Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2005. Том 46, № 3

УДК 517.91+517.929

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Г. В. Демиденко, В. А. Лихошвай

Аннотация: Изучены предельные свойства решений одного класса систем дифференциальных уравнений при неограниченном увеличении числа уравнений и некоторых параметров. Установлена тесная связь между решениями этих систем и решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Доказанные теоремы о сходимости представляют новый метод аппроксимации решений нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Ключевые слова: системы с бесконечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.

§ 1. Введение

Мы продолжаем исследования связей между решениями систем из большого числа обыкновенных дифференциальных уравнений и решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Первый результат в этом направлении был получен в работе [1] при изучении системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= g(x_n) - \frac{n-1}{\tau}x_1, \\ \frac{dx_i}{dt} &= \frac{n-1}{\tau}(x_{i-1} - x_i), \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \frac{dx_n}{dt} &= \frac{n-1}{\tau}x_{n-1} - \theta x_n, \end{aligned} \tag{1.1}$$

возникающей при моделировании фундаментальных процессов транскрипции и трансляции в генных сетях [2]. Нами было установлено [1], что если неограниченно увеличивать число уравнений n в системе (1.1) и рассматривать только последние компоненты решения задачи Коши с нулевыми начальными данными $x|_{t=0} = 0$, то мы получим равномерно сходящуюся последовательность

$$x_n^n(t) \to y(t), \quad n \to \infty, \quad t \in [0, T],$$

при этом предельная функция $y(t)$ удовлетворяет тождеству

$$\frac{dy(t)}{dt} \equiv -\theta y(t) + g(y(t - \tau)), \quad t > \tau,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 03–01–00328, 03–04–48506, 03–04–48829, 03–07–96833, 04–01–00458, 05–04–49068, 05–07–90274), Интеграционного проекта СО РАН (проекты 119, 148), программы Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 8273), NSF:FIBR N EF–0330786.

т. е. функция $y(t)$ является решением дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом.

В данной работе рассматриваем задачу Коши для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt} = q\theta y_n - \frac{n-1}{\tau}x_1,\\
&\frac{dx_i}{dt} = \frac{n-1}{\tau}(x_{i-1} - x_i), \quad i = 2, \dots, n-1,\\
&\frac{dx_n}{dt} = \frac{n-1}{\tau}x_{n-1} - \theta x_n,\\
&\frac{dy_n}{dt} = f(y_n, x_n),
\end{aligned} \tag{1.2}$$

$$x_1|_{t=0} = \dots = x_n|_{t=0} = 0, \quad y_n|_{t=0} = y_0, \tag{1.3}$$

где $1 > q > 0$, $\tau > 0$, $\theta > 0$ — параметры. Исследуем связь этой задачи Коши с уравнением с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy}{dt} = f(y(t), qy(t-\tau)), \quad t > \tau. \tag{1.4}$$

Устанавливаем, что некоторый класс решений уравнения (1.4) может быть представлен как повторный предел

$$\lim_{\theta\to\infty}\lim_{n\to\infty} y_n(t,\theta) = y(t),$$

где $y_n(t,\theta)$ — последняя компонента решения задачи Коши (1.2), (1.3).

§ 2. Системы с бесконечным числом дифференциальных уравнений

Рассмотрим задачу Коши (1.2), (1.3), предполагая, что функция $f(u,v)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица:

$$\sup_{u,v\in R}|f(u,v)| = F < \infty, \quad |f(u_1,v_1) - f(u_2,v_2)| \le L_1|u_1-u_2| + L_2|v_1-v_2|. \tag{2.1}$$

Следовательно, задача однозначно разрешима.

Последние две компоненты решения задачи (1.2), (1.3) являются решениями следующей системы интегральных уравнений:

$$x_n(t) = q\theta\int_0^t \psi_n(t-s)y_n(s)\,ds, \tag{2.2}$$

$$y_n(t) = y_0 + \int_0^t f(y_n(s), x_n(s))\,ds, \tag{2.3}$$

где

$$\psi_n(t) = \frac{e^{-\theta t}}{(1-\frac{\theta\tau}{n-1})^{n-1}}S_n(t), \tag{2.4}$$

$$S_n(t) = 1 - e^{-\omega t}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(\omega t)^k}{k!}, \quad \omega = \frac{n-1}{\tau} - \theta. \tag{2.5}$$

Действительно, уравнение (2.2) получаем, учитывая начальные условия $x|_{t=0} = 0$ и формулу Коши, примененную к первым n уравнениям (1.2) (см., например, [3]). Уравнение (2.3) получается простым интегрированием последнего уравнения (1.2).

Будем теперь рассматривать серию задач Коши вида (1.2), (1.3), получающуюся при неограниченном увеличении числа уравнений n. Решая каждую из задач и рассматривая только последние две компоненты решений, получим последовательность вектор-функций $\{z_n(t)\}$, $z_n(t) = (x_n(t), y_n(t))$. Из следующей теоремы вытекает, что эта последовательность является сходящейся в пространстве непрерывных вектор-функций $C[0,T] \times C[0,T]$.

Теорема 1. *Пусть $T > \tau$ такое, что выполнены неравенства*

$$T < \frac{1 - q(1 - e^{-\theta T})}{L_1}, \quad T < \frac{1}{L_2}. \tag{2.6}$$

Тогда последовательность $\{z_n(t)\}$ является равномерно сходящейся на отрезке $[0,T]$.

Доказательство. В силу полноты пространства $C[0,T] \times C[0,T]$ для доказательства теоремы достаточно показать, что последовательность $\{z_n(t)\}$ является фундаментальной. При доказательстве этого факта мы будем существенно использовать свойства функции $S_n(t)$, установленные в работе [1]. Сформулируем их в виде двух лемм.

