*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2005. Том 46, № 3*

*УДК 510.8*

# ОБ АВТОМОРФНЫХ КОРТЕЖАХ ЭЛЕМЕНТОВ В ВЫЧИСЛИМЫХ МОДЕЛЯХ

**С. С. Гончаров, В. С. Харизанов, Ю. Ф. Найт, А. С. Морозов, А. В. Ромина**

**Аннотация:** Получен критерий существования двух изоморфных, но не гиперарифметически изоморфных кортежей в гиперарифметической модели. Этот критерий использован для доказательства того, что такая ситуация встречается в моделях из некоторых хорошо известных классов.

**Ключевые слова:** модель, вычислимость, вычислимая модель, гиперарифметическая модель, автоморфизм, рекурсивный автоморфизм, допустимые множества, рекурсивная модель, конструктивная модель, ранг Скотта, кванторный ранг, автоморфные кортежи.

## 1. Введение

Мы предполагаем, что читатель знаком с допустимыми множествами (см. [1]) и вычислимыми моделями (см., например, [2] или [3]).

Пусть $\mathfrak{M}$ — модель, основное множество которой является подмножеством $\omega$. Будем говорить, что два кортежа $\bar a, \bar b \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ *автоморфны* (*гиперарифметически автоморфны*), и обозначать этот факт $\bar a \cong \bar b$ ($\bar a \cong_h \bar b$), если существует (гиперарифметический) автоморфизм $f$ модели $\mathfrak{M}$, поэлементно отображающий $\bar a$ в $\bar b$. Поскольку во всех случаях будет ясно, какая модель $\mathfrak{M}$ имеется в виду, она не будет упоминаться в обозначениях.

Существует пример вычислимой модели $\mathfrak{M}$ и ее элементов $a$ и $b$ таких, что для некоторого $f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M})$ выполнено $f(a) = b$, но это свойство не выполняется ни для какого гиперарифметического автоморфизма [4] (это также следует из [5]). В этой работе мы изучаем данное явление и связанные с ним эффекты в общем случае и покажем, что такая ситуация встречается довольно часто. Фактически мы докажем критерий существования таких пар. Как следствие получим серию примеров автоморфных, но не гиперарифметически автоморфных кортежей в моделях из хорошо известных классов.

Мы обозначаем через $\mathbb{HYP}_\omega$ модель $\mathbb{HYP}_{\langle\omega,<\rangle}$, являющуюся наименьшим допустимым множеством над $\langle\omega,<\rangle$, содержащим ее основное множество $\omega$ в качестве элемента.

Нам понадобятся следующие результаты.

Первые четыре автора поддержаны бинациональным грантом NSF DMS-0075899, первый и четвертый авторы частично поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (код проекта 02–01–00953) и программой «Ведущие научные школы» (грант НШ–2112.03.1).

**Теорема 1.1** (теорема компактности Барвайса [1, теорема III 5.6]). *Пусть $L_{\mathbb{A}}$ — счетный допустимый фрагмент языка $L_{\infty,\omega}$ и $T$ — множество предложений языка $L_{\mathbb{A}}$, являющееся $\Sigma_1$-подмножеством $\mathbb{A}$. Если каждое $T_0 \subseteq T$, являющееся элементом $\mathbb{A}$, имеет модель, то и $T$ имеет модель.*

**Теорема 1.2.** *Пусть $\mathfrak{M} \in \mathbb{HYP}_\omega$, $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{M}^n$ и $\mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a}) \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{b})$ для всех $\varphi(\overline{x}) \in \mathbb{HYP}_\omega$. Тогда $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle \cong \langle \mathfrak{M}, \bar{b} \rangle$.*

Доказательство. Это непосредственное следствие теорем VII 7.3, VII 5.2, VII 5.3 из [1]. □

**Теорема 1.3** [1, теоремы IV 3.1 и IV 3.7]. *Пусть $\mathfrak{M}$ — счетная модель и $S$ — отношение на $\mathfrak{M}$. Тогда $S$ является $\Pi^1_1$-отношением на $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $S$ — $\Sigma$-отношение на $\mathbb{HYP}_{\mathfrak{M}}$.*

Заметим, что если $\mathfrak{M}$ — вычислимая модель, то $\mathfrak{M} \in \mathbb{HYP}_\omega$. В этом случае мы можем рассматривать $\mathfrak{M}$ как модель, основное множество которой является начальным сегментом ординала $\omega \in \mathbb{HYP}_\omega$.

Заметим, что произвольное $\Sigma$-подмножество ординала $\omega \in \mathbb{HYP}_\omega$ будет $\Pi^1_1$-подмножеством $\omega$. Это следует из теоремы 1.3 и существования биекции $f \in \mathbb{HYP}_\omega$ из множества $\omega$, рассматриваемого как модель, образующую «дно» структуры $\mathbb{HYP}_\omega$, на множество $\omega \in \mathbb{HYP}_\omega$.

