*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2005. Том 46, № 3*

*УДК 512.542*

# ОБ ОРБИТАХ ГРУПП АВТОМОРФИЗМОВ

**М. Деаконеску, Г. Л. Уоллс**

**Аннотация:** Если $G$ — конечная группа и $A$ — группа автоморфизмов $G$ с подгруппой неподвижных точек $C_G(A)$, то каждая подгруппа $F$ в $C_G(A)$ действует на множестве орбит $A$ в $G$. Особенности этого действия используются для вывода некоторых результатов о числе орбит $A$.

**Ключевые слова:** конечная группа, орбита автоморфизма, действие группы, стабилизатор.

## 1. Введение

Рассмотрим следующее утверждение: «если $G$ — конечная $p$-группа и $p$ не делит число классов сопряженности в $G$, то каждый элемент в центре $G$ является коммутатором». Цель настоящей работы — получить подобные (а также некоторые другие, надеемся, новые) по виду простые результаты путем формирования общей схемы, из которой эти результаты вытекают как частные случаи.

Пусть $G$ — конечная группа, $A \leq \mathrm{Aut}(G)$, и пусть $C_G(A)$ обозначает подгруппу неподвижных точек $A$ в $G$. Поводом для данной заметки послужила работа Глаубермана [1], где последовательности, связанные с действием $A$ на $G$, находятся в предположении $(|G|, |A|) = 1$. Роули [2] впоследствии использовал результаты из [1] и CFSG для доказательства того, что если $C_G(A) = 1$ и либо $A$ циклическая, либо $(|G|, |A|) = 1$, то $G$ разрешима.

Когда $G$ и $A$ суть нетривиальные $p$-группы или когда $A$ — нетривиальная группа внутренних автоморфизмов $G$, условие $(|G|, |A|) = 1$ не выполнено и тем самым не применим такой полезный результат, как теорема Шура — Цассенхауза. Можно спросить: что можно сказать о действии $A$ на $G$ в отсутствие какого-либо из ограничений $(|G|, |A|) = 1$ и $C_G(A) = 1$?

Представленный здесь материал основан на простом наблюдении: если $F \leq C_G(A)$, то $F$ действует (возможно, тривиально) естественным образом на множестве орбит $A$ в $G$. Стабилизаторы в $F$ орбит $A$ в $G$ могут быть эффективно вычислены. Эти стабилизаторы имеют хорошие свойства, которые можно использовать для вывода следствий, если что-то известно дополнительно об $A$ и/или $F$. Разумеется, для получения содержательных результатов надо иметь соотношение $1 < C_G(A) < G$. Все рассматриваемые здесь группы конечны. Необъясняемые обозначения достаточно стандартны, см. [3, 4].

## 2. Лемма об орбитах автоморфизмов

Вначале остановимся на некоторых обозначениях. Центр $G$ будем обозначать через $Z$. Для $x \in G$ и $\tau \in A$ положим

$$[x, \tau] = x^{-1}\tau(x), \quad C_A(x) = \{\alpha \in A \mid x = \alpha(x)\}, \quad C_G(\tau) = \{g \in G \mid \tau(g) = g\}.$$

Как обычно, $[G,A]=\langle [g,\alpha] \mid g\in G,\ \alpha\in A\rangle$. Если $\varnothing\neq U\subseteq G$, введем обозначение $N_A(U)=\{\alpha\in A\mid \alpha(U)=U\}$, $C_A(U)=\{\alpha\in A|\alpha|_U=\mathrm{id}_U\}$.

Для $x\in G$ пусть $O(x)=\{\tau(x)\mid \tau\in A\}$ — орбита $x$ при естественном действии $A$ на $G$. Тогда $|O(x)|=|A:C_A(x)|$ и $x^{-1}O(x)=\{[x,\tau]\mid \tau\in A\}$. Пусть $O(G,A)=\{O(x)\mid x\in G\}$ — множество орбит $A$ в $G$ и $k(G,A)=|O(G,A)|$.