Лемма 1. *Пусть $t = \tau p$, $p > 1$, $n_p = \left[\frac{p\theta\tau}{p-1}\right] + 1$. Тогда при $n \geq n_p$ имеет место оценка*

$$|S_{n+1}(t) - 1| < \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-1)}(p(1 - \frac{\theta\tau}{n}) - 1)} \left(\frac{p}{e^{p-1}}\right)^n e^{p\theta\tau} \left(1 - \frac{\theta\tau}{n}\right)^n.$$

Лемма 2. *Пусть $t = \tau/p$, $p > 1$, тогда при $n > \theta\tau$ имеет место оценка*

$$|S_{n+1}(t)| < \frac{1}{\sqrt{2\pi n}(1 - \frac{1}{p}(1 - \frac{\theta\tau}{n}))} \left(e^{1 - \frac{1}{p}(1 - \frac{\theta\tau}{n})} \frac{1}{p} \left(1 - \frac{\theta\tau}{n}\right)\right)^n.$$

Как уже отмечалось, компоненты вектор-функции $z_n(t)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений (2.2), (2.3). Поэтому в силу ограниченности функции $f(u,v)$ из уравнения (2.3) вытекает, что на любом отрезке $[0,T]$ последовательность $\{y_n(t)\}$ является ограниченной:

$$\max_{[0,T]} |y_n(t)| \leq |y_0| + TF = Y. \tag{2.7}$$

Вначале оценим модуль разности $|x_{n+l}(t) - x_n(t)|$ для любых n, l. В силу (2.2) имеем

$$x_{n+l}(t) - x_n(t) = q\theta \int_0^t (\psi_{n+l}(t-s) - \psi_n(t-s)) y_{n+l}(s)\, ds$$
$$+ q\theta \int_0^t \psi_n(t-s)(y_{n+l}(s) - y_n(s))\, ds = I^1_{n,l}(t) + I^2_{n,l}(t). \tag{2.8}$$

Рассмотрим первый интеграл $I^1_{n,l}(t)$. Используя определения (2.4), (2.5), запишем его в виде

$$I^1_{n,l}(t) = A_{n,l}\, q\theta \int\limits_0^t e^{-\theta(t-s)} S_{n+l}(t-s) y_{n+l}(s)\, ds$$

$$+ \frac{q\theta}{(1-\frac{\theta\tau}{n-1})^{n-1}} \int\limits_0^t e^{-\theta(t-s)} (S_{n+l}(t-s) - S_n(t-s)) y_{n+l}(s)\, ds = I^{1,1}_{n,l}(t) + I^{1,2}_{n,l}(t), \tag{2.9}$$

где

$$A_{n,l} = \left(\frac{1}{(1-\frac{\theta\tau}{n+l-1})^{n+l-1}} - \frac{1}{(1-\frac{\theta\tau}{n-1})^{n-1}} \right) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.10}$$

Из определения (2.5) следует, что $|S_m(t)| \le 1$, $t \ge 0$, поэтому, учитывая оценку (2.7), получим неравенство для первого слагаемого в (2.9):

$$\max_{t\in[0,\,T]} \bigl| I^{1,1}_{n,l}(t) \bigr| \le A_{n,l}\, qY(1-e^{-\theta T}). \tag{2.11}$$

Оценим второе слагаемое в (2.9), переписав его в виде

$$I^{1,2}_{n,l}(t) = \frac{q\theta}{(1-\frac{\theta\tau}{n-1})^{n-1}} \int\limits_0^t e^{-\theta\xi} (S_{n+l}(\xi) - S_n(\xi)) y_{n+l}(t-\xi)\, d\xi. \tag{2.12}$$

В силу леммы 2 для любого $\varepsilon \in (0,1)$ при $0 \le \xi \le \tau(1-\varepsilon)$ и $n > \theta\tau$ имеем

$$|S_n(\xi)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,\varepsilon}\,.$$

Тогда, учитывая неравенство (2.7), получим

$$\max_{t\in[0,\,\tau(1-\varepsilon)]} \bigl| I^{1,2}_{n,l}(t) \bigr| \le \frac{qY(1-e^{-\theta\tau})}{\sqrt{n}\varepsilon(1-\frac{\theta\tau}{n-1})^{n-1}}, \tag{2.13}$$

$$\max_{t\in[\tau(1-\varepsilon),\,\tau(1+\varepsilon)]} \bigl| I^{1,2}_{n,l}(t) \bigr| \le \frac{qY}{(1-\frac{\theta\tau}{n-1})^{n-1}} \left(\frac{1-e^{-\theta\tau}}{\sqrt{n}\varepsilon} + 4\varepsilon\tau\theta \right). \tag{2.14}$$

Оценим теперь $I^{1,2}_{n,l}(t)$ на отрезке $[\tau(1+\varepsilon), T]$. Перепишем представление (2.12) в виде

$$I^{1,2}_{n,l}(t) = \frac{q\theta}{(1-\frac{\theta\tau}{n-1})^{n-1}} \left(\int\limits_0^{\tau(1-\varepsilon)} e^{-\theta\xi} (S_{n+l}(\xi) - S_n(\xi)) y_{n+l}(t-\xi)\, d\xi \right.$$

$$+ \int\limits_{\tau(1-\varepsilon)}^{\tau(1+\varepsilon)} e^{-\theta\xi} (S_{n+l}(\xi) - S_n(\xi)) y_{n+l}(t-\xi)\, d\xi$$

$$\left. + \int\limits_{\tau(1+\varepsilon)}^{t} e^{-\theta\xi} ((S_{n+l}(\xi)-1) - (S_n(\xi)-1)) y_{n+l}(t-\xi)\, d\xi \right) = J^1_{n,l}(t) + J^2_{n,l}(t) + J^3_{n,l}(t).$$