Напомним определение *кванторного ранга* бесконечной формулы [1] (мы предполагаем, что импликация $\Rightarrow$ выражена через $\neg$ и $\wedge$ и, таким образом, не встречается в наших формулах):

$$\mathrm{qr}(\varphi) = \begin{cases} 0, & \text{если } \varphi \text{ бескванторная;} \\ \mathrm{qr}(\psi), & \text{если } \varphi \text{ имеет вид } \neg\psi; \\ \mathrm{qr}(\psi) + 1, & \text{если } \varphi \text{ имеет вид } \exists v\psi \text{ или } \forall v\psi; \\ \sup\{\mathrm{qr}(\psi) \mid \psi \in \Phi\}, & \text{если } \varphi \text{ имеет вид } \bigwedge \Phi \text{ или } \bigvee \Phi. \end{cases}$$

Пусть $\alpha$ — ординал. Модели $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ называются *эквивалентными* (*$\alpha$-эквивалентными*), если они удовлетворяют одним и тем же предложениям (кванторного ранга не более $\alpha$). Обозначаем этот факт так: $\mathfrak{M} \equiv^\alpha \mathfrak{N}$. Два кортежа $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ называются *эквивалентными* (*$\alpha$-эквивалентными*), если они удовлетворяют одним и тем же предложениям (кванторного ранга не более $\alpha$). Этот факт будет обозначаться так: $\bar{a} \equiv \bar{b}$ ($\bar{a} \equiv^\alpha \bar{b}$). Будем говорить, что $\bar{a} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ имеет *кванторный ранг $\alpha$ в модели* $\mathfrak{M}$, если для всех $\bar{b} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ выполнена импликация ($\bar{a} \equiv^\alpha \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \equiv \bar{b}$) и $\alpha$ — наименьший ординал с таким свойством. Он обозначается через $\mathrm{qr}(\bar{a})$. *Рангом Барвайса* $\mathrm{br}(\mathfrak{M})$ модели $\mathfrak{M}$ назовем наименьший ординал $\alpha$ такой, что для всех $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ выполнено ($\bar{a} \equiv^\alpha \bar{b} \Rightarrow \bar{a} \equiv^{\alpha+1} \bar{b}$). Это в точности то же самое, что и ранг Скотта в [1]. Хорошо известно, что ранг Барвайса модели $\mathfrak{M} \in \mathbb{HYP}_\omega$ не превосходит $\omega_1^{\mathrm{CK}}$ [1].

Нам также понадобится существование серии формул $\sigma^\alpha_{\mathfrak{M},\bar{a}}(\bar{x}) \in \mathbb{HYP}_\omega$, где $\mathfrak{M}$ — модель, $\alpha$ — ординал и $\bar{a} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$, обладающих следующими свойствами:

1) формулы $\sigma^\alpha_{\mathfrak{M},\bar{a}}$ определяются с помощью $\Sigma$-функции на $\mathbb{HYP}_\omega$ от $\alpha < \omega_1^{\mathrm{CK}}$, $\mathfrak{M} \in \mathbb{HYP}_\omega$ и $\bar{a} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$;
2) для всех $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ соотношение $\mathfrak{M} \models \sigma^\alpha_{\mathfrak{M},\bar{a}}(\bar{b})$ выполнено тогда и только тогда, когда $\bar{a} \equiv^\alpha \bar{b}$;
3) $\mathrm{qr}\,\sigma^\alpha_{\mathfrak{M}_j\bar{a}} = \alpha$.

Мы опускаем в обозначениях $\mathfrak{M}$ и пишем просто $\sigma^\alpha_{\bar{a}}$, поскольку всякий раз будет ясно, какая модель $\mathfrak{M}$ имеется в виду.

Общие результаты об использовании ординалов для анализа структур см. также в [6].

## 2. Общий результат

**Теорема 2.1.** *Пусть $\mathfrak{M}$ — гиперарифметическая модель. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *существуют кортежи $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ такие, что $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle \cong \langle \mathfrak{M}, \bar{b} \rangle$, но $\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle \not\cong_h \langle \mathfrak{M}, \bar{b} \rangle$;*

2) *существует кортеж $\bar{a} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$, для которого существует бесконечное семейство $(\bar{a}_i)_{i<\omega}$ кортежей из $\mathfrak{M}^{<\omega}$, удовлетворяющих свойствам:*

(a) *$\langle \mathfrak{M}, \bar{a} \rangle \cong \langle \mathfrak{M}, \bar{a}_i \rangle$ для всех $i < \omega$,*

(b) *$\langle \mathfrak{M}, \bar{a}_i \rangle \not\cong_h \langle \mathfrak{M}, \bar{a}_j \rangle$ для всех $i < j < \omega$;*

3) *ранг Барвайса $\mathfrak{M}$ равен $\omega_1^{\mathrm{CK}}$;*

4) *$I_{\mathfrak{M}} \notin \Pi^1_1$, где $I_{\mathfrak{M}} = \{\langle \bar{a}, \bar{b} \rangle \in \mathfrak{M}^{<\omega} \times \mathfrak{M}^{<\omega} \mid \bar{a} \cong \bar{b}\}$.*

Доказательство. Импликация $2 \Rightarrow 1$ очевидна.

$1 \Rightarrow 4$. Для получения противоречия предположим, что $I_{\mathfrak{M}} \in \Pi^1_1$. Тогда $I_{\mathfrak{M}}$ принадлежит $\Delta^1_1$, поскольку $I_{\mathfrak{M}}$ всегда лежит в $\Sigma^1_1$. Используя обычную челночную конструкцию с $I_{\mathfrak{M}}$ в качестве оракула, мы можем легко построить гиперарифметический автоморфизм, отображающий $\bar{a}$ в $\bar{b}$, что является противоречием. Начнем с конечного автоморфизма $f_0 = f$, поэлементно отображающего $\bar{a}$ в $\bar{b}$. На каждом шаге мы, используя оракул $I_{\mathfrak{M}}$, расширяем текущие значения кортежей, добавляя конечные семейства элементов в область определения и в область значений для текущего значения $f$. Делаем это так, чтобы сохранить принадлежность пары этих новых кортежей множеству $I_{\mathfrak{M}}$. На каждом шаге мы добавляем в область определения $f$ наименьшее натуральное число, еще ей не принадлежащее. Затем проделываем то же самое для области значений $f$.

