Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2005. Том 46, № 3

УДК 512.54

СУБКУБИЧНОСТЬ УСРЕДНЕННОЙ ФУНКЦИИ ДЕНА НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЫ СТУПЕНИ 2

В. А. Романьков

Аннотация: Доказано, что усредненная функция Дена относительно любого конечного представления произвольной конечно порожденной нильпотентной группы ступени 2 субкубична. Для свободной нильпотентной группы ступени 2 конечного ранга ≥ 2 отсюда следует субасимптотичность усредненной функции Дена в смысле М. Громова, что подтверждает высказанную им гипотезу.

Ключевые слова: нильпотентная группа, конечно определенная группа, граф Кэли, функция Дена, усредненная функция Дена.

Введение

Понятие усредненной функции Дена конечно определенной группы G введено М. Громовым в [1]. Там же была высказана гипотеза о субквадратичности усредненной функции Дена свободной абелевой группы. Эта гипотеза подтверждена работой Е. Г. Кукиной и автора [2] для стандартного задания свободной абелевой группы $Z^r = \langle x_1, \dots, x_r \mid (x_i, x_j) = 1,\ i, j = 1, \dots, r\rangle$. В заключительном замечании настоящей работы ограничение на стандартность задания снимается.

Целью настоящей работы является доказательство субкубичности усредненной функции Дена конечно порожденной нильпотентной группы ступени 2. Отсюда следует субасимптотичность усредненной функции Дена свободной нильпотентной группы ступени 2 конечного ранга $r \geq 2$ в смысле М. Громова. Кроме того, настоящая работа закладывает основу обобщения полученных результатов на случай нильпотентной группы произвольной ступени нильпотентности. Возможность этих результатов высказывалась М. Громовым в [1].

Необходимые сведения и формулировка основного результата

Пусть $G = \langle x_1, \dots, x_r \mid v_1, \dots, v_s\rangle$ — задание конечно определенной группы G через порождающие элементы и определяющие соотношения. Пусть $F_r = \langle x_1, \dots, x_r\rangle$ — свободная группа ранга r. Любое (не обязательно редуцированное) слово w в алфавите $X_r \cup X_r^{-1}$, где $X_r = \{x_1, \dots, x_r\}$, длину которого мы обозначаем через $|w|$, определяет элемент группы F_r. Естественный гомоморфизм $F_r \to G$ позволяет говорить о значении слова w в группе G. В частности,

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00489) и Научной программы Федерального агентства по образованию РФ: Фундаментальные исследования. «Университеты России» (код проекта 362–05).

запись $w =_G 1$ означает, что это значение тривиально. Последнее равносильно тому, что слово w принадлежит нормальной подгруппе V, порожденной в группе F_r определяющими словами $v_1, \dots, v_s$. Это равносильно существованию представления w в группе F_r в виде произведения сопряженных к определяющим словам и их обратным. Наименьшее возможное число множителей в таком представлении называется *площадью* $S(w)$ *слова* w.

Пусть Ω_n — совокупность всех слов длины $\leq n$, представляющих 1 в G. Функция Дена $D(n)$ определяется как $\max\limits_{w\in\Omega_n} S(w)$. Усредненная функция Дена $\sigma(n)$ задается как $\frac{1}{|\Omega_n|}\sum\limits_{w\in\Omega_n} S(w)$. Кроме нее мы рассматриваем точную усредненную функцию Дена

$$\tau(n) = \frac{1}{|\Lambda_n|}\sum_{w\in\Lambda_n} S(w),$$

где $\Lambda_n \subseteq \Omega_n$ — подмножество всех слов длины n. Заметим, что функция $\tau(n)$ определена в общем случае не для всех n.

Для функций $\varphi, \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ пишем $\varphi \preceq \psi$, если существуют такие положительные константы a, b, c, d, что для любого n верно

$$\varphi(n) \leq a\varphi(bn) + cn + d. \tag{1.1}$$

Это позволяет определить хорошо известную эквивалентность, согласно которой $\varphi \simeq \psi$, если $\varphi \preceq \psi$ и $\psi \preceq \varphi$ одновременно.