Для первых двух слагаемых справедливы оценки вида (2.13), (2.14). Для получения оценки третьего слагаемого воспользуемся неравенством

$$|S_n(\xi) - 1| \le \frac{e^{\theta(\xi-\tau)}}{\sqrt{n}\,\varepsilon}, \quad \tau(1+\varepsilon) \le \xi \le T, \quad n > \frac{2\theta\tau(1+\varepsilon)}{\varepsilon} + 4,$$

которое вытекает из леммы 1. Тогда получим

$$\max_{t\in[\tau(1+\varepsilon),\,T]} \left|J^3_{n,l}(t)\right| \le \frac{2qY(T-\tau)e^{-\theta\tau}}{\sqrt{n}\varepsilon(1-\frac{\theta\tau}{n-1})^{n-1}}.$$

Следовательно, при $n > \frac{2\theta\tau(1+\varepsilon)}{\varepsilon} + 4$ имеем неравенство

$$\max_{t\in[\tau(1+\varepsilon),\,T]} \left|I^{1,2}_{n,l}(t)\right| \le \frac{qY}{(1-\frac{\theta\tau}{n-1})^{n-1}}\left(\frac{1-e^{-\theta\tau}}{\sqrt{n}\varepsilon} + 4\varepsilon\tau\theta + \frac{2(T-\tau)e^{-\theta\tau}}{\sqrt{n}\varepsilon}\right). \tag{2.15}$$

Из неравенств (2.13)–(2.15) непосредственно вытекает следующая оценка для второго слагаемого в (2.9):

$$\max_{t\in[0,\,T]} \left|I^{1,2}_{n,l}(t)\right| \le \frac{qY}{(1-\frac{\theta\tau}{n-1})^{n-1}}\left(\frac{1-e^{-\theta\tau}}{\sqrt{n}\varepsilon} + 4\varepsilon\tau\theta + \frac{2(T-\tau)e^{-\theta\tau}}{\sqrt{n}\varepsilon}\right), \tag{2.16}$$

$$n > \frac{2\theta\tau(1+\varepsilon)}{\varepsilon} + 4.$$

Воспользуемся теперь произволом $\varepsilon > 0$, положив $\varepsilon = n^{-1/4}$. Учитывая представление (2.9), из неравенств (2.11), (2.16) при $n > 4(\theta\tau n^{1/4} + 1)$ и любого $l \ge 1$ получим оценку

$$\max_{t\in[0,\,T]} \left|I^{1}_{n,l}(t)\right| \le A_{n,l}qY(1-e^{-\theta T}) + n^{-1/4}\frac{qY}{(1-\frac{\theta\tau}{n-1})^{n-1}}(1-e^{-\theta\tau} + 4\tau\theta + 2(T-\tau)e^{-\theta\tau}). \tag{2.17}$$

Следовательно, первый интеграл $I^1_{n,l}(t)$ в формуле (2.8) стремится к нулю при $n \to \infty$ для любого $l \ge 1$.

Рассмотрим второй интеграл $I^2_{n,l}(t)$ в формуле (2.8). Из определения, очевидно, имеем

$$\max_{t\in[0,\,T]} \left|I^{2}_{n,l}(t)\right| \le q\theta \int_0^T |\psi_n(\xi)|d\xi \max_{s\in[0,\,T]} |y_{n+l}(s) - y_n(s)|. \tag{2.18}$$

Обозначим

$$\Psi_n = \int_0^T |\psi_n(\xi)|\, d\xi.$$

Учитывая определение функции $\psi_n(\xi)$ и леммы 1, 2, по теореме Лебега получаем

$$\Psi = \lim_{n\to\infty} \Psi_n = e^{\theta\tau}\int_\tau^T e^{-\theta\xi}d\xi = \frac{1-e^{-\theta(T-\tau)}}{\theta}.$$

Поскольку $\theta > 0$, $\tau > 0$, то

$$\Psi < \frac{1-e^{-\theta T}}{\theta}.$$

Следовательно, существует n_0 такое, что при $n \geq n_0$, $l \geq 1$

$$\Psi_n \leq \frac{1 - e^{-\theta T}}{\theta}.$$

В силу сказанного из представления (2.8) и неравенства (2.18) при $n \geq n_0$ получаем следующую оценку:

$$\max_{t\in[0,T]} |x_{n+l}(t) - x_n(t)| \leq \max_{t\in[0,T]} \left|I^1_{n,l}(t)\right| + q(1 - e^{-\theta T}) \max_{t\in[0,T]} |y_{n+l}(t) - y_n(t)|. \quad (2.19)$$

С другой стороны, учитывая равенство (2.3), имеем

$$y_{n+l}(t) - y_n(t) = \int\limits_0^t (f(y_{n+l}(s), x_{n+l}(s)) - f(y_n(s), x_n(s)))\, ds.$$

Отсюда ввиду условия Липшица (2.1)

$$\max_{t\in[0,T]} |y_{n+l}(t) - y_n(t)| \leq T(L_1 \max_{t\in[0,T]} |y_{n+l}(t) - y_n(t)| + L_2 \max_{t\in[0,T]} |x_{n+l}(t) - x_n(t)|).$$

Теперь, суммируя (2.19) и эту оценку, получаем

$$\begin{aligned} &\max_{t\in[0,T]} |x_{n+l}(t) - x_n(t)| + \max_{t\in[0,T]} |y_{n+l}(t) - y_n(t)| \\ &\qquad \leq \max_{t\in[0,T]} \left|I^1_{n,l}(t)\right| + (q(1 - e^{-\theta T}) + TL_1) \max_{t\in[0,T]} |y_{n+l}(t) - y_n(t)| \\ &\qquad\qquad + TL_2 \max_{t\in[0,T]} |x_{n+l}(t) - x_n(t)| \end{aligned}$$