$4 \Rightarrow 3$. Предположим, что $I_{\mathfrak{M}} \notin \Pi^1_1$, но ранг Барвайса модели $\mathfrak{M}$ меньше, чем $\omega_1^{\mathrm{CK}}$. Обозначим его через $\alpha$. В этом случае по определению ранга Барвайса следующие условия эквивалентны:

1) $\bar{a} \cong \bar{b}$;

2) $\mathfrak{M} \models \sigma^{\alpha}_{\mathfrak{M},\bar{a}}[\bar{b}]$.

Поэтому $I_{\mathfrak{M}}$ принадлежит $\Delta^1_1$, что противоречит сделанному раньше предположению.

$3 \Rightarrow 2$. Предположим для получения противоречия, что для каждого кортежа $\bar{a} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ число типов гиперарифметического изоморфизма внутри его орбиты относительно автоморфизмов конечно, а именно

$$\forall \bar{a}_1 \in \mathfrak{M}^{<\omega}\ \exists t \in \omega\ \forall \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_t\ \left( \bigwedge_{i=2}^{t} \bar{a}_1 \cong \bar{a}_i \Rightarrow \bigvee_{1 \le i < j \le t} \bar{a}_i \cong_h \bar{a}_j \right).$$

Это можно переписать так:

$$\forall \bar{a}_1 \in \mathfrak{M}^{<\omega} \exists t \in \omega \forall \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_t \exists \beta \left( \bigvee_{i=2}^{t} \bar{a}_1 \not\equiv^{\beta} \bar{a}_i\ \vee \bigvee_{1 \le i < j \le t} \bar{a}_i \cong_h \bar{a}_j \right).$$

(Здесь мы используем естественные сокращения типа

$$\bigvee_{i=2}^{t} \bar{a}_1 \not\equiv^{\beta} \bar{a}_i \quad \text{для } \exists i \le t (i \ge 2\ \&\ \bar{a}_1 \not\equiv^{\beta} \bar{a}_i),$$

$$\forall \bar{a}_2 \dots \bar{a}_t (\dots) \quad \text{для } \forall m((m \text{ кодирует } \langle \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_t\rangle) \Rightarrow (\dots)) \text{ и т. д.})$$

Двойное применение $\Sigma$-выборки дает нам существование $\alpha < \omega_1^{\mathrm{CK}}$ такого, что

$$\forall \bar{a}_1 \in \mathfrak{M}^{<\omega} \exists t \in \omega \forall \bar{a}_2 \dots \bar{a}_t \left( \bigwedge_{i=2}^{t} \bar{a}_1 \equiv^{\alpha} \bar{a}_i \Rightarrow \bigvee_{1\le i<j\le t} \bar{a}_i \cong_h \bar{a}_j \right). \qquad (1)$$

Покажем, что ранг Барвайса модели $\mathfrak{M}$ не превосходит $\alpha+\omega$, что будет противоречить исходному предположению. Фактически мы докажем, что если некоторые кортежи $\bar{a}, \bar{b} \in \mathfrak{M}^{<\omega}$ удовлетворяют $\bar{a} \equiv^{\alpha+\omega} \bar{b}$, то $\bar{a} \cong \bar{b}$. Для доказательства достаточно проверить, что если $\bar{a} \equiv^{\alpha+\omega} \bar{b}$, то тогда для каждого $c$ найдется $d$ такой, что $\bar{a}c \equiv^{\alpha+\omega} \bar{b}d$, и утверждение будет следовать из челночной конструкции.

Предположим, что $\bar{a} \equiv^{\alpha+\omega} \bar{b}$. Возьмем произвольный элемент $c$. Тогда утверждение $\sigma^{\alpha}_{\bar{a}c}(\overline{x}, y)$ выполнено на кортеже $\bar{a}c$ в $\mathfrak{M}$. Следовательно, $\mathfrak{M} \models \exists y \sigma^{\alpha}_{\bar{a}c}(\bar{a}, y)$. Из $\bar{a} \equiv^{\alpha+\omega} \bar{b}$ вытекает, что $\mathfrak{M} \models \exists y \sigma^{\alpha}_{\bar{a}c}(\bar{b}, y)$. Отсюда мы получим, что множество

$$D = \left\{ p \mid \mathfrak{M} \models \sigma^{\alpha}_{\bar{a}c}(\bar{b}, p) \right\}$$

непусто. Очевидно, что каждый элемент $p \in D$ удовлетворяет $\bar{a}c \equiv^{\alpha} \bar{b}p$.

Заметим, что подмножества из $D$, определимые формулами кванторного ранга менее, чем $\alpha+\omega$, с параметрами $\bar{b}$ образуют конечную булеву алгебру. В противном случае существовало бы бесконечно много попарно $\alpha$-эквивалентных неавтоморфных кортежей вида $\bar{b}p$, где $p \in D$, что противоречит (1). Пусть формулы $\varphi_1(\bar{b}, y), \dots, \varphi_k(\bar{b}, y)$ кванторного ранга менее, чем $\alpha+\omega$, определяют атомы вышеупомянутой булевой алгебры. Если ни для одного $i \in \{1, \dots, k\}$ элемент $c$ не удовлетворяет $\varphi_i(\bar{a}, y)$, то

$$\mathfrak{M} \models \exists y \Big( \bigwedge_{i=1,\dots,k} \neg\varphi_i(\bar{a}, y) \ \&\ \sigma^{\alpha}_{\bar{a}c}(\bar{a}, y) \Big),$$