Известно (см. [3]), что функции Дена группы G относительно ее различных конечных представлений эквивалентны. По этой причине часто *функцией Дена* конечно определенной группы G называют соответствующий класс введенной выше эквивалентности. Это позволяет говорить о группах с линейной функцией Дена, что равносильно понятию гиперболической группы, о группах с квадратичной, полиномиальной, экспоненциальной и т. п. функцией Дена. Основные факты об этом можно найти в [3]. Функция Дена свободной абелевой группы $A_r = Z^r$ конечного ранга $r \geq 2$ квадратична. Функция Дена любой автоматной группы не более чем квадратична, а функция Дена свободной нильпотентной группы N_{r2} ступени $c = 2$ ранга $r \geq 2$ кубична. В общем случае функция Дена свободной нециклической нильпотентной группы ступени c эквивалентна функции n^{c+1}. Заметим, что соответствующая верхняя оценка получена в [4]. В то же время противоположное отношение $D(n) \succeq n^{c+1}$ для свободной нециклической нильпотентной группы G ступени c доказывается сравнительно легко. Оно известно давно (см. [5, 6]).

М. Громов в книге [1] говорит, что усредненная функция Дена конечно определенной группы G обладает свойством *субасимптотичности*, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sigma(n)}{D(n)} = 0. \tag{1.2}$$

Из приведенных выше результатов ясно, что для свободной нециклической нильпотентной группы ступени нильпотентности c субасимптотичность в смысле М. Громова означает субквадратичность для $c = 1$, субкубичность для $c = 2$ и т. д.

Сравнительно недавно Герстен, Хольт и Райли в работе [7] полностью доказали хорошо известную $c + 1$-гипотезу. А именно, они установили, что любая конечно порожденная нильпотентная группа ступени c допускает в качестве изопериметрической функцию, эквивалентную n^{c+1}. Это означает, что имеет место отношение $D(n) \preceq n^{c+1}$.

Рассмотрим r-порожденную нильпотентную группу G ступени 2 в некотором ее представлении $G = \langle x_1, \dots, x_r \mid v_1, \dots v_s \rangle$. Произвольный элемент $g \in G$ записывается в виде

$$g = \prod_{1 \le j < i \le r} (x_i, x_j)^{\alpha(i,j)} \prod_{1 \le l \le r} x_l^{\beta(l)}, \tag{1.3}$$

где $\alpha(i,j), \beta(l) \in Z$. Как обычно, $(g,f) = gfg^{-1}f^{-1}$ — коммутатор произвольных элементов g, f некоторой группы.

Если G — свободная 2-ступенно нильпотентная группа с множеством свободных порождающих $X_r = \{x_1, \dots, x_r\}$, то указанная запись однозначна. В [2] доказано, что класс эквивалентности усредненной функции Дена в этом случае не зависит от выбора определяющих соотношений. В общем случае такая запись не однозначна. Доказательство последующей теоремы не использует однозначности и подходит (в рассматриваемом случае ступени 2) для любой конечно порожденной нильпотентной группы. В то же время удобно считать, что оно проводится для свободной нильпотентной группы, так как записи элементов мы получаем по правилам свободной нильпотентной группы.

С группой G мы связываем граф Кэли Γ относительно выбранного множества порождающих элементов $X_r = \{x_1, \dots, x_r\}$.

Основным результатом статьи является

Теорема. *Для произвольной конечно порожденной нильпотентной группы ступени нильпотентности 2 в любом ее конечном представлении усредненная функция Дена $\sigma(n)$ субкубична, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n^3} = 0. \tag{1.4}$$

Следствие. *Для свободной нильпотентной группы ступени нильпотентности 2 конечного ранга $r \ge 2$ в любом ее конечном представлении усредненная функция Дена $\sigma(n)$ субасимптотична в смысле М. Громова, т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{D(n)} = 0. \tag{1.5}$$

Доказательство теоремы

Для упрощения обозначений мы ограничимся рассмотрением произвольной 2-порожденной нильпотентной группы $G = \langle x, y \rangle$ ступени 2. Доказательство достаточно легко распространяется на случай произвольной конечно порожденной нильпотентной группы ступени 2.

