Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2005. Том 46, № 3

УДК 517.95

О ВОЛЬТЕРРОВОСТИ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ С УСЛОВИЯМИ ТИПА БИЦАДЗЕ — САМАРСКОГО ДЛЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО–ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. С. Бердышев

Аннотация: Рассмотрены задачи с условиями типа Бицадзе — Самарского для смешанного параболо-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости в смысле регулярного и сильного решения а также вольтерровость поставленных задач.

Ключевые слова: параболо-гиперболические уравнения, задача Бицадзе — Самарского, разрешимость, вольтерровость.

В 1969 г. А. В. Бицадзе и А. А. Самарский [1] сформулировали и исследовали новую задачу для равномерно-эллиптического уравнения. Отличие этой задачи от других состоит в том, что граничные значения искомого решения повторяются во внутренних точках области, где искомая функция должна удовлетворять уравнению. После этой работы появился ряд работ, посвященных задачам типа Бицадзе — Самарского для многих видов уравнений в различных формулировках, среди которых следует выделить работы В. А. Ильина и Е. И. Моисеева [2], М. С. Салахитдинова и А. К. Уринова [3] и многих других.

Несмотря на большое количество работ, посвященных задачам типа Бицадзе — Самарского, в математической литературе не встречаются задачи для уравнения смешанного типа с условием, связывающим значения искомого решения на характеристике и на произвольной монотонной кривой, лежащей строго внутри характеристического треугольника.

В связи с этим возникают естественные вопросы: можно ли сформулировать аналогичные задачи для смешанного параболо-гиперболического уравнения с нехарактеристическими линиями изменения типа? Существуют ли среди таких задач вольтерровые задачи?

Спектральные свойства (в том числе и вольтерровость) краевых задач для параболо-гиперболического уравнения изучены в работах [4–8].

Данная работа посвящена изучению одного класса задач с условиями типа Бицадзе — Самарского для смешанного параболо-гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными.

Основным результатом работы является доказательство вольтерровости задач с условиями типа Бицадзе — Самарского для смешанного параболо-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа.

Рассмотрим уравнение

$$Lu = f(x, y), \tag{1}$$

© 2005 Бердышев А. С.

где
$$Lu = \begin{cases} u_x - u_{yy}, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0, \end{cases} \tag{2}$$
в конечной односвязной области Ω плоскости независимых переменных x, y, ограниченной при $y > 0$ отрезками AA_0, A_0B_0, BB_0 прямых $x = 0$, $y = 1$, $x = 1$ соответственно, а при $y < 0$ — характеристиками AC: $x + y = 0$ и BC: $x - y = 1$ уравнения (1).

Пусть гладкая кривая AD: $y = -\gamma(x)$, $0 < x < l$, где $0,5 < l < 1$, $\gamma(0) = 0$, $l + \gamma(l) = 1$, расположена внутри характеристического треугольника $0 \leq x + y \leq x - y \leq 1$. Относительно кривой AD всюду в дальнейшем предположим, что $\gamma(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая и функции $x - \gamma(x)$ и $x + \gamma(x)$ монотонно возрастают; $0 < \gamma'(0) < 1$, $\gamma(x) > 0$, $x > 0$.

Обозначим $\Omega_0 = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_1 = \Omega \cap \{y < 0\}$, а через $W_2^l(\Omega)$ — пространство Соболева со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_l$ и нормой $\|\cdot\|_l$, $W_2^0(\Omega) \equiv L_2(\Omega)$ — пространство квадратично суммируемых в Ω функций.

