\alpha_i, \bar{\alpha}_i)), \end{aligned}$$

поэтому, суммируя по $i = 1, \dots, m$, в силу (20) найдем, что

$$\sum_{i=1}^{m} d((\mathscr{H}g_1)(\beta_i, \bar{\beta}_i) + (\mathscr{H}g_2)(\alpha_i, \bar{\alpha}_i), (\mathscr{H}g_2)(\beta_i, \bar{\beta}_i) + (\mathscr{H}g_1)(\alpha_i, \bar{\alpha}_i)) \le d_2(\mathscr{H}g_1, \mathscr{H}g_2) \le L(\mathscr{H})\rho(u_1, u_2)/2.$$

Так как $g_1(\beta_i, \bar{\beta}_i) = u_1$, $g_2(\beta_i, \bar{\beta}_i) = (u_1 + u_2)/2$, $g_1(\alpha_i, \bar{\alpha}_i) = (u_1 + u_2)/2$ и $g_2(\alpha_i, \bar{\alpha}_i) = u_2$, последнее неравенство можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{m} d\left(h(\beta_i, \bar{\beta}_i, u_1) + h(\alpha_i, \bar{\alpha}_i, u_2), h\left(\beta_i, \bar{\beta}_i, \frac{u_1 + u_2}{2}\right) + h\left(\alpha_i, \bar{\alpha}_i, \frac{u_1 + u_2}{2}\right)\right) \le L(\mathscr{H})\frac{\rho(u_1, u_2)}{2}. \quad (22)$$

Учитывая, что оператор $\mathscr{H}$ отображает $\mathrm{BV}_2(I_a^b; N)$ в $\mathrm{BV}_2(I_a^b; M)$ и что постоянные отображения двух переменных лежат в $\mathrm{BV}_2(I_a^b; N)$, найдем, что $h(\cdot, u) = \mathscr{H}(u) \in \mathrm{BV}_2(I_a^b; M)$ для всех $u \in N$. Тогда по лемме 5 левая-левая регуляризация по первым двум переменным $h^-(\cdot, u)$ принадлежит $\mathrm{BV}_2^-(I_a^b; M)$ для всех $u \in N$. Переходя к пределу при $(\alpha_1, \bar{\alpha}_1) \to (x_1 - 0, x_2 - 0)$ в неравенстве (22) и принимая во внимание полноту M, определение левой-левой регуляризации $h^-(\cdot, u)$ отображения $x \mapsto h(x, u)$ и непрерывность операции сложения $+$ в M, получим

$$d\left(h^-(x_1, x_2, u_1) + h^-(x_1, x_2, u_2), h^-\left(x_1, x_2, \frac{u_1 + u_2}{2}\right) + h^-\left(x_1, x_2, \frac{u_1 + u_2}{2}\right)\right) \le L(\mathscr{H})\frac{\rho(u_1, u_2)}{2m}.$$

Отсюда при $m \to \infty$ вытекает справедливое для всех $u_1, u_2 \in N$ равенство

$$d\left(h^-(x,u_1)+h^-(x,u_2), h^-\left(x,\frac{u_1+u_2}{2}\right)+h^-\left(x,\frac{u_1+u_2}{2}\right)\right)=0. \qquad (23)$$

Так как d — метрика на M и M — выпуклый конус, отсюда следует, что

$$h^-(x,u_1)+h^-(x,u_2)=h^-\left(x,\frac{u_1+u_2}{2}\right)+h^-\left(x,\frac{u_1+u_2}{2}\right)=2h^-\left(x,\frac{u_1+u_2}{2}\right).$$

Таким образом, оператор $h^-(x,\cdot): N \to M$ удовлетворяет следующему функциональному уравнению Иенсена:

$$2h^-\left(x,\frac{u_1+u_2}{2}\right)=h^-(x,u_1)+h^-(x,u_2), \quad u_1,u_2 \in N. \qquad (24)$$

Пусть теперь $a_1 < x_1 \le b_1$ и $x_2 = a_2$. Если $m \in \mathbb{N}$, $a_1 < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_m < \beta_m < x_1$ и $a_2 < \bar\alpha_1 < \bar\beta_1 < \dots < \bar\alpha_m < \bar\beta_m < b_2$, то приведенные выше рассуждения дают оценку (22). Переходя в ней к пределу при $(\alpha_1, \bar\beta_m) \to (x_1 - 0, a_2 + 0)$, получим равенства (23) и, значит, (24). Аналогично рассматриваются случаи, когда $x_1 = a_1$ и $a_2 < x_2 \le b_2$ или $x_1 = a_1$ и $x_2 = a_2$.