Итак, $G = \langle x, y \rangle$ — 2-порожденная нильпотентная группа ступени 2. Произвольный элемент $g \in G$ записывается в виде

$$g = (y,x)^\alpha x^\beta y^\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in Z. \tag{2.1}$$

Через $d(1,g)$ обозначим расстояние от вершины g до 1 в графе Кэли Γ группы G.

Предложение 1. *В приведенных выше обозначениях*

$$d(1, g) \leq 2 \max\{|\beta|, |\gamma|\} + 16\sqrt{|\alpha|}. \tag{2.2}$$

Иначе говоря, расстояние оценивается линейной функцией от модулей показателей β, γ и обратной к квадратичной функции от модуля α.

Доказательство. Пусть правая часть (2.2) обозначена через δ. Достаточно установить, что $\leq \delta$ умножениями справа элемента g на порождающие и обратные к ним можно получить 1.

Вначале произведем $|\beta| + |\gamma| \leq 2 \max\{|\beta|, |\gamma|\}$ умножений на $y^{-\gamma}x^{-\beta}$ и получим элемент $(y, x)^\alpha$. Можно считать, что $\alpha \geq 0$. По теореме Лагранжа существует представление α в виде суммы четырех квадратов целых неотрицательных чисел $\alpha = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_4^2$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$ $(i = 1, \dots, 4)$. В группе G справедливы равенства $y^{-\mu}x^{\mu}y^{\mu}x^{-\mu} = (y, x)^{-\mu^2}$. Домножив $(y, x)^\alpha$ на четыре множителя из левой части предыдущего равенства для $\mu = \alpha_i$, $i = 1, \dots, 4$, суммарной длины не более $16 \max\{|\alpha_1|, \dots, |\alpha_4|\} \leq 16\sqrt{|\alpha|}$, получим 1.

Предложение доказано.

Для произвольной r-порожденной нильпотентной группы G ступени 2 справедливо более общее

Предложение $1'$. *В приведенных выше обозначениях для элемента g из* (1.3) *выполнена оценка вида*

$$d(1, g) \leq r \max\{|\beta_l|, l = 1, \dots, r\} + c\ \max\{\sqrt{|\alpha(i, j)|} \mid 1 \leq j < i \leq r\}. \tag{2.2$'$}$$

Здесь $c = 16C_r^2$ — константа, где C_r^2 — число всех возможных пар $j < i$.

Доказательство этого более общего предложения $1'$ легко получается из доказательства предложения 1.

Приступим теперь к непосредственному доказательству теоремы. Общая схема повторяет с необходимыми изменениями доказательство основного результата работы [2]. Вначале выбирается ограниченное множество в Γ, в данном случае шар $B = B(N)$ подходящего радиуса N с центром в 1. Затем устанавливается, что любой замкнутый путь p длины n с началом и концом в 1, не выходящий за пределы B, определяет слово площади, ограниченной сверху функцией вида $n^{3-\nu}, \nu > 0$, асимптотически существенно меньшей, чем n^3.

Далее с применением леммы Колмогорова и теоремы Муавра — Лапласа доказывается, что вероятность выхода замкнутого пути p длины n с началом и концом в 1 за пределы шара B не превосходит значения функции вида $n^{-\lambda}, \lambda > 0$. Завершается доказательство в точности так же, как это сделано в [2].

Ограничение площади. Пусть p — замкнутый путь в Γ длины n с началом и концом в 1, целиком содержащийся в шаре $B = B(N)$ радиуса N с центром в 1. Пути p соответствует его метка — слово $w = w(p) = z_1 \dots z_n$ от порождающих элементов x, y и обратных к ним. Свяжем с каждым элементом $g_i = z_1 \dots z_i$ $(i = 0, 1, \dots, n)$ метку w_i некоторого геодезического пути от 1 до g_i. Через w_i^{-1} обозначим метку обратного пути — слово, формально обратное к w_i. Конечно, $|w_i| \leq N$.