Задача TM_1. *Найти решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям*
$$u|_{AA_0 \cup A_0B_0} = 0, \tag{3}$$
$$[u_x - u_y](\theta_0(t)) + \mu(t)[u_x - u_y](\theta^*(t)) = 0, \tag{4_1}$$
где $\theta_0(t)$ $(\theta^*(t))$ *— аффикс точки пересечения характеристики* AC (*кривой* AD) *с характеристикой, выходящей из точки* $(t, 0)$, $0 < t < 1$, $\mu(t)$ *— заданная функция.*

В случае, когда $\mu(t) \equiv 0$, задача TM_1 совпадает с задачей Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа. В этом случае задача TM_1 рассматривалась в работах [9] (регулярная разрешимость), [10] (сильная разрешимость) и [8] (единственность решения задачи для уравнения с комплексными коэффициентами), а когда $\mu(t) = \infty$, т. е. когда на кривой AD задаются условия $u_x - u_y|_{AD} = 0$, сильная разрешимость и вольтерровость задачи TM_1 изучались в [7].

Задача TM_2. *Найти решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям* (3) *и*
$$[u_x - u_y](\theta_0(t)) + \mu(t)[u_x + u_y](\theta^*(t)) = 0. \tag{4_2}$$

Задача TM_3. *Найти решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям* (3) *и*
$$\frac{d}{dt}u[\theta_0(t)] + \mu(t)\frac{d}{dt}u[\theta^*(t)] = 0. \tag{4_3}$$
Отметим, что если $\mu(t) = \mu = \text{const}$, то условие ($4_3$) эквивалентно следующему условию:
$$u[\theta_0(t)] + \mu(t)u[\theta^*(t)] = 0,$$
которое поточечно связывает значения искомого решения на характеристике со значением решения на некоторой кривой, лежащей строго внутри области.

Под *регулярным решением* задачи TM_i $(i = 1, 2, 3)$ будем понимать функцию $u(x, y) \in W$, где
$$W = C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup AC) \cap C^{1.2}(\Omega_0) \cap C^{2.2}(\Omega_1),$$
удовлетворяющую уравнению (1) в $\Omega_0 \cup \Omega_1$ и условиям (3) и (4_i) $(i = 1, 2, 3)$.

Функцию $u(x, y) \in L_2(\Omega)$ назовем *сильным решением* задачи TM_i $(i = 1, 2, 3)$, если существует последовательность функций $\{u_n\}$, $u_n \in W$, удовлетворяющих условиям (3) и (4_i) $(i = 1, 2, 3)$, такая, что $\|u_n - u\|_0 \to 0$, $\|Lu_n - f\|_0 \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 1.1. *Пусть $\mu(t) \in C^2[0,1]$ и $\mu(t) \neq -1$, $0 \leq t \leq 1$. Тогда для любой функции $f(x,y) \in C^1(\overline{\Omega})$, $f(A) = 0$, существует единственное регулярное решение задачи TM_1, которое удовлетворяет неравенству*

$$\|u\|_1 \leq c\|f\|_0 \tag{5}$$

и представимо в виде

$$u(x,y) = \iint\limits_{\Omega} K_i(x,y;x_1,y_1) f(x_1,y_1)\,dx_1 dy_1, \quad i = 1,2,3, \tag{6_i}$$

где $K_i(x,y;x_1,y_1) \in L_2(\Omega \times \Omega)$ (для задачи TM_1 $i = 1$).

В (5) и в дальнейшем через c будем обозначать положительную постоянную, не зависящую от $u(x,y)$, не обязательно одну и ту же.

Теорема 1.2. *Пусть выполнены условия теоремы 1.1. Тогда для любой функции $f(x,y) \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи TM_1. Это решение принадлежит классу*

$$C(\overline{\Omega}) \cap W_2^1(\Omega) \cap W_2^{1.2}(\Omega_0), \tag{7}$$

удовлетворяет неравенству (5) и может быть представлено в виде (6_1).

Для корректности и вольтерровости задачи TM_2 в отличие от задачи TM_1 решающее значение имеет соотношение между коэффициентом «сжатия» $\mu(0)$ в начале координат производной по направлению характеристики BC и полярным углом α, образуемым кривой AD с осью абсцисс.