или, в эквивалентном виде,

$$\begin{aligned} &(1 - TL_2) \max_{t\in[0,T]} |x_{n+l}(t) - x_n(t)| \\ &\qquad + (1 - q(1 - e^{-\theta T}) - TL_1) \max_{t\in[0,T]} |y_{n+l}(t) - y_n(t)| \leq \max_{t\in[0,T]} \left|I^1_{n,l}(t)\right|. \end{aligned}$$

Следовательно, если число $T > \tau$ удовлетворяет условиям (2.6), то в силу (2.10), (2.17) для любого $l \geq 1$ имеет место сходимость

$$\max_{t\in[0,T]} |x_{n+l}(t) - x_n(t)| + \max_{t\in[0,T]} |y_{n+l}(t) - y_n(t)| \to 0, \quad n \to \infty,$$

т. е. последовательность $\{z_n(t)\}$ является фундаментальной в пространстве $C[0,T] \times C[0,T]$. Тогда вследствие полноты существует вектор-функция

$$z(t) = \lim_{n\to\infty} z_n(t) \in C[0,T] \times C[0,T].$$

Теорема доказана.

В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда параметр θ является достаточно большим. Поэтому приведем чуть более грубый результат о сходимости последовательности $\{z_n(t)\}$, непосредственно вытекающий из теоремы и лемм 1, 2.

Следствие. *Пусть*

$$\tau < T < \min\left\{\frac{1-q}{L_1}, \frac{1}{L_2}\right\}. \tag{2.20}$$

Тогда последовательность $\{z_n(t)\}$ *равномерно сходится на отрезке* $[0,T]$, *при этом предельная вектор-функция* $z(t) = (x(t), y(t))$ *является решением системы интегральных уравнений*

$$x(t) = q\theta \int\limits_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-\tau-s)} y(s)\,ds, \quad t > \tau, \tag{2.21}$$

$$y(t) = y_0 + \int\limits_0^t f(y(s), x(s))\,ds, \tag{2.22}$$

$x(t) = 0$, $t \in [0,\tau]$.

Замечание. Из (2.21), (2.22) следует, что на интервале (τ, T) для предельной вектор-функции $z(t) = (x(t), y(t))$ справедливы тождества

$$\frac{dx(t)}{dt} \equiv -\theta x(t) + q\theta y(t-\tau), \quad \frac{dy(t)}{dt} \equiv f(y(t), x(t)).$$

Теорема 2. *Пусть функция* $f(u,v)$ *удовлетворяет условию* (2.1) *и число* $T > \tau$ *определено в* (2.20). *Тогда система интегральных уравнений* (2.21), (2.22) *имеет единственное решение* $z(t) = (x(t), y(t))$, *непрерывное на* $[0,T]$, *и* $x(t) = 0,\ t \in [0,\tau]$.

Доказательство. Существование непрерывного решения системы уравнений (2.21), (2.22) установлено выше. Покажем единственность.

Предположим, что существует два различных непрерывных решения

$$z_1(t) = (x_1(t), y_1(t)), \quad z_2(t) = (x_2(t), y_2(t)),$$

при этом $x_1(t) = x_2(t) = 0,\ t \in [0,\tau]$. Подставляя их в (2.21), (2.22), получим тождества, из которых очевидным образом вытекают следующие тождества:

$$x_1(t) - x_2(t) \equiv q\theta \int\limits_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-\tau-s)} (y_1(s) - y_2(s))\,ds, \quad t > \tau,$$

$$y_1(t) - y_2(t) \equiv \int\limits_0^t (f(y_1(s), x_1(s)) - f(y_2(s), x_2(s)))\,ds.$$

Отсюда, поскольку $\theta \geq 0$ и выполнено условие Липшица, получаем

$$\max_{t\in[0,T]} |x_1(t) - x_2(t)| \leq q \max_{t\in[0,T]} |y_1(t) - y_2(t)|,$$

$$\max_{t\in[0,T]} |y_1(t) - y_2(t)| \leq TL_1 \max_{t\in[0,T]} |y_1(t) - y_2(t)| + TL_2 \max_{t\in[0,T]} |x_1(t) - x_2(t)|.$$

Суммируя эти неравенства, будем иметь

$$\max_{t\in[0,T]} |x_1(t) - x_2(t)| + \max_{t\in[0,T]} |y_1(t) - y_2(t)|$$
$$\leq (q + TL_1) \max_{t\in[0,T]} |y_1(t) - y_2(t)| + TL_2 \max_{t\in[0,T]} |x_1(t) - x_2(t)|.$$

Поскольку

$$q + TL_1 < 1, \quad TL_2 < 1,$$

то

$$x_1(t) \equiv x_2(t), \quad y_1(t) \equiv y_2(t);$$

противоречие. Отсюда вытекает единственность решения.

Теорема доказана.

Итак, при любом фиксированном $\theta \geq 0$ непрерывное решение системы (2.21), (2.22) определено корректно, при этом если менять параметр θ, то решение будет непрерывной вектор-функцией от (t, θ).

§ 3. Свойства решений интегральной системы при $\theta \to \infty$

В этом параграфе нас будет интересовать поведение решения $z(t, \theta)$ системы (2.21), (2.22) при $\theta \to \infty$. Для простоты будем рассматривать случай, когда θ натуральное. Следовательно, решая эту систему при различных $\theta = m \in \mathbb{N}$, получим последовательность вектор-функций $\{z^m(t)\}$, где $z^m(t) = (x^m(t), y^m(t))$,

$$x^m(t) \equiv qm \int\limits_0^{t-\tau} e^{-m(t-\tau-s)} y^m(s)\, ds, \quad t > \tau, \tag{3.1}$$

$$y^m(t) \equiv y_0 + \int\limits_0^t f(y^m(s), x^m(s))\, ds, \tag{3.2}$$

при этом $x^m(t) \equiv 0$ при $t \in [0, \tau]$.