Слову w сопоставим имеющее с ним одинаковую площадь слово

$$w' = \left(w_0 z_1 w_1^{-1}\right)\left(w_1 z_2 w_2^{-1}\right) \dots \left(w_{n-1} z_n w_n^{-1}\right). \tag{2.3}$$

Слова в скобках $v_i = w_{i-1} z_i w_i^{-1}$ $(i = 1, \dots, n)$ — метки замкнутых путей длины $\leq 2N + 1$. Ясно, что

$$S(w) = S(w') \leq \sum_{i=1}^{n} S(v_i). \tag{2.4}$$

Так как для функции Дена группы G, как отмечено выше, справедливо отношение $D(n) \preceq n^3$, то для достаточно больших n имеем $S(v_i) \leq c(2N+1)^3 \leq dN^3$ при некоторых положительных константах c, d. Поэтому

$$S(w) \leq ndN^3. \tag{2.5}$$

Если положить $N = cn^{\mu}$, $c > 0$, то функция справа в (2.5) будет эквивалентна $n^{3\mu+1}$. Если взять $\mu < 2/3$, то она окажется $o(n^3)$.

Заметим, что аналогичная оценка получается также в случае, если мы возьмем вместо N величину вида cN, c — положительная константа.

Ограничение вероятности выхода за шар. Рассмотрим замкнутый путь p в Γ. Оценим сверху вероятность того, что путь p длины n выйдет за пределы шара $B = B(18N)$.

Пусть $w = z_1 \dots z_n$ — метка пути p. Будем записывать элементы $g_i = z_1 \dots z_i$ $(i = 1, \dots, n)$ в стандартной форме (2.1). Пусть g — один из таких элементов. По предложению 1 если элемент g находится вне шара B, то имеет место хотя бы одно из следующих неравенств:

$$|\beta| > N, \quad |\gamma| > N, \quad |\alpha| > N^2. \tag{2.6}$$

Для оценок вероятности выхода пути p за B нам понадобятся известная (см., например, [8]) лемма Колмогорова и локальная теорема Муавра — Лапласа.

Лемма Колмогорова. *Пусть $\{\xi_n\}$ — последовательность независимых случайных величин, $M\xi_n = 0$, $M\xi_n^2 < \infty\ \forall n$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. Тогда*

$$P\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq N\} \leq \frac{DS_n}{N^2}. \tag{2.7}$$

Здесь P — вероятность, M — математическое ожидание, D — дисперсия.

Пусть X — биномиально распределенная случайная величина с параметрами p, $q = 1 - p$. Тогда вероятность появления события $X = k$ в n испытаниях равна, как хорошо известно, $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Локальная теорема Муавра — Лапласа. *При больших n имеет место*

$$P(X = k) \simeq \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi_0\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ — стандартная функция Гаусса.

Назовем 1-*мерной* ломаную с вершинами в целых точках числовой прямой, начинающуюся в 0. На множестве всех 1-мерных ломаных введем вероятностную меру. Будем считать, что на каждом шаге 1-мерная ломаная с равными вероятностями продолжается из точки δ в точку $\delta + 1$ или в точку $\delta - 1$. Вероятность того, что произвольная 1-мерная m-звенная ломаная выйдет за пределы полосы $[-N, N]$, по лемме Колмогорова не больше, чем m/N^2. Действительно, можно считать, что ломаной соответствует последовательность независимых случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_m$, каждая из которых с равными вероятностями принимает значения 1 или -1. Ясно, что $DS_m = m$. Тогда S_k — координата конца подломаной с числом звеньев k. Нахождение за пределами полосы равнозначно оценке $|S_k| > N$.

Вернемся к слову w — метке пути p. Свяжем с ним две 1-мерные ломаные на некоторой числовой прямой. Каждая из этих ломаных, как уже говорилось, начинается в 0. Звенья ломаных проводятся следующим образом. Последовательно получаем записи вида (2.1) элементов g_i, $i = 1, \dots, n$. Вершинами первой из 1-мерных ломаных являются показатели степени β у элемента x в записи элементов g_i. Если при переходе от записи элемента g_i к записи элемента g_{i+1} показатель β не изменяется, то звено не проводится. В противном случае оно проводится в новую вершину, отличающуюся от старой на 1. Это происходит потому, что элемент g_{i+1} отличается от элемента g_i на x, x^{-1}, y или y^{-1}, а для получения записи элемента g_{i+1} берется запись элемента g_i, формально умножается на соответствующую степень порождающего элемента и затем переписывается с использованием только тождеств нильпотентности ступени 2. Все делается так, как будто мы имеем свободную нильпотентную группу ступени 2 с базисом $\{x, y\}$. Таким образом, длина полученной 1-мерной ломаной не превосходит числа n. Аналогично строится вторая 1-мерная ломаная, только теперь ее вершинам соответствуют показатели степени γ у порождающего y для элементов g_i, $i = 1, \dots, n$.