но это утверждение становится ложным, если мы заменим $\bar{a}$ на $\bar{b}$; это, в свою очередь, противоречит $\bar{a} \equiv^{\alpha+\omega} \bar{b}$. Выберем $i$ так, чтобы выполнялось $\mathfrak{M} \models \varphi_i(\bar{a}, c)$. Выберем теперь $d$ как произвольный элемент из $D$, удовлетворяющий формуле $\varphi_i(\bar{b}, x)$ в модели $\mathfrak{M}$, и проверим истинность эквивалентности $\bar{a}c \equiv^{\alpha+\omega} \bar{b}d$. Предположим, что она ложна, и пусть $\psi(\bar{x}, y)$ — формула кванторного ранга менее $\alpha+\omega$, различающая эти кортежи, т. е. $\mathfrak{M} \models \psi(\bar{a}, c)$, но $\mathfrak{M} \models \neg\psi(\bar{b}, d)$. Теперь в силу того, что формулы $\varphi_i(\bar{b}, y)$, $1 \le i \le k$, определяют атомы, имеем

$$\mathfrak{M} \models \forall y \big( \sigma^{\alpha}_{\bar{a}c}(\bar{b}, y) \ \&\ \varphi_i(\bar{b}, y) \Rightarrow \neg\psi(\bar{b}, y) \big),$$

но

$$\mathfrak{M} \models \exists y \big( \sigma^{\alpha}_{\bar{a}c}(\bar{a}, y) \ \&\ \varphi_i(\bar{a}, y) \ \&\ \psi(\bar{a}, y) \big);$$

это противоречит эквивалентности $\bar{a} \equiv^{\alpha+\omega} \bar{b}$. $\square$

**Теорема 2.2.** *Пусть $\mathfrak{M}$ — гиперарифметическая модель и $\bar{a} = a_1, \dots, a_k \in \mathfrak{M}^{<\omega}$. Тогда $\mathrm{qr}(\bar{a}) = \omega_1^{\mathrm{CK}}$ тогда и только тогда, когда $I_{\bar{a}} \notin \Pi^1_1$, где $I_{\bar{a}} =_{def} \{\bar{b} \in \mathfrak{M}^{<\omega} \mid \bar{a} \cong \bar{b}\}$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Предположим для получения противоречия, что $I_{\bar{a}} \in \Pi^1_1$.

Мы используем теорему компактности Барвайса. Пусть $L$ — язык модели $\mathfrak{M}$. Расширим $L$ до языка $L'$ путем добавления новой константы 0, интерпретируемой как нуль, констант $\bar{c} = c_0, \ldots, c_k$ и нового унарного функционального символа $s$, интерпретируемого как прибавление единицы. Теперь построим $\Sigma$-семейство $T$ предложений фрагмента $L^* = L'_{\omega_1\omega} \cap \mathbb{HYP}_\omega$, описывающего некоторое обогащение $\mathfrak{M}$, утверждающее, что в $\mathfrak{M}$ справедливо $\bar{c} \cong \bar{a}$ и в то же время $\bar{c} \notin I_{\bar{a}}$. Покажем, что каждая часть множества $T$, принадлежащая $\mathbb{HYP}_\omega$, имеет модель. Очевидно, что семейство $T$ не может быть совместным. Тем не менее по теореме компактности Барвайса семейство $T$ имеет модель и является, таким образом, совместным; противоречие.

Пусть $T = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$, где

• $S_0$ — это множество $\big\{\forall x \bigvee\limits_{m\in\omega} (x = s^m(0))\big\}$ (каждый элемент из $\mathfrak{M}$ — натуральное число);

• $S_1$ — это диаграмма модели $\mathfrak{M}$ в языке $L \cup \{s, 0\}$, т. е. семейство

$$\{\varphi(s^{m_1}(0), \ldots, s^{m_l}(0)) \mid l, m_1, \ldots, m_l \in \omega, \varphi(x_1, \ldots, x_l) \text{ —}$$

$$\text{бескванторная формула языка } L \text{ такая, что } \mathfrak{M} \models \varphi(m_1, \ldots, m_l)\};$$

• $S_2 = \big\{\neg \bigvee\limits_{i=1,\ldots,k} (c_i = s^{b_i}(0)) \mid \bar{b} = b_1, \ldots, b_k \in I_{\bar{a}}\big\}$ ($\bar{c}$ не равно никакому кортежу $\bar{b} \in I_{\bar{a}}$); это $\Sigma$-семейство на $\mathbb{HYP}_\omega$ при предположении, что $I_{\bar{a}} \in \Pi^1_1$;

• $S_3 = \{\varphi(\bar{c}) \mid \varphi(\bar{x}) \in L^* \;\&\; \mathfrak{M} \models \varphi(\bar{a})\}$ ($\bar{c}$ и $\bar{a}$ удовлетворяют тем же самым формулам $L^*$, следовательно, по теореме 1.2 они изоморфны в $\mathfrak{M}$).

Проверим, что каждая часть $T$, принадлежащая $\mathbb{HYP}_\omega$, имеет модель. В самом деле, каждое $S \subseteq S_3$ такое, что $S \in \mathbb{HYP}_\omega$, удовлетворяет условию

$$A_S = \Big\{\bar{d} \mid \mathfrak{M} \models \bigwedge_{\varphi(\bar{c})\in S} \varphi(\bar{d})\Big\} \setminus I_{\bar{a}} \neq \varnothing.$$

В противном случае множество $I_{\bar{a}}$ можно определить формулой фрагмента $L^*$; следовательно, мы получили бы $\mathrm{qr}(\bar{a}) < \omega_1^{\mathrm{CK}}$. Любой кортеж элементов из множества $A_S$ можно взять в качестве интерпретации $\bar{c}$. Модель $\mathfrak{M}$ с такой интерпретацией для $\bar{c}$ и очевидными интерпретациями для $s$ и 0 является моделью семейства $S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S$.