Теорема 3. *Пусть функция $f(u, v)$ удовлетворяет условию (2.1) и число $T > \tau$ определено в (2.20). Тогда последовательность $\{z^m(t)\}$ является сходящейся на $(\tau, T]$:*

$$x^m(t) \to \mathscr{X}(t), \quad y^m(t) \to \mathscr{Y}(t), \quad m \to \infty, \tag{3.3}$$

при этом

$$\mathscr{X}(t) = q\mathscr{Y}(t - \tau),$$

$$\mathscr{Y}(t) = y_0 + \int\limits_0^t f(\mathscr{Y}(s), 0)\, ds, \quad t \in [0, \tau], \tag{3.4}$$

$$\mathscr{Y}(t) = y_0 + \int\limits_0^\tau f(\mathscr{Y}(s), 0)\, ds + \int\limits_\tau^t f(\mathscr{Y}(s), q\mathscr{Y}(s - \tau))\, ds, \quad t \in (\tau, T]. \tag{3.5}$$

Доказательство. Доказательство сходимости (3.3) будем проводить последовательно по промежуткам $(j\tau, (j + 1)\tau]$, принадлежащим $(\tau, T]$.

Вначале рассмотрим отрезок $[0, \tau]$. Поскольку $x^m(t) \equiv 0$, из (3.2) имеем

$$y^m(t) \equiv y_0 + \int\limits_0^t f(y^m(s), 0)\, ds,$$

т. е. последовательность $\{y^m(t)\}$ является стационарной: $y^m(t) \equiv y(t)$, $m \in \mathbb{N}$. По определению полагаем $\mathscr{Y}(t) = y(t)$, $t \in [0,\tau]$. Тогда функция $\mathscr{Y}(t)$ при $t \in [0,\tau]$ является решением уравнения (3.4). Отсюда в силу (2.1)

$$\max_{t\in[0,\tau]} |\mathscr{Y}(t)| \le |y_0| + \tau F. \tag{3.6}$$

Рассмотрим промежуток $(\tau, 2\tau]$. Из условия $\tau < t \le 2\tau$ имеем $0 < t-\tau \le \tau$, поэтому

$$x^m(t) = qm \int\limits_0^{t-\tau} e^{-m(t-\tau-s)}\mathscr{Y}(s)\,ds.$$

Покажем, что последовательность $\{x^m(t)\}$ является сходящейся на $(\tau, 2\tau]$, при этом

$$x^m(t) \to \mathscr{X}(t) \equiv q\mathscr{Y}(t-\tau), \quad m \to \infty. \tag{3.7}$$

Более того, сходимость является равномерной на $[\tau+\delta, 2\tau]$ для любого $\delta > 0$.

Рассмотрим разность

$$u^m(t) = x^m(t) - q\mathscr{Y}(t-\tau) \tag{3.8}$$

и представим ее в виде

$$u^m(t) = x^m(t) - q\mathscr{Y}(t-\tau)(1-e^{-m(t-\tau)}) - q\mathscr{Y}(t-\tau)e^{-m(t-\tau)}.$$

Поскольку

$$1 - e^{-m(t-\tau)} = m\int\limits_0^{t-\tau} e^{-m(t-\tau-s)}\,ds,$$

то

$$u^m(t) = qm\int\limits_0^{t-\tau} e^{-m(t-\tau-s)}[\mathscr{Y}(s) - \mathscr{Y}(t-\tau)]\,ds - q\mathscr{Y}(t-\tau)e^{-m(t-\tau)}.$$

Отсюда в силу (3.4) имеем

$$u^m(t) = qm\int\limits_0^{t-\tau} e^{-m(t-\tau-s)}\left(\int\limits_{t-\tau}^{s} f(\mathscr{Y}(\xi),0)\,d\xi\right)ds - q\mathscr{Y}(t-\tau)e^{-m(t-\tau)}.$$

Учитывая (2.1) и (3.6), получим следующее неравенство:

$$|u^m(t)| \le qFm\int\limits_0^{t-\tau} e^{-m(t-\tau-s)}(t-\tau-s)\,ds + q(|y_0| + \tau F)e^{-m(t-\tau)}$$

$$\le qF\frac{1}{m}\int\limits_0^{\infty} e^{-\eta}\eta d\eta + q(|y_0| + \tau F)e^{-m(t-\tau)}.$$

Следовательно, при любом $t \in (\tau, 2\tau]$

$$u^m(t) \to 0, \quad m \to \infty,$$

причем сходимость равномерна на $[\tau+\delta, 2\tau]$ для любого $\delta > 0$. В силу определения (3.8) при $t \in (\tau, 2\tau]$ имеем сходимость (3.7), при этом сходимость равномерна на $[\tau+\delta, 2\tau]$ для любого $\delta > 0$.