Элементу g_i, $i = 1, \dots, n$, отвечают координаты β_i и γ_i на этих ломаных. Неравенства $|\beta_i| > N$, $|\gamma_i| > N$ как раз соответствуют выходу за полосу $[-N, N]$.

Далее мы для краткости говорим «ломаная» вместо «1-мерная ломаная». Пусть $N = n^\mu$, где μ — некоторое положительное число. Пусть K означает наименьшее целое число, строго большее, чем N. Если ломаная выходит за полосу $[-N, N]$, то это означает, что первое выходящее звено заканчивается либо в точке K, либо в точке $-K$.

Обозначим через Y_n множество всех замкнутых ломаных длины n, через Z_n — множество всех замкнутых ломаных длины n, выходящих за полосу $[-N, N]$ (далее просто «полосу»), а через V_n — множество всех ломаных длины n, выходящих за полосу.

Ясно, что $|Y_n| = C_n^{n/2}$. Поскольку имеется всего 2^n ломаных длины n, неравенство Колмогорова дает оценку $|V_n| \le 2^n n/N^2$. Из формулы Стирлинга следует, что $|Y_n| \ge c_1 2^n/n^{1/2}$ для некоторой положительной константы c_1.

Оценим отношение $|Z_n|/|V_n|$. Для этого возьмем разбиения $Z_n = Z_n(K) \cup Z_n(K+1) \cup \dots \cup Z_n(n-K)$ и $V_n = V_n(K) \cup V_n(K+1) \cup \dots \cup V_n(n)$, где $Z_n(i), V_n(i)$ означают соответственно множества всех замкнутых ломаных и всех ломаных длины n, впервые выходящих за полосу на i-м шаге. Считаем для определенности K четным числом (случай нечетного K рассматривается аналогично). Тогда первое из приведенных разбиений прореживается до вида $Z_n = Z_n(K) \cup Z_n(K+2) \cup \dots \cup Z_n(n-K)$. Оценим сверху отношение $|Z_n(i)|/|V_n(i)|$ для любого четного $K \le i \le n-K$. Пусть l_i означает количество всех ломаных длины i, впервые выходящих за полосу на i-м шаге. В рассматриваемом случае

$$|Z_n(i)| = l_i C_{n-i}^{(n-i+K)/2} \le l_i c_2 2^{n-i}/(n-i)^{1/2} e^{K^2/2(n-i)} \le l_i c_2 2^{n-i}/(n-i)^{1/2} e^{n^{2\mu-1}/2}, \tag{2.8}$$

где предпоследнее неравенство для подходящей положительной константы c_2 вытекает из формулы Муавра — Лапласа, а последнее — из ограничения $K \ge$

$N = n^\mu$.

Очевидно, что для любого $K \leq i \leq n$ имеем $|V_n(i)| = l_i 2^{n-i}$. Отсюда получаем оценку $|Z_n(i)|/|V_n(i)| \leq c_2/(n-i)^{1/2} e^{n^{2\mu-1}/2}$. Искомой является оценка

$$|Z_n|/|V_n| \leq c_2/n^{\mu/2} e^{n^{2\mu-1}/2}. \tag{2.9}$$

Если $\mu > 1/2$, то в правой части полученной оценки при достаточно большом n знаменатель превосходит любую наперед заданную полиномиальную функцию от n.

Пусть $\overline{\Lambda}_n$ — множество всех слов от x, x^{-1}, y, y^{-1} длины n, значения которых в свободной абелевой группе Z^2 с базисом $\{x, y\}$ равны 1. Ясно, что n — четное число, а групповое слово $w = w(x, y)$ длины n принадлежит множеству $\overline{\Lambda}_n$ тогда и только тогда, когда суммы показателей степеней элементов x, y в записи w равны 0. Пусть подмножество $\overline{\Lambda}_{nm} \subset \overline{\Lambda}_n$ состоит из всех слов, в которые элементы x, x^{-1} входят суммарно m раз (m четное число). Таким образом, мы получаем разбиение $\overline{\Lambda}_n = \bigcup\limits_m \overline{\Lambda}_{nm}$.

