*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2005. Том 46, № 3*

*УДК 517.55*

# О ГЛАВНОМ ЗНАЧЕНИИ ПО КОШИ ОСОБОГО ИНТЕГРАЛА ХЕНКИНА — РАМИРЕЗА В СТРОГО ПСЕВДОВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{C}^n$

**А. М. Кытманов, С. Г. Мысливец**

**Аннотация:** Показано, что в многомерном случае (в отличие от комплексной плоскости) главное значение по Коши особого интеграла Хенкина — Рамиреза в строго псевдовыпуклых областях равно предельному значению этого интеграла изнутри области.

**Ключевые слова:** главное значение по Коши, особый интеграл Хенкина — Рамиреза.

Пусть $D$ — ограниченная строго псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^n$ с границей $\partial D$ класса $\mathscr{C}^3$, т. е.

$$D = \{z \in \Omega : \rho(z) < 0\},$$

где $\rho(z)$ — вещественнозначная строго плюрисубгармоническая функция класса $\mathscr{C}^3$ в некоторой окрестности $\Omega$ замыкания области $\overline{D}$ и такая, что $d\rho \neq 0$ на $\partial D$.

Как известно (см., например, [1, теорема 3.10]), в $\Omega$ существует барьерная гладкая функция $\Phi(\zeta, z)$ переменных $(\zeta, z) \in \Omega \times \Omega$ такая, что $\Phi$ голоморфна по $z \in \Omega$ при фиксированном $\zeta \in \Omega$,

$$2\operatorname{Re}\Phi(\zeta, z) \geq \rho(\zeta) - \rho(z) + \gamma|\zeta - z|^2$$

для некоторой константы $\gamma > 0$,

$$\Phi(\zeta, z) = \sum_{k=1}^{n} P_k(\zeta, z)(\zeta_k - z_k),$$

где $P = (P_1, \dots, P_n)$ — гладкая вектор-функция переменных $(\zeta, z) \in \Omega \times \Omega$, голоморфная по $z \in \Omega$ при фиксированном $\zeta \in \Omega$.

Для заданной гладкой функции $\eta = \eta(\zeta, z, \lambda)$ со значениями $\mathbb{C}^n$, где $(\zeta, z, \lambda) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$, определим форму Лере

$$\omega'(\eta) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \eta_j \, d\eta[j],$$

где $d\eta[j]$ есть внешнее произведение дифференциалов $d\eta_1, \dots, d\eta_n$, в котором дифференциал $d\eta_j$ пропущен.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ–1212.2003.1), второго — при финансовой поддержке Красноярского краевого фонда науки (грант 12F0063C).

Выделим в $\omega'(\eta)$ слагаемые, не содержащие голоморфных дифференциалов $d\zeta_j$, $dz_j$ и дифференциалов $d\bar{z}_j$. Их сумму обозначим через $\omega'_0$. Тогда форма $\omega'_0$ есть форма степени 0 по $d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_n$ и степени $(n-1)$ по $d\bar{\zeta}_1, \dots, d\bar{\zeta}_n$ и $d\lambda$.

Основной в нашем рассмотрении будет являться интегральная формула Хенкина — Рамиреза (см., например, [1, п. 4.2]).

**Теорема 1.** *Для любой функции $f$, голоморфной в $D$ и непрерывной на $\overline{D}$ ($f \in \mathscr{O}(D) \cap \mathscr{C}(\overline{D})$), справедливо интегральное представление*

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D} f(\zeta) \cdot \frac{\omega'_0(P(\zeta, z)) \wedge d\zeta}{[\Phi(\zeta, z)]^n}, \quad z \in D. \tag{1}$$

Формула (1) является одной из самых удачных реализаций общей формулы Коши — Фантаппье в многомерном комплексном анализе (см., например, [1, 2]).