Покажем, что последовательность $\{y^m(t)\}$ является равномерно сходящейся на $[\tau, 2\tau]$:

$$y^m(t) \to \mathscr{Y}(t), \quad m \to \infty. \tag{3.9}$$

В силу (3.2), очевидно, получим

$$\begin{aligned} y^m(t) = y_0 + \int\limits_0^\tau f(y^m(s), x^m(s))\,ds + \int\limits_\tau^t f(y^m(s), x^m(s))\,ds \\ = y_0 + \int\limits_0^\tau f(\mathscr{Y}(s), 0)\,ds + \int\limits_\tau^t f(y^m(s), x^m(s))\,ds \\ = y_0 + \int\limits_0^\tau f(\mathscr{Y}(s), 0)\,ds + \int\limits_\tau^t [f(y^m(s), x^m(s)) - f(y^m(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\,ds \\ + \int\limits_\tau^t f(y^m(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))\,ds. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Покажем теперь, что последовательность $\{y^m(t)\}$ фундаментальна в $C[\tau, 2\tau]$. Ввиду (3.10) для любого $l \ge 1$ имеем

$$\begin{aligned} y^{m+l}(t) - y^m(t) = \int\limits_\tau^t [f(y^{m+l}(s), x^{m+l}(s)) - f(y^{m+l}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\,ds \\ - \int\limits_\tau^t [f(y^m(s), x^m(s)) - f(y^m(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\,ds \\ + \int\limits_\tau^t [f(y^{m+l}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau)) - f(y^m(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\,ds \\ = \int\limits_\tau^{\tau+\delta} [f(y^{m+l}(s), x^{m+l}(s)) - f(y^{m+l}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\,ds \\ + \int\limits_{\tau+\delta}^t [f(y^{m+l}(s), x^{m+l}(s)) - f(y^{m+l}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\,ds \\ - \int\limits_\tau^{\tau+\delta} [f(y^m(s), x^m(s)) - f(y^m(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\,ds \\ - \int\limits_{\tau+\delta}^t [f(y^m(s), x^m(s)) - f(y^m(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\,ds \\ + \int\limits_\tau^t [f(y^{m+l}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau)) - f(y^m(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\,ds. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая условие (2.1), получим

$$\max_{[\tau,2\tau]} |y^{m+l}(t) - y^m(t)| \le 4\delta F + \tau L_1 \max_{[\tau,2\tau]} |y^{m+l}(t) - y^m(t)|$$
$$+ \tau L_2 \max_{[\tau+\delta,2\tau]} |x^{m+l}(s) - q\mathscr{Y}(s-\tau)| + \tau L_2 \max_{[\tau+\delta,2\tau]} |x^m(s) - q\mathscr{Y}(s-\tau)|.$$

Поскольку $\tau L_1 < 1 - q$, то

$$q \max_{[\tau,2\tau]} |y^{m+l}(t) - y^m(t)| \le 4\delta F + \tau L_2 \max_{[\tau+\delta,2\tau]} |x^{m+l}(s) - q\mathscr{Y}(s-\tau)|$$
$$+ \tau L_2 \max_{[\tau+\delta,2\tau]} |x^m(s) - q\mathscr{Y}(s-\tau)|. \quad (3.11)$$

Из произвольности $\delta > 0$ и равномерной сходимости (3.7) следует, что последовательность $\{y^m(t)\}$ фундаментальна в $C[\tau, 2\tau]$. Поэтому имеет место сходимость (3.9).

В силу (3.7) и (3.9) в (3.2) можно перейти к пределу при $m \to \infty$ на отрезке $[\tau, 2\tau]$ и получить (3.5). Действительно, согласно (3.2), учитывая условие (2.1), приходим к соотношению

$$\left| y^m(t) - \left(y_0 + \int_0^\tau f(\mathscr{Y}(s), 0)\, ds + \int_\tau^t f(\mathscr{Y}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))\, ds \right) \right|$$
$$= \left| \int_\tau^t [f(y^m(s), x^m(s)) - f(\mathscr{Y}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\, ds \right|$$
$$\le \left| \int_\tau^{\tau+\delta} [f(y^m(s), x^m(s)) - f(y^m(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\, ds \right|$$
$$+ \left| \int_{\tau+\delta}^t [f(y^m(s), x^m(s)) - f(y^m(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\, ds \right|$$
$$+ \left| \int_\tau^t [f(y^m(s), q\mathscr{Y}(s-\tau)) - f(\mathscr{Y}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\, ds \right|$$
$$\le 2\delta F + \tau L_2 \max_{[\tau+\delta,2\tau]} |x^m(t) - q\mathscr{Y}(t-\tau)| + \tau L_1 \max_{[\tau,2\tau]} |y^m(t) - \mathscr{Y}(t)|.$$

Используя (3.7) и (3.9), имеем

$$\varlimsup_{m\to\infty} \left| y^m(t) - \left(y_0 + \int_0^\tau f(\mathscr{Y}(s), 0)\, ds + \int_\tau^t f(\mathscr{Y}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))\, ds \right) \right| \le 2\delta F.$$

Поэтому ввиду произвольности $\delta > 0$ при $t \in [\tau, 2\tau]$

$$y^m(t) \to y_0 + \int_0^\tau f(\mathscr{Y}(s), 0)\, ds + \int_\tau^t f(\mathscr{Y}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))\, ds, \quad m \to \infty.$$

С другой стороны, $y^m(t) \to \mathscr{Y}(t)$ при $m \to \infty$, и (3.5) получается из единственности предела.

Отметим, что из (3.5) в силу условия (2.1), очевидно, будем иметь

$$\max_{t\in[0,2\tau]} |\mathscr{Y}(t)| \le |y_0| + 2\tau F. \tag{3.12}$$

Рассмотрим промежуток $(2\tau, 3\tau]$. Из (3.1) с учетом предыдущего имеем

$$x^m(t) = qm\int\limits_0^\tau e^{-m(t-\tau-s)}\mathscr{Y}(s)\,ds + qm\int\limits_\tau^{t-\tau} e^{-m(t-\tau-s)}y^m(s)\,ds = x_1^m(t) + x_2^m(t). \tag{3.13}$$

Покажем, что последовательность $\{x^m(t)\}$ является сходящейся на $(2\tau, 3\tau]$, при этом имеет место сходимость (3.7). Более того, сходимость равномерна на $[2\tau+\delta, 3\tau]$ для любого сколь угодно малого $\delta > 0$.