По теореме компактности Барвайса $T$ имеет модель. Поскольку эта модель удовлетворяет $S_0$ и $S_1$, ее обеднение до языка $L$ изоморфно $\mathfrak{M}$. (Если мы отождествим $s^p(0)$ с $p$ для всех $p < \omega$, она фактически совпадет с $\mathfrak{M}$.) Семейства $S_2$ и $S_3$ утверждают, что $\bar{c} \notin I_{\bar{a}}$, но $\bar{c} \cong \bar{a}$. Получили противоречие.

($\Leftarrow$) Если $\mathrm{qr}(\bar{a}) < \omega_1^{\mathrm{CK}}$, то $\forall \bar{b} \in \mathfrak{M}^k \big(\bar{a} \cong \bar{b} \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \sigma^{qr(\bar{a})}_{\mathfrak{M},\bar{a}}[\bar{b}]\big)$. Отсюда следует, что $I_{\bar{a}}$ — $\Delta$-подмножество $\mathbb{HYP}_\omega$, т. е. $I_{\bar{a}} \in \Pi^1_1$, что ведет к противоречию. $\square$

Замечание. Может случиться, что два автоморфных кортежа кванторного ранга менее, чем $\omega_1^{\mathrm{CK}}$, не могут быть отождествлены посредством гиперарифметического автоморфизма. Приведем простой пример. Возьмем две изоморфные не гиперарифметически изоморфные вычислимые модели $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}$, с основными множествами, равными $\omega$ в языке $L$, содержащем только предикатные символы. Например, мы можем взять модели вида $\langle\mathfrak{M}, \bar{a}\rangle$ и $\langle\mathfrak{M}, \bar{b}\rangle$, где $\bar{a}$ и $\bar{b}$ автоморфны, но не гиперарифметически автоморфны в $\mathfrak{M}$, и превратим их в модели предикатной сигнатуры. Существование таких моделей показано выше. Рассмотрим новую модель $\mathfrak{M}^*$, являющуюся прямым объединением моделей $\mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{M}_1$, с добавленными двумя новыми элементами $a_0$ и $a_1$ и новым предикатным символом $P$ таким, что

$$P(x,y) \Leftrightarrow ((x=a_0)\&(y\in\mathfrak{M}_0))\vee((x=a_1)\&(y\in\mathfrak{M}_1)).$$

Определим вычислимую модель $\mathfrak{M}$, структура которой перенесена на $\omega$ посредством отображения

$$f(x)=\begin{cases} a_0, & \text{если } x=0,\\ a_1, & \text{если } x=1,\\ t\in\mathfrak{M}_0, & \text{если } x=2t+2,\\ t\in\mathfrak{M}_1, & \text{если } x=2t+3.\end{cases}$$

Легко убедиться, что $f^{-1}(a_0)$ и $f^{-1}(a_1)$ автоморфны, но не гиперарифметически автоморфны в $\mathfrak{M}$ и что множество $\{f^{-1}(a_0),f^{-1}(a_1)\}$ определимо формулой $\exists yP(x,y)$, откуда следует, что кванторный ранг $f^{-1}(a_0)$ и $f^{-1}(a_1)$ конечен.

**Теорема 2.3.** *Пусть $\varphi$ — предложение из $L_{\mathbb{HYP}_\omega}$. Пусть $m<\omega$ и $A$ — гиперарифметическое подмножество $\omega$ такое, что для каждого конструктивного ординала $\alpha$ существуют $A$-вычислимая модель $\mathfrak{A}\models\varphi$ и кортежи $\bar a,\bar b\in\mathfrak{A}^m$ такие, что $\langle\mathfrak{A},\bar a\rangle\cong\langle\mathfrak{A},\bar b\rangle$, но не существует автоморфизма модели $\mathfrak{A}$, вычислимого в $\mathbf{0}^{(\alpha)}$, поэлементно отображающего $\bar a$ в $\bar b$. Тогда существуют $A$-вычислимая модель $\mathfrak{B}\models\varphi$ и $\bar a,\bar b\in\mathfrak{B}^m$ такие, что $\langle\mathfrak{B},\bar a\rangle\cong\langle\mathfrak{B},\bar b\rangle$, но $\langle\mathfrak{B},\bar a\rangle\not\cong_h\langle\mathfrak{B},\bar b\rangle$.*

Доказательство. Дадим только набросок доказательства. Результат будет следовать из теоремы компактности Барвайса. Чтобы применить эту теорему, определим $\Sigma$-семейство предложений из $L_{\mathbb{HYP}_\omega}$, которое утверждает, что

1) $n<\omega$ кодирует некоторую $A$-вычислимую модель для $\varphi$;
2) для всех гиперарифметических перестановок $f$ на $\omega$ неверно, что $f$ — автоморфизм этой модели, который поэлементно отображает $\bar a$ в $\bar b$.

По теореме компактности Барвайса существует натуральное число $n<\omega$, кодирующее $A$-вычислимую модель для $\varphi$ с требуемым свойством. □

### 3. Применения к конкретным классам моделей

Линейные порядки. Хорошо известно (см. [2, 5, 7]), что существует вычислимый линейный порядок типа $\omega_1^{\mathrm{CK}}+(\omega_1^{\mathrm{CK}}\times\eta)$, где $\eta$ — упорядочение по типу рациональных чисел такое, что любые два его различных автоморфных элемента из второго слагаемого не гиперарифметически автоморфны. Отсюда мы можем заключить, что ранг Барвайса этого порядка равен $\omega_1^{\mathrm{CK}}$.