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие*

$$\mu(t) \in C^2[0,1] \text{ и } |\mu(0)|^2 < \operatorname{tg}(\alpha + \pi/4), \quad -\pi/4 < \alpha < 0. \tag{8}$$

Тогда для любой функции $f(x,y) \in C^1(\overline{\Omega})$, $f(A) = 0$, существует единственное регулярное решение задачи TM_2, которое удовлетворяет неравенству (5) и представимо в виде (6_i), $i = 2$.

Теорема 2.2. *Пусть выполнено условие (8). Тогда для любой функции $f(x,y) \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи TM_2. Это решение принадлежит классу (7), удовлетворяет неравенству (5) и может быть представлено в виде (6_2).*

Теорема 3.1. *Пусть $\mu(t) \in C^2[0,1]$, $\mu(t) \neq -1$, $0 \leq t \leq 1$, и*

$$\left|\frac{\mu(0)}{1+\mu(0)}\right|^2 < \operatorname{ctg}(\alpha + \pi/4), \quad -\pi/4 < \alpha < 0. \tag{9}$$

Тогда для задачи TM_3 справедливы все утверждения теорем 2.1 и 2.2.

Через $\mathbb{L}_i$ $(i = 1,2,3)$ обозначим замыкание в пространстве $L_2(\Omega)$ дифференциального оператора, заданного на W, элементы которого удовлетворяют условиям (3) и (4_i) $(i = 1,2,3)$, выражением (2).

Согласно определению сильного решения задачи TM_i $u(x,y)$ — сильное решение задачи TM_i тогда и только тогда, когда $u(x,y) \in D(\mathbb{L}_i)$, где $D(\mathbb{L}_i)$ — область определения оператора $\mathbb{L}_i$.

Из вышеприведенных теорем при выполнении соответствующих условий следует, что каждый оператор $\mathbb{L}_i$ замкнутый и его область определения плотна в $L_2(\Omega)$; обратный оператор $\mathbb{L}_i^{-1}$ определен на всем $L_2(\Omega)$ и вполне непрерывный $(i = 1, 2, 3)$.

Поэтому возникает естественный вопрос о существовании собственных значений оператора $\mathbb{L}_i^{-1}$, а следовательно, и задачи TM_i $(i = 1, 2, 3)$.

Основным результатом данной работы являются следующие теоремы об отсутствии собственных значений операторов $\mathbb{L}_i^{-1}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Теорема 1.3. *Пусть $\mu(t) \neq -1$, $0 \leq t \leq 1$. Тогда интегральный оператор в правой части* (6_1) *является вольтерровым в $L_2(\Omega)$ (вполне непрерывным и квазинильпотентным).*

Теорема 2.3. *Пусть выполнено условие* (8). *Тогда задача TM_2 является вольтерровой, т. е. для любого комплексного числа λ решение уравнения $\mathbb{L}_2 u - \lambda u = f(x, y)$ существует и единственно при всех $f(x, y) \in L_2(\Omega)$.*

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Тогда обратный оператор*

$$\mathbb{L}_3^{-1} f(x, y) = \iint\limits_{\Omega} K_3(x, y; x_1, y_1) f(x_1, y_1)\, dx_1 dy_1$$

оператора задачи TM_3 является вольтерровым.

Из теорем 1.3, 2.3, 3.2 легко следует пустота множества собственных значений задач TM_i, $i = 1, 2, 3$.

Отметим, что для корректности (вольтерровости) задач TM_2 и TM_3 условия (8) и (9) существенны. Например, при нарушении условия (8) решение задачи TM_2 не единственно, т. е. нуль является собственным значением задачи TM_2.

Доказательство теорем 1.1–1.3 приведено в работе [11].