Рассмотрим подгруппу $F$ в $C_G(A)$, и пусть $F$ действует на $O(G,A)$ следующим образом: $O(x)^f:=O(x)f=O(xf)$ для всех $O(x)\in O(G,A)$ и $f\in F$. Тогда, очевидно, $|O(x)^f|=|O(x)|$. Для $O(x)\in O(G,A)$ пусть $O(x)^F=\{O(x)^f\mid f\in F\}$ — орбита $O(x)$ под действием $F$ на $O(G,A)$ и $S_F(O(x))$ — стабилизатор $O(x)$ в $F$. Тогда для множества $T$ представителей орбит $F$ на $O(G,A)$ справедливо известное тождество

$$k(G,A)=\sum_{O(x)\in T}|F:S_F(O(x))|. \tag{1}$$

Докажем следующую основную лемму.

**2.1. Лемма.** *Пусть $G$ — конечная группа и $A\leq \mathrm{Aut}(G)$. Пусть $F\leq C_G(A)$ действует на $O(G,A)$ по правилу $O(x)^f=O(xf)$. Тогда для каждого $x\in G$*

$$S_F(O(x))=F\cap x^{-1}O(x)\cong N_A(xF)/C_A(xF)=N_A(xF)/C_A(x).$$

Доказательство. Вначале отметим, что

$$S_F(O(x))=F\cap\{[x,\tau]\mid\tau\in A\}=F\cap x^{-1}O(x).$$

Далее, заметим, что $\tau\in N_A(xF)$ тогда и только тогда, когда $[x,\tau]\in F$, и используем это для определения $\varphi: N_A(xF)\to S_F(O(x))$ согласно правилу $\varphi(\tau)=[x,\tau]$ для всех $\tau\in N_A(xF)$. Если $\alpha,\beta\in N_A(xF)$, то

$$\begin{aligned}\phi(\alpha\beta)=x^{-1}\alpha\beta(x)&=x^{-1}\alpha(x)\alpha(x^{-1})\alpha\beta(x)=(x^{-1}\alpha(x))\alpha(x^{-1}\beta(x))\\&=(x^{-1}\alpha(x))(x^{-1}\beta(x))=[x,\alpha][x,\beta]=\varphi(\alpha)\varphi(\beta),\end{aligned}$$

поэтому $\varphi$ — групповой морфизм. Так как $\varphi$ — отображение «на» и $\mathrm{Ker}\,\varphi=C_A(xF)=C_A(x)$, приходим к требуемому результату.

2.2. Замечания.

(i) Если $A=1$, то $C_A(G)=G$, и если взять $F:=G$ в лемме 2.1, получим, что действие $F$ на $O(G,A)$, по существу, правое регулярное представление $G$.

(ii) $|O(x)^F|=1$ тогда и только тогда, когда $F\subseteq x^{-1}O(x)$. В частности, если $F>1$, то ни одна из орбит $A$ длины 1 не остается неподвижной относительно $F$. Действительно, если $F>1$, то $F$ действует регулярно на множестве $\{\{f\}\mid f\in F\}$.

(iii) Ввиду того, что $S_F(O(x))$ изоморфно секции $A$, если $A\in\mathscr{F}$ и $\mathscr{F}$ — класс групп, замкнутых относительно взятия секций, то $S_F(O(x))\in\mathscr{F}$ для всех $O(x)\in O(G,A)$. Поэтому есть определенная взаимосвязь между структурами $A$ и $C_G(A)$, хотя и неявная.