Следовательно, уравнение Иенсена (24) имеет место для всех $x \in I_a^b$.

По лемме 6 для любого $x \in I_a^b$ найдутся аддитивный оператор $f(x)(\cdot): N \to M$ и постоянная $h_0(x) \in M$ такие, что

$$h^-(x,u) = f(x)u + h_0(x), \quad u \in N. \qquad (25)$$

Поскольку $f(x)(0)=0$, из (25) вытекает, что $h^-(x,0)=h_0(x)$ для всех $x \in I_a^b$, но, как отмечено ранее, $h(\cdot,0) \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)$, поэтому благодаря лемме 5 находим, что $h_0 = h^-(\cdot,0) \in \mathrm{BV}_2^-\big(I_a^b; M\big)$. В шаге 1 было показано, что

$$d(h(x,u_1),h(x,u_2)) \le 2L(\mathscr{H})\rho(u_1,u_2), \quad x \in I_a^b,\ u_1,u_2 \in N,$$

поэтому взяв левую-левую регуляризацию, найдем, что это же неравенство справедливо для h^- вместо h. В силу (25) получаем, что

$$\begin{aligned} d(f(x)u_1, f(x)u_2) &= d(f(x)u_1 + h_0(x), f(x)u_2 + h_0(x)) \\ &= d(h^-(x,u_1),h^-(x,u_2)) \le 2L(\mathscr{H})\rho(u_1,u_2), \quad u_1,u_2 \in N, \end{aligned}$$

так что $f(x) \in \mathrm{L}(N;M)$, а значит, $f: I_a^b \to \mathrm{L}(N;M)$.

Осталось показать, что если $u \in N$, то $f(\cdot)u \in \mathrm{BV}_2^-\big(I_a^b; M\big)$. Поскольку отображение $h(\cdot,u)$ лежит в $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b; M\big)$, по лемме 5 отображения h_0 и $h^-(\cdot,u)$ лежат в $\mathrm{BV}_2^-\big(I_a^b; M\big)$. В приводимых ниже неравенствах несколько раз используются (1) и (25). Если $x,y \in I_a^b$ и $x \le y$, то

$$\begin{aligned} \mathrm{md}(f(\cdot)u, I_x^y) &= d(f(x_1,x_2)u + f(y_1,y_2)u, f(x_1,y_2)u + f(y_1,x_2)u) \\ &\le d(h^-(x_1,x_2,u)+h^-(y_1,y_2,u), h^-(x_1,y_2,u)+h^-(y_1,x_2,u)) \\ &+ d(h_0(x_1,x_2)+h_0(y_1,y_2), h_0(x_1,y_2)+h_0(y_1,x_2)) = \mathrm{md}\big(h^-(\cdot,u), I_x^y\big) + \mathrm{md}\big(h_0, I_x^y\big), \end{aligned}$$

откуда вытекает, что

$$V_2\big(f(\cdot)u, I_a^b\big) \le V_2\big(h^-(\cdot,u), I_a^b\big) + V_2\big(h_0, I_a^b\big).$$

Аналогично если $t,s \in [a_1,b_1]$, то

$$d(f(t,a_2)u, f(s,a_2)u) \le d(h^-(t,a_2,u), h^-(s,a_2,u)) + d(h_0(t,a_2), h_0(s,a_2)),$$

откуда
$$V_{a_1}^{b_1}(f(\cdot,a_2)u) \le V_{a_1}^{b_1}(h^-(\cdot,a_2,u)) + V_{a_1}^{b_1}(h_0(\cdot,a_2)),$$
и подобная оценка имеет место для $V_{a_2}^{b_2}(f(a_1,\cdot)u)$. Таким образом,
$$TV_d\big(f(\cdot)u, I_a^b\big) \le TV_d\big(h^-(\cdot,u), I_a^b\big) + TV_d\big(h_0, I_a^b\big).$$

Непрерывность слева-слева отображения $f(\cdot)u$ следует из того, что для любой точки $x=(x_1,x_2)$, где $x_k \in (a_k,b_k]$, $k=1,2$, при $I_a^b \ni y \to x-0$ имеем
$$d(f(y)u, f(x)u) \le d(h^-(y,u), h^-(x,u)) + d(h_0(y), h_0(x)) \to 0.$$

Теорема 1 полностью доказана. $\square$

В завершение этого параграфа и первой части работы приведем некоторые замечания и дополнения к основному результату.