В рассматриваемой далее свободной 2-ступенно нильпотентной группе G с базисом $\{x, y\}$ каждое из слов $w \in \overline{\Lambda}_n$ равно $w = (y, x)^f$, $f = f(w) \in Z$. Тем самым возникает функция $f_n : \overline{\Lambda}_n \to Z$. Ее ограничение на любое подмножество $\overline{\Lambda}_{nm}$ обозначим через f_{nm}. Определим $F_n(i)$, $i \in Z$, как количество элементов полного прообраза $f_n^{-1}(i)$. Соответственно $F_{nm}(i)$, $i \in Z$, — количество элементов полного прообраза $f_{nm}^{-1}(i)$. Заметим, что $F_n(0)$ есть в точности количество всех слов длины n, значения которых в группе G равны 1.

Очевидно, что в приведенных обозначениях функции $F_n, F_{nm} : Z \to Z$ являются четными.

Оценим значение функции $F_n(0)$ снизу. Вначале считаем, что n делится на 4. Рассмотрим множество всех слов $K_n \subseteq \overline{\Lambda}_n$ таких, что каждое из них записывается в виде $w = w_1 w_2$, где $w_1, w_2 \in \overline{\Lambda}_{n/2}$. Для таких слов $f_n(w) = f_{n/2}(w_1) + f_{n/2}(w_2)$. Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} L_n(0) = |K_n \cap \Lambda_n| &= F_{n/2}(0) F_{n/2}(0) \\ &+ 2F_{n/2}(1) F_{n/2}(-1) + \dots + 2F_{n/2}(i) F_{n/2}(-i) + \dots = F_{n/2}(0)^2 + 2 \sum_{i \in N} F_{n/2}(i)^2. \end{aligned} \tag{2.10}$$

В вычислениях использовалось свойство четности функции $F_n(i)$. Так как функция Дена группы Z^2 квадратична, считаем, что параметр i в формуле (2.10) пробегает от 0 до cn^2, где c — подходящая положительная константа.

Аналогичным образом получаем формулу

$$L_n(\neq 0) = |K_n \setminus (K_n \cap \Lambda_n)| = 2 \sum_{i=1,\dots,cn^2} F_{n/2}(i)^2 + 8 \sum_{i \neq j=1,\dots,cn^2} F_{n/2}(i) F_{n/2}(j). \tag{2.11}$$

Формулы (2.10), (2.11) влекут неравенство

$$d_1 n^2 L_n(0) \geq L_n(\neq 0), \tag{2.12}$$

где d_1 — подходящая константа.

Хорошо известно (см., например, [2]), что для любого четного n имеет место эквивалентность

$$|\overline{\Lambda}_n| = (C_n^{n/2})^2 \simeq \frac{4^n}{n}. \tag{2.13}$$

Все это позволяет получить следующие формулы:

$$|K_n| = L_n(0) + L_n(\neq 0) \leq (1 + d_1 n^2) L_n(0), \tag{2.14}$$

$$|K_n| = \left(C_{n/2}^{n/4}\right)^4 \simeq \frac{4^n}{n^2}, \tag{2.15}$$

значит,

$$L_n(0) \succeq \frac{4^n}{n^4} \simeq \frac{|\overline{\Lambda}_n|}{n^3}. \tag{2.16}$$

Отсюда получаем, что

$$|\Lambda_n| \succeq \frac{|\overline{\Lambda}_n|}{n^3}, \tag{2.17}$$

откуда, в свою очередь, вытекает неравенство

$$F_n(0) \geq \frac{d_2 4^n}{n^4}, \tag{2.18}$$

где d_2 — некоторая положительная константа.

Если n не делится на 4, то формула (2.18) также имеет место, что легко следует из неравенства $F_n(0) \geq F_{n-2}(0)$ и соответствующей оценки для $n-2$.