Прежде всего заметим, что на промежутке $(2\tau, 3\tau]$ в силу оценки (3.6) получаем неравенство

$$|x_1^m(t)| \le qm\int\limits_0^\tau e^{-m(t-\tau-s)}(|y_0| + \tau F)\,ds = q(|y_0| + \tau F)(e^{-m(t-2\tau)} - e^{-m(t-\tau)}).$$

Отсюда

$$x_1^m(t) \to 0, \quad m \to \infty, \tag{3.14}$$

и сходимость равномерна на $[2\tau+\delta, 3\tau]$ для любого $\delta > 0$.

Покажем, что

$$x_2^m(t) \to q\mathscr{Y}(t-\tau), \quad m \to \infty, \tag{3.15}$$

при этом сходимость равномерна на $[2\tau+\delta, 3\tau]$ для любого $\delta > 0$.

Рассмотрим разность

$$U^m(t) = x_2^m(t) - q\mathscr{Y}(t-\tau). \tag{3.16}$$

Учитывая равенство

$$1 - e^{-m(t-2\tau)} = m\int\limits_\tau^{t-\tau} e^{-m(t-\tau-s)}\,ds, \tag{3.17}$$

представим $U^m(t)$ в виде

$$\begin{aligned} U^m(t) = qm&\int\limits_\tau^{t-\tau} e^{-m(t-\tau-s)}(y^m(s) - \mathscr{Y}(s))\,ds \\ &+ qm\int\limits_\tau^{t-\tau} e^{-m(t-\tau-s)}(\mathscr{Y}(s) - \mathscr{Y}(t-\tau))\,ds - q\mathscr{Y}(t-\tau)e^{-m(t-2\tau)}. \end{aligned}$$

Тогда в силу (3.5)

$$\begin{aligned} U^m(t) &= qm\int\limits_\tau^{t-\tau} e^{-m(t-\tau-s)}(y^m(s) - \mathscr{Y}(s))\,ds \\ &+ qm\int\limits_\tau^{t-\tau} e^{-m(t-\tau-s)}\left(\int\limits_{t-\tau}^{s} f(\mathscr{Y}(\xi), q\mathscr{Y}(\xi-\tau))d\xi\right)ds - q\mathscr{Y}(t-\tau)e^{-m(t-2\tau)} \\ &= U_1^m(t) + U_2^m(t) + U_3^m(t). \end{aligned}$$

Учитывая равномерную сходимость (3.9) и равенство (3.17), имеем равномерную сходимость

$$U_1^m(t) \to 0, \quad m \to \infty.$$

В силу условия (2.1), как при рассмотрении функции (3.8), очевидно, получаем оценку

$$\left|U_2^m(t)\right| \le qF\frac{1}{m}\int\limits_0^\infty e^{-\eta}\eta d\eta,$$

а применяя неравенство (3.12), имеем также

$$\left|U_3^m(t)\right| \le q(|y_0| + 2\tau F)e^{-m(t-2\tau)}.$$

Следовательно, при любом $t \in (2\tau, 3\tau]$

$$U^m(t) \to 0, \quad m \to \infty,$$

причем сходимость является равномерной на $[2\tau + \delta, 3\tau]$ для любого $\delta > 0$. Отсюда непосредственно вытекает сходимость (3.15).

Рассмотрим теперь последовательность $\{y^m(t)\}$ и покажем, что она равномерно сходится на отрезке $[2\tau, 3\tau]$.

Из (3.2), очевидно, имеем

$$y^m(t) = y_0 + \int\limits_0^\tau f(y^m(s), 0)\, ds + \int\limits_\tau^{2\tau} f(y^m(s), x^m(s))\, ds + \int\limits_{2\tau}^t f(y^m(s), x^m(s))\, ds$$

$$= y^m(2\tau) + \int\limits_{2\tau}^t [f(y^m(s), x^m(s)) - f(y^m(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\, ds + \int\limits_{2\tau}^t f(y^m(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\, ds. \qquad (3.18)$$

Тогда для любого $l \ge 1$

$$\begin{aligned} y^{m+l}(t) - y^m(t) &= y^{m+l}(2\tau) - y^m(2\tau) + \int\limits_{2\tau}^{2\tau+\delta} [f(y^{m+l}(s), x^{m+l}(s)) - f(y^{m+l}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\, ds \\ &+ \int\limits_{2\tau+\delta}^{t} [f(y^{m+l}(s), x^{m+l}(s)) - f(y^{m+l}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\, ds \\ &- \int\limits_{2\tau}^{2\tau+\delta} [f(y^{m}(s), x^{m}(s)) - f(y^{m}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\, ds \\ &- \int\limits_{2\tau+\delta}^{t} [f(y^{m}(s), x^{m}(s)) - f(y^{m}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\, ds \\ &+ \int\limits_{2\tau}^{t} [f(y^{m+l}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau)) - f(y^{m}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\, ds. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая условия (2.1) и оценку (3.11), получим

$$\max_{[2\tau,3\tau]} |y^{m+l}(t) - y^m(t)| \le \frac{1}{q}(4\delta F + \tau L_2 \max_{[\tau+\delta,2\tau]} |x^{m+l}(s) - q\mathscr{Y}(s-\tau)|$$

$$+\tau L_2 \max_{[\tau+\delta,2\tau]} |x^m(s) - q\mathscr{Y}(s-\tau)|) + 4\delta F + \tau L_1 \max_{[2\tau,3\tau]} |y^{m+l}(t) - y^m(t)|$$
$$+\tau L_2 \max_{[2\tau+\delta,3\tau]} |x^{m+l}(s) - q\mathscr{Y}(s-\tau)| + \tau L_2 \max_{[2\tau+\delta,3\tau]} |x^m(s) - q\mathscr{Y}(s-\tau)|.$$