В обозначениях леммы 2.1 получаем

**2.3. Следствие.** *Пусть $x\in G$ и $F\leq C_G(A)$.*

(i) *$|xF\cap O(x)|$ делит $(|F|,|O(x)|)$.*

(ii) *Если $(|F|,|A|)=1$, то $|F|$ делит $k(G,A)$ и $k(G,A)/|F|$ — число орбит $F$ на $O(G,A)$.*

(iii) $|F : Z(F)|$ *делит* $k(N_G(F), A)$. *Если* $F \triangleleft G$ *и* $(|F : Z(F)|, k(G, A)) = 1$, *то* $F$ *абелева.*

Доказательство. (i) Согласно лемме 2.1

$$|xF \cap O(x)| = |F \cap x^{-1}O(x)| = |S_F(O(x))|,$$

поэтому $|xF \cap O(x)|$ делит $|F|$. Также по лемме 2.1 $|S_F(O(x))| = |N_A(xF) : C_A(x)|$ делит $|A : C_A(x)| = |O(x)|$.

(ii) Если $(|F|, |A|) = 1$, то (i) влечет $S_F(O(x)) = 1$, и требуемое вытекает из равенства (1).

(iii) Так как, очевидно, $N_G(F)$ $A$-инвариантна, не уменьшая общности, можно считать, что $F \triangleleft G$. Если $F \triangleleft G$, то $[G, A] \leq C_G(F)$. По лемме 2.1

$$S_F(O(x)) = F \cap x^{-1}O(x) \subseteq F \cap [G, A] \subseteq F \cap C_G(F) = Z(F).$$

Тем самым $|F : S_F(O(x))| = |O(x)^F|$ кратно $|F : Z(F)|$ и мы приходим к результату, учитывая равенство (1).

2.4. Замечания.

(i) Первое утверждение следствия 2.3(ii) может быть получено непосредственно с помощью леммы Коши — Фробениуса (леммы, не являющейся бернсайдовой), примененной к действию $A$ на $G$, однако она не объясняет смысла числа $k(G, A)/|F|$, являющегося целым.

(ii) Если $A$ абелева и $F$ — неабелева $p$-группа, то $p \mid k(G, A)$. Действительно, ввиду леммы 2.1 получаем, что $S_F(O(x))$ абелева для всех $O(x) \in O(G, A)$. Отсюда $S_F(O(x)) < F$ для всех $O(x) \in O(G, A)$ и замечание вытекает из равенства (1).

(iii) Из леммы 2.1 и (1) следует, что если $F$ — нетривиальная $p$-группа и $p$ не делит $k(G, A)$, то существует $O(x) \in O(G, A)$ такая, что $S_F(O(x)) = F$; отсюда $F \subseteq x^{-1}O(x)$ и тем самым $|F|$ делит $|O(x)|$ согласно следствию 2.3(i).

## 3. Применения

Можно получить более точные результаты, если есть дополнительная информация об $A$ и/или $F$. Пусть сначала $A := I = \mathrm{Inn}(G)$ — группа внутренних автоморфизмов $G$ и в лемме 2.1 возьмем $F = Z = C_G(I)$. Тогда $O(x) = \mathrm{cl}(x) = \{x^g \mid g \in G\}$, $x^{-1}O(x) = \{[x, g] \mid g \in G\}$, $k(G, A) = k(G) = |\,\mathrm{Irr}(G)|$, $C_A(x) \cong C_G(x)/Z$, $I \cong \overline{G} := G/Z$ и $S_Z((\mathrm{cl}(x)) = Z \cap \{[x, g] \mid g \in G\}$. Наконец, если $x \in G$, положим $\bar{x} := xZ$.

Обращение к таблицам характеров в [4] показывает, что $SL(2, 3)$ имеет центр порядка 2 и единственный класс сопряженности $\mathrm{cl}(x)$ размера 6. Такая ситуация не является типичной, поэтому назовем класс сопряженности $\mathrm{cl}(x)$ группы $G$ *специальным*, если $|\,\mathrm{cl}(x)| \neq |\,\mathrm{cl}(y)|$ в случае $\mathrm{cl}(x) \neq \mathrm{cl}(y)$. В общей ситуации справедливо

**3.1. Следствие.** *Если* $G$ *имеет специальный класс сопряженности* $\mathrm{cl}(x)$, *то* $Z$ *состоит из коммутаторов и* $|Z|$ *делит* $|\,\mathrm{cl}(x)|$. *Если* $Z > 1$, *то* $\chi(x) = 0$ *для всех* $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, *удовлетворяющих* $Z \nleq \mathrm{Ker}\,\chi$.