$p$-Группы. Применим теорему 2.1 для доказательства существования вычислимой $p$-группы и двух автоморфных, но не гиперарифметически автоморфных кортежей в ней. Для этого достаточно построить вычислимую $p$-группу ранга Барвайса $\omega_1^{\mathrm{CK}}$. Однако в этом случае мы не будем знать длину этих кортежей. Мы дадим прямое доказательство существования такой группы и кортежей длины 1. Отсюда будет следовать и существование $p$-группы ранга Барвайса $\omega_1^{\mathrm{CK}}$.

**Теорема 3.1.** *Для каждого простого $p$ существуют вычислимая $p$-группа и ее элементы $a,b$, которые автоморфны, но не гиперарифметически автоморфны.*

Доказательство. Для каждого конструктивного ординала $\alpha$ построим вычислимую $p$-группу и ее элементы $a$ и $b$, которые автоморфны, но тьюрингова степень каждого автоморфизма, переводящего $a$ в $b$, больше либо равна

$\mathbf{0}^{(\alpha)}$. Теорема будет следовать из теоремы 2.3. Сначала напомним некоторые определения. О представлении $p$-групп деревьями см., например, [8].

*Деревом* называется любое подмножество $T \subseteq \omega^{<\omega}$, содержащее пустую последовательность $\varnothing$ и замкнутое относительно начальных сегментов, т. е. всякий раз если $u \in T$ и $v$ — начальный сегмент $u$, то $v \in T$. Мы будем считать, что дерево «растет вниз»; например, последовательность $\langle 1, 2, 3\rangle$ находится ниже, чем $\langle 1, 2\rangle$. Любой элемент $s \in \omega^{<\omega}$, кроме $\varnothing$, имеет своего *предшественника*, который получается вычеркиванием последнего символа последовательности $s$; например, предшественником для $\langle 0, 1\rangle$ является $\langle 0\rangle$. Последовательность $u = (u_i)_{i<\omega}$ элементов дерева $T$ называется *бесконечной ветвью* $T$, если $u_0 = \varnothing$ и каждый ее элемент $u_i$ является предшественником $u_{i+1}$. Мы используем обозначение $u \restriction i = u_i$. *Производной* дерева $T$ назовем множество

$$T' = \{s \in T \mid s \text{ — предшественник некоторого элемента из } T\} \cup \{\varnothing\}.$$

Для произвольного ординала $\alpha$ определим по индукции $\alpha$-ю *производную* $T^{(\alpha)}$ дерева $T$ следующим образом:

$$\begin{aligned} T^{(0)} &= T; \\ T^{(\alpha+1)} &= (T^{(\alpha)})'; \\ T^{(\gamma)} &= \bigcap_{\beta<\gamma} T^{(\beta)}, \text{ если } \gamma \text{ предельный.} \end{aligned}$$

*Уровнем* элемента $a \in T$ назовем число элементов в кортеже $a$. Каждый фундированный элемент $a \in T$ имеет *ординальный ранг* $\mathrm{rk}(a)$, определяемый таким образом:

$$\mathrm{rk}(a) = \sup\{\mathrm{rk}(b) + 1 \mid a \text{ — предшественник для } b\}.$$

Легко видеть, что $\mathrm{rk}(a) = \min\{\alpha \mid a \in T^{(\alpha)} \setminus T^{(\alpha+1)}\}$.

Зафиксируем простое число $p$. С каждым деревом $T$ ассоциируем $p$-группу $G[T]$: группа $G[T]$ определена множеством порождающих $T$ и следующим множеством определяющих соотношений:

$$\{pa = b \mid a, b \in T \ \&\ b \text{ — предшественник } a\}.$$

Элементы группы $G[T]$ обозначаются формальными выражениями вида $\sum\limits_{i=1}^{k} c_i a_i$, где $a_i \in T$, $c_i \in \mathbb{Z}$. Теперь мы опишем канонические представления элементов из $G[T]$. Рассмотрим следующие три типа редукций.

I. $ma \to ra + qb$, где $b$ — предшественник $a$ и $m \neq 0$, $m = pq + r$, $q, r \in \mathbb{Z}$, $0 \le r < p$.

II. $\varnothing + a \to a$.

III. $0a \to \varnothing$.

Применение каждой из этих редукций к выражению вида $\sum\limits_{i=1}^{k} c_i a_i$ состоит в замене подвыражения в левой части редукции выражением, стоящим в правой ее части, с последующим приведением подобных членов для получения формального выражения того же самого типа. При этом порядок следования слагаемых для нас не важен. Можно проверить, что эти редукции удовлетворяют свойствам:

1) результат применения редукции обозначает тот же элемент, что и первоначальное выражение;

2) для каждого выражения $S$ невозможна бесконечная цепочка выражений $S = S_0, S_1, S_2, \ldots$ такая, что каждый элемент $S_{i+1}$ получается из $S_i$ редукцией типа I, II или III, при этом $S_i \neq S_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots$;
3) если формальное выражение $S$ приводится конечными сериями редукций к формальным выражениям $S'$ и $S''$, то $S'$ и $S''$ приводятся конечными сериями редукций к некоторому одному и тому же формальному выражению $S'''$.

Из этого следует, что каждая последовательность редукций в конце концов остановится в состоянии, когда дальнейшие редукции уже невозможны, при этом результат не зависит от порядка следования редукций. Нередуцируемые выражения называются *каноническими формами.* Мы можем рассматривать группу $G[T]$ как множество канонических форм, на которых сложение $+$ естественно определено как взятие формальной суммы выражений с последующим вычислением канонической формы полученного выражения.