При $z \in \partial D$ ядро в формуле (1) имеет единственную неинтегрируемую особенность $\zeta = z$. В работах [3, 4] было рассмотрено главное значение особого интеграла (типа) Хенкина — Рамиреза следующего вида:

$$\text{v.p.h.}\, \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D} u(\zeta) \cdot \frac{\omega'_0(P(\zeta, z)) \wedge d\zeta}{[\Phi(\zeta, z)]^n} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D \setminus U_z(\varepsilon)} u(\zeta) \cdot \frac{\omega'_0(P(\zeta, z)) \wedge d\zeta}{[\Phi(\zeta, z)]^n},$$

для интегрируемой на $\partial D$ функции $u(\zeta)$ и точки $z \in \partial D$, где $U_z(\varepsilon) = \{\zeta \in \partial D : |\Phi(\zeta, z)| < \varepsilon\}$.

Оно отличается от обычного главного значения v.p. по Коши тем, что из границы $\partial D$ выбрасывается не обычный шар $B_z(\varepsilon) = \{\zeta : |\zeta - z| < \varepsilon\}$, а «эллипсоид» $U_z(\varepsilon)$, вытянутый вдоль комплексных касательных направлений.

Как показано в [3, 4], для функций $u$, удовлетворяющих условию Гёльдера на $\partial D$, главное значение v.p.h. интеграла Хенкина — Рамиреза существует и справедлива формула, аналогичная формуле Сохоцкого — Племеля для интеграла типа Коши на комплексной плоскости. Одним из основных моментов в доказательстве формулы Сохоцкого — Племеля является вычисление главного значения от функции $u = 1$. Доказано [3, 4], что это главное значение равно $1/2$.

В данной работе мы рассматриваем главное значение по Коши интеграла Хенкина — Рамиреза. Доказываем, что при $n > 1$ главное значение по Коши этого интеграла от $u = 1$ равно 1 и тем самым формула Сохоцкого — Племеля имеет другой вид, чем для главного значения v.p.h.

Рассмотрение главного значения по Коши представляется более естественным, так как оно не зависит от вида области и ядра. Кроме того, похожие особые интегралы, связанные с интегралами Хенкина — Рамиреза, в строго выпуклых областях были рассмотрены в [5].

Итак, обозначим через v.p. главное значение по Коши, т. е.

$$\text{v.p.}\, \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D} u(\zeta) \cdot \frac{\omega'_0(P(\zeta, z)) \wedge d\zeta}{[\Phi(\zeta, z)]^n} = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D \setminus B_z(\varepsilon)} u(\zeta) \cdot \frac{\omega'_0(P(\zeta, z)) \wedge d\zeta}{[\Phi(\zeta, z)]^n}$$

для интегрируемой на $\partial D$ функции $u(\zeta)$ и точки $z \in \partial D$.

**Теорема 2.** *При $n > 1$ справедлива формула*

$$\text{v.p.}\,\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\partial D}\frac{\omega_0'(P(\zeta,z))\wedge d\zeta}{[\Phi(\zeta,z)]^n}=1,\quad z\in\partial D. \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим через $U(\zeta,z)$ ядро Бохнера — Мартинелли, т. е.

$$U(\zeta,z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i))^n}\cdot\frac{\omega_0'(\zeta,z)\wedge d\zeta}{|\zeta-z|^{2n}}.$$

Оно является ядром Коши — Фантаппье для вектор-функции

$$\eta_M(\zeta,z)=\frac{\bar\zeta-\bar z}{|\zeta-z|^2}=\left(\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{|\zeta-z|^2},\dots,\frac{\bar\zeta_n-\bar z_n}{|\zeta-z|^2}\right).$$

Как известно (см., например, [6, гл. 1]),

$$\text{v. p.}\int\limits_{\partial D}U(\zeta,z)=\frac{1}{2},\quad z\in\partial D.$$