Замечание 1. Аналогичное теореме 1 утверждение справедливо для правой-правой, правой-левой или левой-правой регуляризаций отображения $h(\cdot,u)$, $u\in N$. Однако в представлении $h^-(x,u) = f(x)u + h_0(x)$ нельзя, вообще говоря, заменить h^- на h: соответствующий пример построен в работе [25, теорема 3].

Замечание 2. Пусть $I_k = [a_k,b_k]$ и $\mathrm{P}_k(I_k;N) \subset N^{I_k}$ — семейство отображений, обладающих свойством: для всех $u_1,u_2 \in N$, $m\in\mathbb{N}$ и $a_k < \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \alpha_m < \beta_m < b_k$ отображение $I_k \ni t \mapsto \zeta_m(t)u_1 + u_2 \in N$ принадлежит $\mathrm{P}_k(I_k;N)$, где $k=1,2$ и функция ζ_m имеет вид (21). Положим $\mathrm{P}\big(I_a^b;N\big) = \mathrm{P}_1(I_1;N) + \mathrm{P}_2(I_2;N)$ и снабдим это множество метрикой ρ_2 из $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b;N\big)$. Тогда заключение теоремы 1 остается справедливым, если предположение о липшицевости оператора $\mathscr{H}$ заменить условием $\mathscr{H} \in \mathrm{Lip}\big(\mathrm{P}\big(I_a^b;N\big);\mathrm{BV}_2\big(I_a^b;M\big)\big)$.

Замечание 3. Пусть выполнены предположения теоремы 1. Обозначим через $\mathrm{B}(N;M)$ множество всех ограниченных аддитивных операторов из N в M. Из доказательства теоремы 1 видно, что справедлив следующий результат: если оператор суперпозиции $\mathscr{H}$ действует из $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b;N\big)$ в $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b;M\big)$ и (*глобально*) *ограничен*, т. е. найдется постоянная $C\ge 0$ такая, что $d_2(\mathscr{H}g_1,\mathscr{H}g_2) \le C$ для всех $g_1,g_2 \in \mathrm{BV}_2\big(I_a^b;N\big)$ (см. также замечание 2), то $h(x,\cdot)\in \mathrm{B}(N;M)$ для всех $x\in I_a^b$ и существует отображение $h_0 \in \mathrm{BV}_2^-\big(I_a^b;M\big)$ такое, что $h^-(x,u) = h_0(x)$ для всех $x\in I_a^b$ и $u\in N$. Действительно, найдутся отображения $f: I_a^b \to \mathrm{B}(N;M)$ и $h_0 \in \mathrm{BV}_2^-\big(I_a^b;M\big)$, для которых $h^-(x,u) = f(x)u + h_0(x)$, $x\in I_a^b$, $u\in N$. Поскольку $d(h(x,u_1),h(x,u_2)) \le C$ при $x\in I_a^b$ и $u_1,u_2\in N$, то $d(f(x)u_1, f(x)u_2) = d(h^-(x,u_1),h^-(x,u_2)) \le C$. Следовательно, при любых рациональном $\lambda>0$ и $u\in N$ имеем
$$\lambda d(f(x)u,0) = d(\lambda f(x)u,0) = d(f(x)(\lambda u), f(x)(0)) \le C,$$
так что $f(x)u = 0$ и, значит, $f(x)=0$ для всех $x\in I_a^b$.

Замечание 4. Пусть в теореме 1 $h: N\to M$ (т. е. h не зависит от первого аргумента $x\in I_a^b$). Имеем: оператор суперпозиции $\mathscr{H}$, порожденный h, отображает $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b;N\big)$ в $\mathrm{BV}_2\big(I_a^b;M\big)$ и удовлетворяет условию Липшица тогда и только тогда, когда существуют $f\in \mathrm{L}(N;M)$ и $h_0\in M$ такие, что $hu = fu + h_0$ в M для всех $u\in N$. Действительно, из теоремы 1 вытекает, что $h(u) = f(x)u + h_0(x)$, откуда $h(0) = h_0(x)$ для всех $x\in I_a^b$. Кроме того, если $x,y\in I_a^b$, то
$$d(f(x)u, f(y)u) = d(f(x)u + h(0), f(y)u + h(0)) = d(h(u),h(u)) = 0,$$

поэтому $f(x)u = f(y)u$ для всех $u \in N$ и, значит, $f(x) = f(y)$ в $\mathrm{L}(N;M)$. Достаточность вытекает из теоремы 2 части II этой работы.