Для каждого $\alpha$ определим подгруппу $p^\alpha G \leq G$ обычным образом:

$$\begin{aligned} p^0 G &= G; \\ p^{\alpha+1} G &= \{x \in p^\alpha G \mid \exists y \in p^\alpha G (x = py)\}; \\ p^\gamma &= \bigcap_{\beta<\gamma} p^\beta G, \text{ если } \gamma \text{ — предельный ординал.} \end{aligned}$$

**Лемма 3.2.** *Пусть $T$ — дерево. Тогда группа $p^\alpha G[T]$ совпадает с подгруппой в $G[T]$, порожденной всеми элементами из $T^{(\alpha)}$.*

Доказательство проводится индукцией по $\alpha$. □

Зафиксируем конструктивный ординал $\alpha$ и рассмотрим вычислимое дерево $T_0$, имеющее единственную бесконечную ветвь $u$, тьюрингова степень которой равна $\mathbf{0}^{(\alpha)}$. Такие деревья существуют (см. [9]). Определим дерево $T_1$ как $\{\varnothing, \langle 0\rangle, \langle 0,0\rangle, \langle 0,0,0,\rangle \ldots\}$. Это дерево состоит из единственной бесконечной ветви. Определим вычислимое дерево $T$ как

$$T = \{\varnothing\} \cup \{1s \mid s \in T_0\} \cup \{2s \mid s \in T_1\}.$$

Заметим, что это дерево имеет в точности две бесконечные ветви:

$$s_0^* = \{\varnothing\} \cup \{1(u \restriction i) \mid i \in \omega\}, \quad s_1^* = \{\varnothing\} \cup \{2s \mid s \in T_1\}.$$

Покажем, что элементы $a = \langle 1\rangle$ и $b = \langle 2\rangle$ группы $G[T]$ автоморфны. Заметим, что существует ординал $\beta$ такой, что $T^{(\beta+1)} = T^{(\beta)}$. Вдобавок $T^{(\beta)} = s_0^* \cup s_1^*$ и $G[T^{(\beta)}] = G[s_0^*] \oplus G[s_1^*]$. Более того, $G[T^{(\beta)}]$ — делимая подгруппа в $G[T]$. Поскольку каждая делимая подгруппа выделяется прямым слагаемым в любой группе (см. [10, теорема 21.2]), $G[T]$ имеет разложение

$$G[T] = G[s_0^*] \oplus G[s_1^*] \oplus H \tag{2}$$

для некоторой подгруппы $H \leq G[T]$.

Легко видеть, что $a$ и $b$ автоморфны в сумме $G[s_0^*] \oplus G[s_1^*]$. Согласно разложению (2) они автоморфны и в группе $G[T]$.

Любой автоморфизм $f$ группы $G[T]$, переводящий $a$ в $b$, имеет тьюрингову степень, большую либо равную $\mathbf{0}^{(\alpha)}$. Напомним, что бесконечная ветвь $s_1^*$ состоит из элементов $\varnothing$, $\langle 2\rangle$, $\langle 2,0\rangle$, $\langle 2,0,0\rangle$, $\langle 2,0,0,0\rangle, \ldots$. Заметим, что поскольку $p \cdot \langle 2,0\rangle = \langle 2\rangle$, каноническая форма $f^{-1}(\langle 2,0\rangle)$ содержит элемент из $s_0^*$ уровня 2. Из тех же соображений получаем, что каноническая форма $f^{-1}(\langle 2,0,0\rangle)$

содержит элемент из $s_0^*$ уровня 3, и т. д. Таким образом, следующий алгоритм вычисляет $s_0^*$ относительно $f$: чтобы вычислить элемент $s_0^* \restriction m$, нужно взять произвольный элемент канонического представления для $f^{-1}(\langle 2, 0^m \rangle)$, находящийся под $s_0^* \restriction (m-1)$.

Теперь остается применить теорему 2.3. $\square$

**Следствие 1.** *Существует p-группа ранга Барвайса* $\omega_1^{\mathrm{CK}}$.

Доказательство. См. теорему 2.1. $\square$

Булевы алгебры. Здесь мы докажем существование булевых алгебр ранга Барвайса $\omega_1^{\mathrm{CK}}$. Затем докажем, что число элементов в гиперарифметически неавтоморфных кортежах может быть выбрано равным 1.

В [11] П. Е. Алаев доказал результат, из которого следует, что если $\mathfrak{B}$ — $\alpha$-атомная булева алгебра, то ее ранг Барвайса больше либо равен $\alpha$. Несмотря на то, что приведенная оценка довольно грубая, для наших целей этого вполне достаточно. С другой стороны, в [12] С. С. Гончаров доказывает, что для каждого конструктивного ординала $\alpha < \omega_1^{\mathrm{CK}}$ существует $\alpha$-атомная вычислимая булева алгебра.

Используя эти результаты, мы можем построить $\Sigma$-множество $T$ $L_{\mathbb{HYP}_\omega}$-формул, утверждающих, что натуральное число $m$ является кодом вычислимой булевой алгебры, ранг Барвайса которой не менее $\omega_1^{\mathrm{CK}}$.

Сначала заметим, что существует $\Sigma$-функция $\alpha \mapsto \Phi_\alpha(x)$ на $\mathbb{HYP}_\omega$, которая по ординалу $\alpha < \omega_1^{\mathrm{CK}}$ выдает формулу, утверждающую, что «$x$ — элемент $\alpha$-го идеала Фреше». Эта функция может быть определена по индукции следующим образом. Пусть

$$\Phi_0(x) = \bigvee_{n\in\omega} \Big( \bigwedge_{i=1,\dots,n} \mathrm{atom}(x_i) \ \& \bigwedge_{1\le i<j\le n} \neg(x_i = x_j) \ \& \ x = x_1 \cup \ldots \cup x_n \Big),$$

где $\mathrm{atom}(x)$ есть сокращение для $\forall y[(x \cap y = 0) \vee (x \cap y = x)]$. Формула $\Phi_{\alpha+1}(x)$ получается из $\Phi_\alpha(x)$ заменой всех вхождений $A = B$ равенством по модулю $\alpha$-го идеала Фреше $\mathscr{F}_\alpha$, т. е. формулой $\Phi_\alpha((A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}))$. На предельных шагах $\beta$ получаем $\Phi_\beta(x)$ как конъюнкцию всех формул $\Phi_\gamma(x)$, $\gamma < \beta$. Можно проверить по индукции, что формула $\Phi_\alpha(x)$ определяет в каждой булевой алгебре $\alpha$-й идеал Фреше.