Разность ядер Бохнера — Мартинелли и Хенкина — Рамиреза как разность двух ядер Коши — Фантаппье является $\bar\partial$-точной формой (см., например, [7, гл. 1]). Нам понадобится явный вид этого представления. Обозначим через $\eta(\zeta,z,\lambda)$ вектор-функцию

$$\eta(\zeta,z,\lambda)=\left((1-\lambda)\frac{\bar\zeta_1-\bar z_1}{|\zeta-z|^2}+\lambda\frac{P_1(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)},\dots,(1-\lambda)\frac{\bar\zeta_n-\bar z_n}{|\zeta-z|^2}+\lambda\frac{P_n(\zeta,z)}{\Phi(\zeta,z)}\right).$$

**Лемма 1.** *Справедлива формула*

$$U(\zeta,z)-\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\omega_0'(P(\zeta,z))\wedge d\zeta}{[\Phi(\zeta,z)]^n}=\bar\partial_\zeta\alpha(\zeta,z),$$

*где*

$$\alpha(\zeta,z)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_0^1\omega_0'(\eta(\zeta,z,\lambda))\wedge d\zeta.$$

Доказательство проводится прямым вычислением. □

Дифференциальная форма $\alpha(\zeta,z)$ имеет степень $(n,n-2)$ по $\zeta$.

Применяя лемму 1, формулу Стокса и учитывая, что ориентация границы шара $B_z(\varepsilon)$ согласована с самим шаром, а не с его дополнением, получим

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\partial D\setminus B_z(\varepsilon)}\frac{\omega_0'(P(\zeta,z))\wedge d\zeta}{[\Phi(\zeta,z)]^n}&=\int\limits_{\partial D\setminus B_z(\varepsilon)}U(\zeta,z)-\int\limits_{\partial D\setminus B_z(\varepsilon)}\bar\partial_\zeta\alpha(\zeta,z)\\&=\int\limits_{\partial D\setminus B_z(\varepsilon)}U(\zeta,z)+\int\limits_{\partial D\cap\partial B_z(\varepsilon)}\alpha(\zeta,z).\end{aligned}$$

Первый интеграл в этой формуле стремится к $1/2$. Нам нужно показать, что и второй интеграл также стремится к $1/2$ при $\varepsilon\to+0$.

**Лемма 2.** *Для всех точек $z \in \partial D$ справедлива формула*

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\partial D\cap\partial B_z(\varepsilon)} \alpha(\zeta, z) = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Лемма 2 есть частный случай леммы 7.1 из статьи [5].

Обозначим для интегрируемой на $\partial D$ функции $u$ через $K^+[u]$ предельное значение интеграла

$$\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D} u(\zeta) \cdot \frac{\omega_0'(P(\zeta,z)) \wedge d\zeta}{[\Phi(\zeta,z)]^n}$$

изнутри области $D$, через $K_s[u]$ — главное значение по Коши этого интеграла, т. е.

$$K_s[u] = \text{v.p.}\, \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D} u(\zeta) \cdot \frac{\omega_0'(P(\zeta,z)) \wedge d\zeta}{[\Phi(\zeta,z)]^n}, \quad z \in \partial D.$$

**Следствие 1.** *Пусть $n > 1$. Если функция $u$ удовлетворяет на $\partial D$ условию Гёльдера с показателем $\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, то интеграл $K^+[u]$ продолжается на $\partial D$ до некоторой функции, также удовлетворяющей на $\partial D$ условию Гёльдера с некоторым показателем $\beta$, $0 < \beta \le 1$; интеграл $K_s[u]$ существует и является функцией на $\partial D$, удовлетворяющей условию Гёльдера с показателем $\beta$, и справедливо равенство*

$$K^+[u] = K_s[u]. \tag{4}$$

*Формула (4) является аналогом формулы Сохоцкого — Племеля для интеграла Хенкина — Рамиреза в $D$. Она отличается от аналогичной формулы в [3, 4], в которых рассматривалось другое главное значение особого интеграла типа Хенкина — Рамиреза.*

Доказательство. Для точек $\zeta, z \in \partial D$ введем обозначение $d(\zeta, z) = |\Phi(\zeta, z)|$. Как показано в [4],

$$C_1 d(\zeta, z) \le |\zeta - z| \le C_2 \sqrt{d(\zeta, z)}.$$

Это означает, что функция $u$, удовлетворяющая условию Гёльдера относительно евклидовой метрики $|\zeta - z|$, удовлетворяет условию Гёльдера относительно метрики $d(\zeta, z)$, но с другим показателем Гёльдера.