Поскольку $\tau L_1 < 1 - q$, имеем

$$q \max_{[2\tau,3\tau]} |y^{m+l}(t) - y^m(t)| \le \frac{1}{q}(4\delta F + \tau L_2 \max_{[\tau+\delta,2\tau]} |x^{m+l}(s) - q\mathscr{Y}(s-\tau)|$$
$$+\tau L_2 \max_{[\tau+\delta,2\tau]} |x^m(s) - q\mathscr{Y}(s-\tau)|) + 4\delta F + \tau L_2 \max_{[2\tau+\delta,3\tau]} |x^{m+l}(s) - q\mathscr{Y}(s-\tau)|$$
$$+\tau L_2 \max_{[2\tau+\delta,3\tau]} |x^m(s) - q\mathscr{Y}(s-\tau)|. \quad (3.19)$$

Из произвольности $\delta > 0$ и равномерной сходимости (3.7) на отрезках $[\tau+\delta, 2\tau]$, $[2\tau+\delta, 3\tau]$ следует, что последовательность $\{y^m(t)\}$ фундаментальна в $C[2\tau, 3\tau]$. Поэтому на отрезке $[2\tau, 3\tau]$ имеет место равномерная сходимость (3.9).

Из доказанных оценок (3.11), (3.19) и проведенных рассуждений вытекает, что последовательность $\{y^m(t)\}$ равномерно сходится к функции $\mathscr{Y}(t)$ на всем отрезке $[\tau, 3\tau]$.

Учитывая теперь (3.7) и (3.9), нетрудно установить, что на отрезке $[2\tau, 3\tau]$ в (3.2) можно перейти к пределу при $m \to \infty$ и получить равенство (3.5). Действительно, применяя формулу (3.18), имеем

$$\left| y^m(t) - \left(\mathscr{Y}(2\tau) + \int_{2\tau}^{t} f(\mathscr{Y}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))\, ds \right) \right|$$
$$\le |y^m(2\tau) - \mathscr{Y}(2\tau)| + \left| \int_{2\tau}^{2\tau+\delta} [f(y^m(s), x^m(s)) - f(y^m(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\, ds \right|$$
$$+ \left| \int_{2\tau+\delta}^{t} [f(y^m(s), x^m(s)) - f(y^m(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\, ds \right|$$
$$+ \left| \int_{2\tau}^{t} [f(y^m(s), q\mathscr{Y}(s-\tau)) - f(\mathscr{Y}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))]\, ds \right|.$$

Отсюда в силу равномерной сходимости (3.7) на отрезке $[2\tau+\delta, 3\tau]$ и равномерной сходимости (3.9) на отрезке $[2\tau, 3\tau]$, переходя к пределу, получим

$$\varlimsup_{m\to\infty} \left| y^m(t) - \left(\mathscr{Y}(2\tau) + \int_{2\tau}^{t} f(\mathscr{Y}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))\, ds \right) \right| \le 2\delta F.$$

Ввиду произвольности $\delta > 0$ приходим при $t \in [2\tau, 3\tau]$ к сходимости

$$y^m(t) \to \mathscr{Y}(2\tau) + \int_{2\tau}^{t} f(\mathscr{Y}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))\, ds, \quad m \to \infty.$$

Но поскольку

$$\mathscr{Y}(2\tau) = y_0 + \int_0^{\tau} f(\mathscr{Y}(s), 0)\, ds + \int_{\tau}^{2\tau} f(\mathscr{Y}(s), q\mathscr{Y}(s-\tau))\, ds$$

и $y^m(t) \to \mathscr{Y}(t)$, $m \to \infty$, в силу единственности предела получаем справедливость равенства (3.5) на промежутке $(2\tau, 3\tau]$.

Если $3\tau < T$, то доказательство сходимости (3.3) и равенства (3.5) при $t \in (3\tau, T]$ проводится последовательно по промежуткам $(j\tau, (j+1)\tau]$ по этой же схеме.

Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы 3 следует, что

$$\mathscr{Y}(t) \in C[0,T] \cap C^1(0,\tau) \cap C^1(\tau,T).$$

Отметим, что производная $\frac{d}{dt}\mathscr{Y}(\tau)$, вообще говоря, не существует. В силу (3.4), (3.5) для функции $\mathscr{Y}(t)$ будут выполняться тождества

$$\frac{d}{dt}\mathscr{Y}(t) \equiv f(\mathscr{Y}(t), q\mathscr{Y}(t-\tau)) \quad \text{при} \quad \tau < t < T,$$

$$\mathscr{Y}(t) \equiv y_0 + \int_0^t f(\mathscr{Y}(s), 0)\, ds \quad \text{при} \quad 0 \le t \le \tau.$$

Следовательно, на промежутке $[0,\tau)$ функция $\mathscr{Y}(t)$ является решением задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}\mathscr{Y} = f(\mathscr{Y}(\cdot), 0), \quad \mathscr{Y}|_{t=0} = y_0,$$

а на интервале (τ, T) эта функция является решением уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{d}{dt}\mathscr{Y} = f(\mathscr{Y}(\cdot), q\mathscr{Y}(\cdot - \tau)).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г.* Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.
2. *Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И.* Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.
3. *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1994.

Статья поступила 16 февраля 2005 г.

Демиденко Геннадий Владимирович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
demidenk@math.nsc.ru

Лихошвай Виталий Александрович
Институт цитологии и генетики СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 2, Новосибирск 630090
likho@bionet.nsc.ru