Рассмотрим язык $L = \langle 0, s^1, +^2, \cdot^2, \cap^2, \cup^2, {}^{-1} \rangle$ и его модель — стандартную модель арифметики, на которой операции $0, s^1, +^2, \cdot^2$ имеют их обычный смысл.

Теперь мы можем описать множество $T$ предложений. Предложения первой части $T$ утверждают, что элементы $s^k(0)$ образуют стандартную модель арифметики с обычными операциями $+, \cdot$ и что $\cap^2$, $\cup^2$, ${}^{-1}$ — вычислимые операции на $\omega$, причем $\omega$ вместе с этими операциями образует булеву алгебру.

Вторая часть $T$ — это семейство предложений, утверждающих, что для каждого $\alpha < \omega_1^{\mathrm{CK}}$ множество $\mathscr{F}_{\alpha+1} \setminus \mathscr{F}_\alpha$ непусто.

По сказанному выше каждая часть $T$, содержащаяся в $\mathbb{HYP}_\omega$ в качестве элемента, имеет модель. Значит, и все множество $T$ имеет модель. Множество $T$ утверждает, что эта модель вычислима. Ее ранг Барвайса в точности $\omega_1^{\mathrm{CK}}$, поскольку по сказанному выше он не может быть меньше, чем $\omega_1^{\mathrm{CK}}$, и, с другой стороны, ранг Барвайса вычислимой модели всегда меньше либо равен $\omega_1^{\mathrm{CK}}$.

Обозначим эту булеву алгебру через $\mathfrak{B}$. По теореме 2.1 существуют кортежи элементов, которые автоморфны, но не гиперарифметически автоморфны. Они, очевидно, имеют ненулевую длину. Теперь мы можем сократить число элементов в этих кортежах до 1. Будем использовать следующие обозначения:

$a^0 = a$, $a^1 = \bar{a}$. Поскольку всякий гиперарифметический изоморфизм между двумя кортежами $a_1, \dots, a_m$ и $b_1, \dots, b_m$ соответствует семейству гиперарифметических изоморфизмов между вычислимыми алгебрами $\mathfrak{B} \upharpoonright \big(\bigcap\limits_{i=1,\dots,m} a_i^{\varepsilon_i}\big)$ и $\mathfrak{B} \upharpoonright \big(\bigcap\limits_{i=1,\dots,m} b_i^{\varepsilon_i}\big)$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{0,1\}$, эти булевы алгебры не гиперарифметически изоморфны по крайней мере для одной последовательности $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{0,1\}$. Тогда элементы $\bigcap\limits_{i=1,\dots,m} a_i^{\varepsilon_i}$ и $\bigcap\limits_{i=1,\dots,m} b_i^{\varepsilon_i}$ автоморфны, но не гиперарифметически автоморфны в $\mathfrak{B}$. Заметим, что вдобавок мы доказали существование двух изоморфных вычислимых булевых алгебр, не являющихся гиперарифметически изоморфными.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Barwise J.* Admissible sets and structures. Berlin: Springer-Verl., 1975.
2. *Ash C. J., Knight J. F.* Computable structures and the hyperarithmetical hierarchy. Amsterdam: Elsevier, 2000.
3. *Ершов Ю. Л., Гончаров С. С.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 2000.
4. *Морозов А. С.* Функциональные деревья и автоморфизмы моделей // Алгебра и логика. 1993. Т. 32, № 1. С. 19–39.
5. *Harrison J.* Recursive pseudo-well-ordering // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 131. P. 526–543.
6. *Barwise J., Moschovakis Y. N.* Global inductive definability // J. Symbolic Logic. 1978. V. 43, N 3. P. 521–534.
7. *Sacks G. E.* Higher recursion theory. Heidelberg: Springer-Verl., 1990.
8. *Rogers L.* The structure of $p$-trees: akgebraic systems related to abelian groups // Abelian group theory / Proc. Second New Mixico State Univ. Conf. Las Cruces, NM, 1976. Berlin: Springer-Verl., 1977. P. 57–72. (Lecture Notes in Math.; 616).
9. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.
10. *Fuchs L.* Infinite Abelian groups. New York: Acad. Press, 1970. V. 1.
11. *Алаев П. Е.* Ранги Скотта булевых алгебр // Тр. Ин-та математики СО РАН. 1996. Т. 30. С. 3–25.
12. *Гончаров С. С.* Конструктивизируемость суператомных булевых алгебр // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 1. С. 31–40.


*Статья поступила 10 ноября 2004 г.*

*Гончаров Сергей Савостьянович, Морозов Андрей Сергеевич*
*Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,*
*пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090*
goncharov@math.nsc.ru, morozov@math.nsc.ru

*Valentina Harizanov*
*Department of Mathematics*
*The George Washington University*
*Washington, D.C. 20052, USA.*
harizanv@gwu.edu

*Julia F. Knight*
*Department of Mathematics*
*University of Notre Dame*
*Notre Dame, IN 46556, USA*
knight.1@nd.edu

*Анна Валерьевна Ромина*
*Max-Planck Institut für Informatik,*
*Stuhlsatzenhausweg 85, 66123 Saarbrücken, Germany*
romina@yandex.ru