Рассмотрим интеграл

$$\Psi(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D} (u(\zeta) - u(z)) \cdot \frac{\omega_0'(P(\zeta,z)) \wedge d\zeta}{[\Phi(\zeta,z)]^n}.$$

Как показано в [3, теорема 1], этот интеграл является функцией, удовлетворяющей условию Гёльдера относительно метрики $d(\zeta, z)$ в замыкании области $\overline{D}$. Тогда, с одной стороны,

$$\Psi(z) = K^+[u](z) - u(z), \quad z \in \partial D,$$

с другой стороны (по теореме 2),

$$\Psi(z) = K_s[u](z) - u(z),$$

откуда и следует требуемое равенство. $\square$

Для единичного шара $B = \{z : |z| < 1\}$ с границей $S = \{z : |z| = 1\}$ можно провести прямое вычисление главного значения по Коши интеграла Хенкина — Рамиреза, не прибегая к свойствам интеграла Бохнера — Мартинелли. В этом случае ядро Хенкина — Рамиреза превращается в ядро Коши — Сеге.

Обозначим через $K(\zeta, z)$ ядро

$$K(\zeta, z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \cdot \frac{1}{(1 - \langle \zeta, z \rangle)^n},$$

где $\langle \zeta, z \rangle = \bar{\zeta}_1 z_1 + \ldots + \bar{\zeta}_n z_n$ — скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$. Его можно также записать в виде матричного произведения: если считать, что $z$ — это вектор-столбец, то $\langle \zeta, z \rangle = \bar{\zeta}' \cdot z$, где штрих — знак транспонирования матрицы.

Обозначим через $\sigma(\zeta)$ дифференциальную форму

$$\sigma(\zeta) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \bar{\zeta}_k d\bar{\zeta}[k] \wedge d\zeta,$$

где $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$, а $d\bar{\zeta}[k]$ получается из $d\bar{\zeta}$ удалением дифференциала $d\bar{\zeta}_k$. На границе шара сужение формы $\sigma(\zeta)$ с точностью до константы совпадает с граничной мерой Лебега для $S$. Тогда ядро Коши — Сеге (равное ядру Хенкина — Рамиреза в шаре) примет вид

$$K(\zeta, z)\, \sigma(\zeta).$$

**Следствие 2.** *При $n > 1$ справедлива формула*

$$\text{v.p.} \int_S K(\zeta, z)\, \sigma(\zeta) = 1 \quad \textit{для любой точки} \quad z \in S. \tag{5}$$

Доказательство. Покажем сначала, что в качестве $z$ достаточно рассмотреть точку $(1, 0, \ldots, 0)$ и провести доказательство только для нее.

Пусть $\zeta = Aw$ — преобразование, задаваемое унитарной матрицей $A$, тогда форма $\sigma(\zeta)$ инвариантна относительно такого преобразования:

$$\sigma(\zeta) = \sigma(Aw) = \sigma(w).$$

Действительно, $d\zeta = \det A\, dw$. Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \zeta_k d\zeta[k] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^{n} a_{jk} w_j \sum_{p=1}^{n} A_{pk} dw[k],$$

где $a_{jk}$ — элементы матрицы $A$, а $A_{pk}$ — миноры матрицы $A$, соответствующие элементам $a_{pk}$. Поскольку

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{jk} A_{pk} = \begin{cases} 0, & j \neq p, \\ (-1)^{p-1} \det A, & j = p, \end{cases}$$

имеем

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \zeta_k d\zeta[k] = \det A \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} w_k dw[k].$$