Замечание 5. Пусть $(Y,|\cdot|)$ — вещественное нормированное линейное пространство. Многозначный оператор $T : N \to \mathrm{cbc}(Y)$ из абстрактного выпуклого конуса $(N,\rho,+,\cdot)$ в $\mathrm{cbc}(Y)$ называется *линейным*, если он является $\overset{*}{+}$-*аддитивным* (т. е. $T(u+v) = Tu\overset{*}{+}Tv$ для всех $u,v \in N$), и *неотрицательно однородным* (т. е. $T(\lambda u) = \lambda Tu$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}^+$ и $u \in N$). Заметим, что если T линеен, то $T(0) = \{0\}$. Обозначим через $\mathbb{L}(N;\mathrm{cbc}(Y))$ абстрактный выпуклый конус всех линейных липшицевых многозначных операторов из N в $\mathrm{cbc}(Y)$, наделенный поточечными операциями (за которыми сохраняются обозначения операций из $\mathrm{cbc}(Y)$) и метрикой $D_L = D_\ell$:

$$D_L(T,S) = \sup_{u,v\in N, u\neq v} D(Tu \overset{*}{+} Sv, Su \overset{*}{+} Tv)/\rho(u,v).$$

Отсюда вытекает, что теорема 1 остается справедливой, если в ней положить $(M,d,+) = (\mathrm{cbc}(Y), D, \overset{*}{+})$, $(Y,|\cdot|)$ — банахово пространство, и $\mathrm{L}(N;M)$ заменить на $\mathbb{L}(N;\mathrm{cbc}(Y))$. При этом если N является линейным пространством, то оператор $f(x)(\cdot)$ при любом $x \in I_a^b$ однозначен (так что $f : I_a^b \to \mathrm{L}(N;Y)$); это следует из того, что если $u \in N$, то $(-u) \in N$, а потому в силу $\overset{*}{+}$-аддитивности оператора $f(x)(\cdot)$ находим, что

$$f(x)(u) \overset{*}{+} f(x)(-u) = f(x)(u + (-u)) = f(x)(0) = \{0\}.$$

Кроме того, если N вещественное, то $\mathrm{L}(N;Y)$ можно трактовать как обычное пространство всех линейных ограниченных операторов из N в Y.

Замечание 6. Аналог теоремы 1 справедлив и для отображений и операторов суперпозиции одной переменной, если в ней положить $I_a^b = [a,b] \subset \mathbb{R}$, всюду заменить BV_2 на BV_1 (см. также замечание 2) и считать, что $h^-(x,u) = \lim\limits_{y\to x-0} h(y,u)$ при $a < x \le b$ и $h^-(a,u) = \lim\limits_{x\to a+0} h^-(x,u)$ в M для всех $u \in N$ и $\mathrm{BV}_1^-\bigl(I_a^b;M\bigr)$ есть подмножество $\mathrm{BV}_1\bigl(I_a^b;M\bigr)$, состоящее из отображений, непрерывных слева на $(a,b]$. Следуя доказательству теоремы 1, укажем лишь основные ходы доказательства в этом случае. Для $g_1, g_2 \in \mathrm{BV}_1\bigl(I_a^b;N\bigr)$ условие Липшица для $\mathscr{H}$ выглядит так:

$$d((\mathscr{H}g_1)(a),(\mathscr{H}g_2)(a)) + W_a^b(\mathscr{H}g_1,\mathscr{H}g_2) \le L(\mathscr{H})\bigl(\rho(g_1(a),g_2(a)) + W_a^b(g_1,g_2)\bigr).$$

В частности, если $m \in \mathbb{N}$ и $a \le \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_m < \beta_m \le b$, то

$$\sum_{i=1}^m d(h(\beta_i,g_1(\beta_i)) + h(\alpha_i,g_2(\alpha_i)), h(\beta_i,g_2(\beta_i)) + h(\alpha_i,g_1(\alpha_i))) \le L(\mathscr{H})\rho_1(g_1,g_2).$$

При $m = 1$ и $\alpha_1 = a$ отсюда вытекает, что $d(h(x,u_1),h(x,u_2)) \le 2L(\mathscr{H})\rho(u_1,u_2)$, $x \in [a,b]$, $u_1,u_2 \in N$, если для $a < x \le b$ положить $\beta_1 = x$ и $g_k(y) = \zeta_{a,x}(y)u_k$, а для $x = a$ положить $\beta_1 = b$ и $g_k(y) = (1-\zeta_{a,b}(y))u_k$, $y \in [a,b]$, $k = 1,2$. Если теперь $a < x \le b$, $a < \alpha_1$ и $\beta_m < x$, то, полагая

$$g_k(y) = \frac{1}{2}\zeta_m(y)u_1 + \frac{1}{2}(1-\zeta_m(y))u_2 + \frac{1}{2}u_k, \quad y \in [a,b],\ k = 1,2,$$