Используя только что полученное неравенство (2.18) и оценку (2.9), получаем, что при $\mu = 1/2 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, вероятность выполнения двух первых неравенств из (2.6) при больших n пренебрежимо мала по отношению к любой функции вида $n^{-\delta}$, $\delta > 0$. В дальнейшем мы рассматриваем только те пути p, для которых при любом $0 \leq i \leq n$ выполнены неравенства

$$|\beta_i| \leq n^{1/2+\varepsilon}, \quad |\gamma_i| \leq n^{1/2+\varepsilon}, \tag{2.19}$$

где $\varepsilon > 0$, β_i, γ_i — показатели в записи элементов g_i по формуле (2.1). Далее для простоты мы называем их *текущими показателями* пути p, часто опуская индексы. То же самое относится и к показателям α. Кроме того, мы будем обозначать через ε достаточно малую положительную величину.

Получим теперь верхнюю оценку для вероятности выполнения третьего неравенства из (2.6) для текущего показателя α.

Разобьем путь p с меткой $w = z_1 \dots z_n$ на подпути с метками $w = w_1 ... w_{[n^{1/2}]}$, длина каждого из которых — ближайшее сверху или снизу натуральное число к $n^{1/2}$. Общее число таких подпутей обозначено через $[n^{1/2}]$. Ясно, что эту величину можно сделать равной целой части от $n^{1/2}$, так что это обозначение имеет обычный смысл.

Перенесем путь p на стандартный граф группы Z^2, вершины которого лежат в точках плоскости с целыми координатами, а ребра проходят по геодезическим. Согласно (2.19) можно считать, что с необходимой вероятностью весь путь расположен в квадрате со стороной $2n^{1/2+\varepsilon}$ и вершиной в начале координат, где начинается и сам путь.

Рассмотрим в пути p подпуть p_i с меткой w_i. Пусть он начинается в точке A_i. Используя лемму Колмогорова, как это делалось выше, заключаем, что с нужной оценкой вероятности путь p_i целиком содержится в квадрате со стороной $2n^{1/4+\varepsilon}$ и центром в A_i. Мы можем при этом рассматривать подпуть p_i как произвольный, поскольку в одномерном случае у путей, вышедших за пределы интервала с центром в 0, меньше продолжений до замкнутого пути, чем у путей той же длины, но заканчивающихся в интервале (свойство биномиальных коэффициентов).

Пусть B_i — левая нижняя целочисленная точка полученного квадрата. Проведем из начала координат фиксированный путь q в точку B_i. Из точки B_i проведем геодезические $q_{i0}, q_{i1}, \ldots, q_{is_i}$ в графе группы Z^2 во все вершины подпути p_i, проводя вначале горизонтальную линию, а затем вертикальную. Пусть $r_{i0}, r_{i1}, \ldots, r_{is_i}$ — их метки. Площадь метки замкнутого пути $q_i q_{i0} p_i q_{is_i}^{-1} q_i^{-1}$ относительно группы Z^2 не превосходит суммы площадей меток путей $q_i q_{ij} l_j q_{ij+1}^{-1} q_i^{-1}$, где l_j — j-е ребро пути p_i. Ясно, что вся площадь определяется частью пути внутри квадрата. Легко видеть, что та, в свою очередь, не превосходит $3n^{1/4+\varepsilon}$. Значит, площадь всего пути не больше, чем $3n^{3/4+\varepsilon}$. Отсюда получаем, что площадь w не превосходит $3n^{5/4+\varepsilon}$. Здесь всюду ε — подходящие малые положительные константы, которые можно считать одинаковыми.

Получаем, что с необходимой вероятностью значение для метки w пути p в группе G есть $(x, y)^\alpha$, где $\alpha \leq n^{5/4+\varepsilon}$. Отсюда следует выполнимость с требуемой вероятностью третьего из неравенств (2.6) для $N_2 = n^{2/3-\varepsilon}$.

Итак, вероятность того, что выполнено хотя бы одно из текущих неравенств (2.6), не превосходит при выбранном значении N_2 величины вида $n^{-\delta}, \delta > 0$. Также можно считать, что площадь любого слова $w \in \Lambda_n$, не выходящего за шар B радиуса $18N_2$, не превосходит $n^{3-\delta}$.