Отсюда и из свойств унитарного преобразования получаем

$$\sigma(\zeta) = |\det A|^2 \sigma(w) = \sigma(w).$$

Заметим, что

$$1-\langle\zeta,z\rangle = 1-\langle Aw,z\rangle = 1-(\overline{Aw})'\cdot z = 1-\overline{w}'\bar{A}'z$$
$$= 1-\overline{w}'\cdot(\bar{A}'z) = 1-\langle w,\bar{A}'z\rangle = 1-\langle w,Az\rangle.$$

Таким образом, пользуясь инвариантностью сферы $S$ относительно унитарных преобразований и вышеприведенными формулами, мы можем произвольную точку $z\in S$ преобразовать в точку $(1,0,\dots,0)$. При этом интегралы в формуле (5) не изменятся (множества, которые выбрасываются из сферы $S$, также унитарно инвариантны).

Итак, достаточно вычислить интегралы

$$I_\varepsilon = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{S\setminus B_\varepsilon}\frac{\sigma(\zeta)}{(1-\bar{\zeta}_1)^n},$$

где $B_\varepsilon$ — множество $\{\zeta : |\zeta_1-1|^2+|\zeta_2|^2+\ldots+|\zeta_n|^2<\varepsilon^2\}$. А затем найти предел таких интегралов при $\varepsilon\to+0$. Заметим, что на границе шара будет

$$|\zeta_1-1|^2+|\zeta_2|^2+\ldots+|\zeta_n|^2 = |\zeta_1-1|^2+1-|\zeta_1|^2 = 2-2\operatorname{Re}\zeta_1,$$

поэтому в качестве $B_\varepsilon$ можно взять множество $\{\operatorname{Re}\zeta_1>1-\varepsilon^2/2\}$.

Используя равенство $|\zeta|^2=1$ на границе шара, получим, что

$$\sum_{k=1}^n\bar{\zeta}_k d\zeta_k+\sum_{k=1}^n\zeta_k d\bar{\zeta}_k = 0 \quad \text{на } S.$$

Выражая отсюда $d\bar{\zeta}_n$ и подставляя в $\sigma(\zeta)$, нетрудно проверить, что

$$\sigma(\zeta) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{\zeta_n}\cdot d\bar{\zeta}[n]\wedge d\zeta, \quad \zeta_n\neq 0.$$

С помощью теоремы Фубини, учитывая ориентацию сферы $S$, заключаем, что

$$I_\varepsilon = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{S\setminus B_\varepsilon}\frac{1}{(1-\bar{\zeta}_1)^n}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{\zeta_n}\cdot d\bar{\zeta}[n]\wedge d\zeta$$
$$= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\{|\zeta_1|<1\}\setminus B'_\varepsilon}\frac{d\bar{\zeta}_1\wedge d\zeta_1}{(1-\bar{\zeta}_1)^n}\int\limits_{\{|\zeta_2|^2+\ldots+|\zeta_n|^2=1-|\zeta_1|^2\}}\frac{d\bar{\zeta}[1,n]\wedge d\zeta[1]}{\zeta_n}, \tag{6}$$

где $B'_\varepsilon\subset\mathbb{C}$ есть множество $\{\zeta_1 : \operatorname{Re}\zeta_1>1-\varepsilon^2/2\}$.

Применяя формулу Коши, вычислим внутренний интеграл в (6):

$$\int\limits_{\{|\zeta_2|^2+\ldots+|\zeta_n|^2=1-|\zeta_1|^2\}}\frac{d\bar{\zeta}[1,n]\wedge d\zeta[1]}{\zeta_n}$$
$$= \int\limits_{\{|\zeta_2|^2+\ldots+|\zeta_{n-1}|^2<1-|\zeta_1|^2\}} d\bar{\zeta}[1,n]\wedge d\zeta[1,n]\int\limits_{\{|\zeta_n|^2=1-|\zeta_1|^2-\ldots-|\zeta_{n-1}|^2\}}\frac{d\zeta_n}{\zeta_n}$$
$$= 2\pi i\int\limits_{\{|\zeta_2|^2+\ldots+|\zeta_{n-1}|^2<1-|\zeta_1|^2\}} d\bar{\zeta}[1,n]\wedge d\zeta[1,n] = \frac{(2\pi i)^{n-1}}{(n-2)!}(1-|\zeta_1|^2)^{n-2}.$$

Здесь также использовалось то, что объем единичного $(2n-4)$-мерного шара равен $\frac{\pi^{n-2}}{(n-2)!}$.