Доказательство. Предположим, не уменьшая общности, что $Z > 1$. Поскольку $\mathrm{cl}(x)$ специальна, имеем $|\,\mathrm{cl}(x)^Z| = 1$, откуда $Z = S_Z(\mathrm{cl}(x)) = Z \cap \{[x, g] \mid g \in G\}$. Утверждение о том, что $|Z|$ делит $|\,\mathrm{cl}(x)|$, вытекает из следствия 2.3(i).

Ввиду 2.4(iii) $|C_{\overline{G}}(\bar{x})| = |C_{\overline{G}}(x)||Z| = |C_G(x)|$, откуда $|C_G(x)| = |C_{\overline{G}}(\bar{x})|$. Последнее утверждение следует из равенства

$$|C_G(x)| = |C_{\overline{G}}(\bar{x})| + \sum_{\substack{\chi\in \mathrm{Irr}(G)\\ Z\nleq \mathrm{Ker}\,\chi}} |\chi(x)|^2.$$

Доказательство следующих двух результатов оставляем читателю.

**3.2. Следствие.** *Пусть $G$ — нетривиальная $p$-группа и $p$ не делит $k(G)$. Тогда*

(i) *$Z$ состоит из коммутаторов; если, кроме того, $G$ имеет класс 2, то $Z = G'$;*

(ii) *существует $x \in G$ такой, что $\chi(x) = 0$ для всех $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, для которых $Z \nleq \mathrm{Ker}\,\chi$.*

**3.3. Следствие.** *Пусть $x \in G$ и $\overline{G} = G = G/Z$. Тогда*

(i) *$|xZ \cap \mathrm{cl}(x)|$ делит $(|Z|, |\,\mathrm{cl}(x)|)$;*

(ii) *$|C_G(x)| = |C_{\overline{G}}(\bar{x})||\,\mathrm{cl}(x)^Z|$.*

Пусть теперь $A := \mathrm{Aut}_c(G)$ — группа центральных автоморфизмов $G$, т. е. $\mathrm{Aut}_c(G)$ — группа таких автоморфизмов $G$, которые действуют тривиально на фактор-группе $G/Z$. Известно, что для $\tau \in \mathrm{Aut}_c(G)$ имеем $G' \le C_G(\tau)$ и $\tau(x) \in xZ$, так что $x^{-1}O(x) \subseteq Z$. Тем самым если взять $F := G' \le C_G(\mathrm{Aut}_c(G))$ в лемме 2.1, получим

$$S_{G'}(O(x)) = G' \cap x^{-1}O(x) \subseteq G' \cap Z \le \Phi(G) \cap Z(G').$$

Из этого замечания очевидно вытекают

**3.4. Следствие.** *Если $Z \cap G' = 1$, то $|G'|$ делит $k(G, \mathrm{Aut}_c(G))$.*

**3.5. Следствие.** *Если $G'$ — неабелева $p$-группа, то $p$ делит $k(G, \mathrm{Aut}_c(G))$.*

**3.6. Следствие.** *Если $G'$ — $p$-группа и $p$ не делит $k(G, \mathrm{Aut}_c(G))$, то $G$ нильпотентна класса не менее 2.*

Как мы видели, если $Z > 1$ и $\mathrm{cl}(x)$ — специальный класс сопряженности в $G$, то по крайней мере один неприводимый характер в $G$ обращается в нуль на $x$. В этом случае имеем $|xZ \cap \mathrm{cl}(x)| = |S_Z(\mathrm{cl}(x))| = |Z| > 1$. Здесь важно, что $S_Z(\mathrm{cl}(x)) > 1$. В качестве вариации на эту тему приведем результат о нулях характеров, включающих коммутаторы.