найдем, что

$$\sum_{i=1}^m d\left(h(\beta_i,u_1) + h(\alpha_i,u_2), h\left(\beta_i,\frac{u_1+u_2}{2}\right) + h\left(\alpha_i,\frac{u_1+u_2}{2}\right)\right) \le L(\mathscr{H})\frac{\rho(u_1,u_2)}{2},$$

откуда при $\alpha_1 \to x - 0$ стандартным способом получаем, что

$$d\left(h^-(x,u_1)+h^-(x,u_2), h^-\left(x,\frac{u_1+u_2}{2}\right)+h^-\left(x,\frac{u_1+u_2}{2}\right)\right) \le L(\mathscr{H})\frac{\rho(u_1,u_2)}{2m}.$$

Оставшаяся часть доказательства такая же, как в теореме 1.

Представленный в этом замечании результат обобщает результаты работ [8, 9] (в многозначном случае следует положить $(M,d,+) = (\mathrm{cbc}(Y), D, \overset{*}{+})$).

На случай функций из $\mathrm{BV}_1([a,b];M)$ и операторов суперпозиции одной переменной с соответствующими изменениями переносятся замечания 1–5.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.
2. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
3. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. М.: Наука, 1983.
4. *Appell J., Zabrejko P. P.* Nonlinear Superposition Operators. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.
5. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Операторы суперпозиции в пространствах Соболева // Докл. РАН. 2002. Т. 386, № 6. С. 730–734.
6. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Операторы суперпозиции в пространствах Соболева // Известия вузов. Математика. 2002. № 10. С. 11–33.
7. *Josephy M.* Composing functions of bounded variation // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 83, N 2. P. 354–356.
8. *Matkowski J., Miś J.* On a characterization of Lipschitzian operators of substitution in the space $\mathrm{BV}\langle a,b\rangle$ // Math. Nachr. 1984. V. 117. P. 155–159.
9. *Zawadzka G.* On Lipschitzian operators of substitution in the space of set-valued functions of bounded variation // Rad. Mat. 1990. V. 6. P. 279–293.
10. *Matkowski J.* Functional equations and Nemytskii operators // Funkcial. Ekvac. 1982. V. 25, N 2. P. 127–132.
11. *Matkowski J.* On Nemytskii operator // Math. Japon. 1988. V. 33, N 1. P. 81–86.
12. *Matkowski J.* Lipschitzian composition operators in some function spaces // Nonlinear Anal. 1997. V. 30, N 2. P. 719–726.
13. *Merentes N.* On a characterization of Lipschitzian operators of substitution in the space of bounded Riesz φ-variation // Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 1991. V. 34. P. 139–144.
14. *Merentes N., Nikodem K.* On Nemytskii operator and set-valued functions of bounded p-variation // Rad. Mat. 1992. V. 8, N 1. P. 139–145.
15. *Merentes N., Rivas S.* On characterization of the Lipschitzian composition operator between spaces of functions of bounded p-variation // Czechoslovak Math. J. 1995. V. 45, N 4. P. 627–637.
16. *Smajdor A., Smajdor W.* Jensen equation and Nemytskii operator for set-valued functions // Rad. Mat. 1989. V. 5. P. 311–320.
17. *Smajdor W.* Note on Jensen and Pexider functional equations // Demonstratio Math. 1999. V. 32, N 2. P. 363–376.
18. *Чистяков В. В.* Липшицевы операторы Немыцкого на пространствах Орлича — Винера // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Казань: Казанск. мат. об-во, 1999. С. 243–244.
19. *Чистяков В. В.* Отображения обобщенной вариации и операторы суперпозиции // Современная математика и ее приложения. Тематич. обзоры. М.: ВИНИТИ, 2000. Т. 79. С. 67–82. (Итоги науки и техники.)
20. *Chistyakov V. V.* Generalized variation of mappings and applications // Real Anal. Exchange. 1999–2000. V. 25, N 1. P. 61–64.
21. *Chistyakov V. V.* Lipschitzian superposition operators between spaces of functions of bounded generalized variation with weight // J. Appl. Anal. 2000. V. 6, N 2. P. 173–186.
22. *Chistyakov V. V.* On mappings of finite generalized variation and nonlinear operators // Real Analysis Exchange 24th Summer Symp. Denton, Texas, USA, 2000. P. 39–43.