Таким образом,

$$I_\varepsilon = \frac{n-1}{2\pi i} \int\limits_{\{|\zeta_1|<1\}\setminus B'_\varepsilon} \frac{(1-|\zeta_1|^2)^{n-2}}{(1-\bar{\zeta}_1)^n} \cdot d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1. \tag{7}$$

Для нахождения $I_\varepsilon$ в (7) введем полярные координаты $\zeta_1 = re^{i\varphi}$, где, как обычно, $r > 0$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Тогда

$$d\bar{\zeta}_1 \wedge d\zeta_1 = 2ir\,dr \wedge d\varphi.$$

Интеграл $I_\varepsilon$ разобьем на два интеграла $I_\varepsilon^1$ и $I_\varepsilon^2$. Рассмотрим первый интеграл:

$$I_\varepsilon^1 = \frac{n-1}{2\pi i} \int\limits_0^{1-\varepsilon^2/2} 2ir\,dr \int\limits_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)^{n-2}}{(1-re^{-i\varphi})^n} d\varphi$$
$$= \frac{n-1}{\pi i} \int\limits_0^{1-\varepsilon^2/2} (1-r^2)^{n-2} dr \int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i(n-1)\varphi}}{(e^{i\varphi}-r)^n} de^{i\varphi}.$$

По формуле Коши

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i(n-1)\varphi}}{(e^{i\varphi}-r)^n} de^{i\varphi} = 2\pi i,$$

поэтому

$$I_\varepsilon^1 = 2(n-1) \int\limits_0^{1-\varepsilon^2/2} (1-r^2)^{n-2} r\,dr = -\int\limits_0^{1-\varepsilon^2/2} d(1-r^2)^{n-1} = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2}\right)^2\right)^{n-1}$$

и, следовательно, $I_\varepsilon^1 \to 1$ при $\varepsilon \to +0$.

Обратимся к второму интегралу:

$$I_\varepsilon^2 = \frac{n-1}{2\pi i} \int\limits_{1-\varepsilon^2/2}^{1} 2ir\,dr \int\limits_{\arccos\frac{1-\varepsilon^2/2}{r}}^{2\pi-\arccos\frac{1-\varepsilon^2/2}{r}} \frac{(1-r^2)^{n-2}}{(1-re^{-i\varphi})^n} d\varphi$$
$$= \frac{n-1}{\pi i} \int\limits_{1-\varepsilon^2/2}^{1} (1-r^2)^{n-2} r\,dr \int\limits_{\arccos\frac{1-\varepsilon^2/2}{r}}^{2\pi-\arccos\frac{1-\varepsilon^2/2}{r}} \frac{e^{i(n-1)\varphi}}{(e^{i\varphi}-r)^n} de^{i\varphi}.$$

Легко найти первообразную внутреннего интеграла. Обозначив $w = e^{i\varphi}$, получим

$$\frac{w^{n-1}}{(w-r)^n} = \frac{((w-r)+r)^{n-1}}{(w-r)^n} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k r^k (w-r)^{n-1-k}}{(w-r)^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_{n-1}^k r^k}{(w-r)^{k+1}},$$

где $C_{n-1}^k$ — биномиальные коэффициенты. Отсюда

$$\int \frac{w^{n-1}}{(w-r)^n} dw = \ln(w-r) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \frac{C_{n-1}^k r^k}{(w-r)^k} + C, \tag{8}$$

где $\ln(w-r)$ — значение логарифма с разрезом по неотрицательной части действительной оси.