**3.7. Следствие.** *Пусть $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$ и $x, y \in G$ такие, что $[x, y] \in Z(\chi)\backslash \mathrm{Ker}\,\chi$. Тогда $\chi(x) = \chi(y) = 0$.*

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что $\mathrm{Ker}\,\chi = 1$, поскольку $\chi$ — точной характер $G/\mathrm{Ker}\,\chi$. В этом случае $Z = Z(\chi)$ и по предположению $[x, y]$ — нетривиальный элемент в $Z$. Тем самым $x^y = xz$ для некоторого нетривиального $z \in Z$, откуда $\chi(x^y) = \chi(x) = \chi(x)\chi(z)$. Поскольку $\chi$ точный, то $\chi(z) \ne 1$ и $\chi(x) = 0$. Равенство $\chi(y) = 0$ получается из симметричности.

Как видно из следствий 3.2 и 3.6, арифметические ограничения на множестве орбит различных групп автоморфизмов могут оказать сильное влияние на структуру группы. Изоморфизм, даваемый леммой 2.1, наводит на мысль о возможности некоторых связей с группой когомологий. В завершение приведем два примера, связанных с небольшими группами.

Примеры.

(i) Первый пример иллюстрирует следствие 3.2(ii). Пусть

$$G = Q_8 = \langle x, y \mid x^4 = y^4 = 1,\ x^y = x^3 \rangle,$$

так что $Z = \langle x^2 \rangle$ и $k(G) = 5$. В действии на множестве классов сопряженности в $G$ у $Z$ есть четыре орбиты: одна из них $\{\{1\}, \{x^2\}\}$ и три орбиты длины 1, потому что $Z$ оставляет неподвижным каждый класс сопряженности длины 2 в $G$. Единственный нелинейный характер $G$ обращается в нуль на всех трех классах длины 2 ввиду следствия 3.2(ii).

(ii) Второй пример связан со следствием 3.6. Пусть

$$G = \langle x, y \mid x^4 = y^3 = 1,\ y^x = y^2 \rangle.$$

Так как $\langle y \rangle \triangleleft G$ и $|G| = 12$, то $G' = \langle y \rangle$. Кроме того, $Z = \langle x^2 \rangle$ и $G' \cap Z = 1$. Тем самым по следствию 3.6 должно быть, что $3 = |G'|$ делит число орбит $\mathrm{Aut}_c(G)$ в $G$. Действительно, $k(G, \mathrm{Aut}_c(G)) = 9$: есть шесть орбит длины 1 и три орбиты длины 2 у $\mathrm{Aut}_c(G)$ в $G$.

**Благодарности.** Авторы признательны Дж. Глауберману и В. Д. Мазурову за их замечания по первоначальной версии рукописи, а также Дж. Наварро за краткое рассуждение, использованное в доказательстве следствия 3.7. Второй автор благодарен отделению математики и информатики университета Кувейта за финансовую поддержку и теплый прием во время его визита в декабре 2003 г.

## *ЛИТЕРАТУРА*

1. *Glauberman G.* Fixed points in groups with operator groups // Math. Z. 1964. Bd 84. S. 120–125.
2. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Harper& Row, 1968.
3. *Isaacs M. I.* Character Theory of Finite Groups. New York: Acad. Press, 1976.
4. *Rowley P.* Finite groups admitting fixed-point-free automorphism groups // J. Algebra. 1995. V. 174. P. 724–727.

*Статья поступила 24 июня 2004 г.*

*Marian Deaconescu*
*Department of Mathematics and Computer Science,*
*Kuwait University,*
*P.O. Box 5969, Safat 13060, Kuwait*
marian@fasttelco.com, deacon@mcs.sci.kuniv.edu.kw

*Gary L. Walls*
*Department of MPSE, WTAMU,*
*P.O. Box 60787, Canyon, Texas, USA*
gwalls@mail.wtamu.edu