23. *Chistyakov V. V.* Generalized variation of mappings with applications to composition operators and multifunctions // Positivity. 2001. V. 5, N 4. P. 323–358.
24. *Чистяков В. В.* Алгебра функций двух переменных ограниченной вариации и липшицевы операторы суперпозиции // Тр. XII Байкальской междунар. конф. Методы оптимизации и их прил. Иркутск, 2001. Т. 6. С. 53–58.
25. *Chistyakov V. V.* Superposition operators in the algebra of functions of two variables with finite total variation // Monatsh. Math. 2002. V. 137, N 2. P. 99–114.
26. *Matkowski J.* On Lipschitzian solutions of a functional equation // Ann. Polon. Math. 1973. V. 28. P. 135–139.
27. *Шварц Л.* Анализ. М.: Мир, 1972. Т. 1.
28. *Чистяков В. В.* К теории многозначных отображений ограниченной вариации одной вещественной переменной // Мат. сб. 1998. Т. 189, № 5. С. 153–176.
29. *Picone M.* Sulla variazione totale di una funzione metrica // Rend. Sem. Mat. Fis. Milano. 1960. V. 30. P. 59–92.
30. *Ambrosio L.* Metric space valued functions of bounded variation // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). 1990. V. 17, N 3. P. 439–478.
31. *Balcerzak M., Belov S. A., Chistyakov V. V.* On Helly's principle for metric semigroup valued BV-mappings of two real variables // Bull. Austral. Math. Soc. 2002. V. 66, N 2. P. 245–257.
32. *Чистяков В. В.* Обобщенные вариации в многозначном анализе: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2002.
33. *Чистяков В. В.* Метрические полугруппы и конусы отображений конечной вариации нескольких переменных и многозначные операторы суперпозиции // Докл. РАН. 2003. Т. 393, № 6. С. 757–761.
34. *Чистяков В. В.* Операторы суперпозиции на BV-отображениях двух переменных // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Казань: Изд-во Казанск. мат. об-ва, 2003. Т. 19. С. 229–230.
35. *Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л.* Интеграл, мера и производная. М.: Наука, 1967.
36. *Пинскер А. Г.* Пространство выпуклых множеств локально выпуклого пространства // Тр. Ленингр. инж.-эконом. ин-та им. П. Тольятти. 1966. Вып. 63. С. 13–17.
37. *Hörmander L.* Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe // Ark. Mat. 1954. Bd 3. N 12. S. 181–186.
38. *Rådström H.* An embedding theorem for spaces of convex sets // Proc. Amer. Math. Soc. 1952. V. 3, N 1. P. 165–169.
39. *De Blasi F. S.* On the differentiability of multifunctions // Pacific J. Math. 1976. V. 66, N 1. P. 67–81.
40. *Castaing C., Valadier M.* Convex analysis and measurable multifunctions. Berlin: Springer-Verl., 1977. (Lecture Notes in Math.; 580).
41. *Vitali G.* Sulle funzione integrali // Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 1904/1905. V. 40. P. 1021–1034; and Opere sull'analisi reale, Cremonese. 1984. P. 205–220.
42. *Clarkson J. A., Adams C. R.* On definitions of bounded variation for functions of two variables // Trans. Amer. Math. Soc. 1933. V. 4. P. 824–854.
43. *Hildebrandt T. H.* Introduction to the Theory of Integration. New York; London: Acad. Press, 1963.
44. *Idczak D., Walczak S.* On Helly's theorem for functions of several variables and its applications to variational problems // Optimization. 1994. V. 30. P. 331–343.
45. *Леонов А. С.* Замечания о полной вариации функций нескольких переменных и многомерном аналоге принципа выбора Хелли // Мат. заметки. 1998. Т. 63, № 1. С. 69–80.
46. *Fifer Z.* Set-valued Jensen functional equation // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 1986. V. 31, N 4. P. 297–302.
47. *Nikodem K.* K-convex and K-concave set-valued functions. Zeszyty Nauk. Politech. Łódz. Mat. V. 559. Łódź: Rozprawy Naukowe **114**, 1989.

Статья поступила 13 марта 2004 г.

Чистяков Вячеслав Васильевич
Гос. университет «Высшая школа экономики», кафедра математики,
ул. Большая Печерская, 25, Нижний Новгород 603600
czeslaw@mail.ru