Окончание доказательства. Как отмечалось во введении, функция Дена конечно порожденной нильпотентной группы ступени 2 не более чем кубична. Значит, площадь слова w длины n относительно группы G не превосходит $c_1 n^3$, где c_1 — некоторая константа. Средняя площадь слов из Λ_n, не выходящих за пределы шара $B(18N_2)$, не превосходит величины $c_2 n^{3-\delta}$, где c_2 — некоторая константа, а δ — положительная величина, отмеченная выше. Мы можем считать, что $c_1 = c_2 = c$ и, как отмечалось, δ — та же самая величина, которая фигурирует в окончательной оценке вероятности выхода пути за шар B. Тогда

$$\tau(n) \leq 2cn^{3-\delta}. \tag{2.20}$$

В этом случае усредненная функция Дена группы G есть

$$\sigma(n) = \sum_{i=1}^{n} p^{(i)} \tau_(i),$$

где $p^{(i)}$ — вероятность того, что ломаная из Ω_n имеет длину i, не превосходит $c_3 n^{3-\delta}$ для некоторой константы c_3. Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n^3} = 0.$$

Теорема доказана для произвольной 2-порожденной нильпотентной группы ступени 2. Доказательство очевидным образом распространяется на случай произвольной конечно порожденной нильпотентной группы ступени 2. При этом вместо записи (2.1) используется более общая запись (1.3), а вместо оценки (2.2) — оценка (2.2′). Оценка площади слова, определяемого замкнутым путем, не выходящим за пределы выбранного шара $B = B(N)$, не зависит от числа порождающих элементов и осуществляется в точности так же, как это было сделано. Рассуждения в доказательстве, позволяющие оценить вероятность выхода за шар B, касающиеся показателей степеней при коммутаторах, связаны каждый раз только с одной парой порождающих. По этой причине они также легко воспроизводятся в общем случае. Еще проще получить оценки, касающиеся показателей степеней при самих порождающих. При добавлении новых соотношений количество замкнутых путей в графе только возрастает (точнее, некоторые незамкнутые пути становятся замкнутыми), что не противоречит приведенному доказательству. Вероятность выхода за шар также уменьшается, что соответствует доказательству.

Замечание. Доказательство проведено таким образом, что оно подходит для любого конечного задания рассматриваемой группы G через порождающие элементы и определяющие соотношения. Аналогично можно доказать основной результат работы [2], заменяя функцию n^3 на n^2, но уже без ограничения на стандартность задания группы. Теперь этот результат выглядит следующим образом: усредненная функция Дена свободной абелевой группы Z^r произвольного конечного ранга r субквадратична относительно любого конечного ее задания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gromov M. L.* Asymptotic invariants of infinite groups // Geometric Group Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. V. 2. P. 1–295. (London Math. Soc. Lecture Notes Ser.; 182).
2. *Кукина Е. Г., Романьков В. А.* Субквадратичность усредненной функции Дена для свободных абелевых групп // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44. С. 772–778.
3. *Epstein D. B. A., Cannon J. W., Holt D. F., Levy S. V. F, Paterson M. S., Thurston W. P.* Word processing in groups. Boston MA.: Jones and Bartlett, 1992.
4. *Pittet Ch.* Isoperimetric inequalities for homogeneous nilpotent groups // Geometric Group Theory. Berlin: de Gruyter, 1995. P. 159–164. (Ohio State University, Mathematical Research Institute Publications V. 3, eds. R. Charney, M. Davis, and M. Shapiro).
5. *Baumslag G., Miller C. F., III, Short H.* Isoperimetric inequalities and the homology of groups // Invent. Math. 1993. V. 113. P. 531–560.
6. *Gersten S. M.* Isoperimetric and isodiametric functions of finite presentations // Geometric Group Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. P. 79–96. (London Math. Soc. Lecture Notes Ser.; 181).
7. *Gersten S. M., Holt D. F., Riley T. R.* Isoperimetric inequalities for nilpotent groups // Geom. Funct. Anal. 2003. V. 13. P. 795–814.
8. *Ламперти Дж.* Вероятность. М.: Наука, 1973.

Статья поступила 11 октября 2003 г., окончательный вариант — 25 марта 2005 г.

Романьков Виталий Анатольевич
Омский гос. университет, кафедра информационных систем,
пр. Мира, 55-А, Омск 644077
romankov@math.omsu.omskreg.ru