Обозначим через $\zeta_r$ точку на прямой $\operatorname{Re}\zeta = 1 - \varepsilon^2/2$ с аргументом $\varphi_r$, равным $\cos\frac{1-\varepsilon^2/2}{r}$. Тогда для первого слагаемого первообразной (8)

$$\ln(\overline{w}_r - r) - \ln(w_r - r) = \ln\frac{\overline{w}_r - r}{w_r - r} = \ln\left|\frac{\overline{w}_r - r}{w_r - r}\right| + i\arg\frac{\overline{w}_r - r}{w_r - r} = i\arg\frac{\overline{w}_r - r}{w_r - r}.$$

Поэтому

$$|\ln(\overline{w}_r - r) - \ln(w_r - r)| \le 4\pi.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{1-\varepsilon^2/2}^{1} (1-r^2)^{n-1} |\ln(\overline{w}_r - r) - \ln(w_r - r)| dr \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to +0.$$

Для слагаемых $\frac{1}{k}\frac{C_n^k r^k}{(w-r)^k}$ при $k < n-1$ имеем оценку

$$\left|\frac{1-r^2}{w_r - r}\right| \le 1 + r,$$

поэтому для подынтегральных функций

$$\left|\frac{1}{k} \cdot \frac{C_{n-1}^k (1-r^2)^{n-2}}{(w_r - r)^k}\right| \le C_1$$

(для некоторой константы $C_1$) и интегралы от таких функций по отрезку $[1 - \varepsilon^2/1, 1]$ стремятся к нулю при $\varepsilon \to +0$ ($k = 1, \dots, n-2$).

Рассмотрим последнее слагаемое первообразной (8):

$$\left|\frac{1}{n-1} \cdot \frac{(1-r^2)^{n-2}}{(w_r - r)^{n-1}}\right| \le C_2 \frac{1}{|w_r - r|} = C_2 \frac{1}{\sqrt{r^2 + \varepsilon^2 - 1}}.$$

Имеем

$$\int\limits_{1-\varepsilon^2/2}^{1} \frac{dr}{\sqrt{r^2 + \varepsilon^2 - 1}} = \ln(r + \sqrt{r^2 + \varepsilon^2 - 1})\Big|_{1-\varepsilon^2/2}^{1} = \ln(1+\varepsilon) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to +0.$$

Отсюда получаем, что $I_\varepsilon^2 \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. $\square$

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Хенкин Г. М.* Метод интегральных представлений в комплексном анализе // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 7. С. 23–124. (Итоги науки и техники).
2. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из $\mathbb{C}^n$. М.: Мир, 1984.
3. *Alt W.* Singuläre Integrale mit gemischten Homogenitäten auf Mannigfaltigkeiten und Anwendungen in der Funktionentheorie // Math. Z. 1974. Bd 137, N 3. S. 227–256.

**4.** *Kerzman N., Stein E. M.* The Szegö kernel in terms of Cauchy–Fantappié kernels // Duke Math. J. 1978. V. 45, N 3. P. 197–224.
**5.** *Kytmanov A., Myslivets S., Tarkhanov N.* Holomorphic Lefschetz formula for manifolds with boundary // Math. Z. 2004. V. 246, N 4. P. 769–794.
**6.** *Кытманов А. М.* Интеграл Бохнера — Мартинелли и его приложения. Новосибирск: Наука, 1992.
**7.** *Айзенберг Л. А., Южаков А. П.* Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе. Новосибирск: Наука, 1979.

*Статья поступила 16 октября 2003 г.*

*Кытманов Александр Мечиславович*
*Красноярский гос. университет, факультет математики и информатики,*
*пр. Свободный, 79, Красноярск 660041*
kytmanov@lan.krasu.ru

*Мысливец Симона Глебовна*
*Красноярский гос. университет, кафедра высшей математики,*
*пр. Свободный, 79, Красноярск 660041*
simona@lan.krasu.ru