Рассмотрим задачу TM_2. В силу однозначной разрешимости первой краевой задачи для уравнения теплопроводности решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (3), в области Ω_0 представимо в виде

$$u(x, y) = \int\limits_0^x dx_1 \int\limits_0^1 G(x - x_1, y, y_1) f(x_1, y_1)\, dy_1 + \int\limits_0^x G_{y_1}(x - x_1, y, 0) \tau(x_1)\, dx_1, \quad (10)$$

где $\tau(x) = u(x, 0)$, $\tau(0) = 0$, а $G(x - x_1, y, y_1)$ — функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности в квадрате AA_0BB_0, представимая в виде

$$G(x, y, y_1) = \frac{1}{2\sqrt{\pi x}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(y - y_1 + 2n)^2}{4x} \right] - \exp\left[-\frac{(y + y_1 + 2n)^2}{4x} \right] \right\}.$$

Вычислив производную $\frac{\partial u}{\partial y}$ в (10) и устремив y к нулю, получим соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x) = u_y(x, 0)$, принесенное на AB из параболической части области Ω:

$$\nu(x) = -\int\limits_0^x k(x - t) \tau'(t)\, dt + \Phi_0(x), \quad (11)$$

где

$$k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{x} \right),$$

$$\Phi_0(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^1 G_y(x-x_1, y, y_1)|_{y=0} f(x_1, y_1)\, dy_1. \tag{12}$$

В силу однозначной разрешимости задачи Коши для волнового уравнения, любое регулярное решение задачи TM_2 в области Ω_1 ищем в виде

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left[\tau(\xi) + \tau(\eta) - \int_\xi^\eta \nu(t)\, dt\right] - \int_\xi^\eta d\xi_1 \int_{\xi_1}^\eta f_1(\xi_1, \eta_1)\, d\eta_1, \tag{13}$$

где

$$\xi = x + y, \quad \eta = x - y, \quad 4f_1(\xi, \eta) = f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right).$$

Вследствие условий, наложенных на функцию $\gamma(x)$, уравнение кривой AD в характеристических переменных допускает представление $\xi = \lambda(\eta)$, $0 \le \eta \le 1$, причем $0 < \lambda'(0) < 1$, $\lambda(\eta) < \eta$.

Удовлетворяя в (13) условию (4_2), получим основное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$, принесенное на отрезок AB из гиперболической части Ω_1:

$$\tau'(x) + \mu(t)\tau'(\lambda(t)) - \nu(t) + \mu(t)\nu(\lambda(t)) = F_1(x), \tag{14}$$

где

$$F_1(t) = 2\int_0^t f_1(\xi_1, t) d\xi_1 - 2\mu(t) \int_{\lambda(t)}^t f(\lambda(t), \eta_1)\, d\eta_1. \tag{15}$$

Теперь, исключая из соотношений (11) и (14) функцию $\nu(x)$, имеем для $\tau'(x)$ интегрофункциональное уравнение

$$\tau'(t) + \mu(t)\tau'(\lambda(t)) + \int_0^x k(t-z)\tau'(z)\, dz - \mu(t)\int_0^{\lambda(t)} k(\lambda(t)-z)\tau'(z)\, dz = F(t),\ 0 \le t \le 1, \tag{16}$$

где

$$F(t) = F_1(t) + \Phi_0(t) - \mu(t)\Phi_0(\lambda(t)). \tag{17}$$

Таким образом, задача TM_2 в смысле однозначной разрешимости эквивалентно редуцирована к уравнению (16).

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) + \mu(x)\varphi(\lambda(x)) = F_2(x). \tag{18}$$

Сначала приведем следующую лемму, необходимую нам в дальнейшем.

Лемма 1. *Пусть*

$$|\mu(0)|^2 < \lambda'(0). \tag{19}$$

Тогда для любой функции $F_2(x) \in L_2(0,1)$ существует единственное решение $\varphi(x) \in L_2(0,1)$ уравнения (18), которое удовлетворяет неравенству

$$\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} \le c\|F_2(x)\|_{L_2(0,1)}. \tag{20}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение оператор, действующий по формуле

$$A\varphi(x) = \mu(x)\varphi(\lambda(x)). \tag{21}$$

Очевидно, что

$$A^n\varphi(x) = \prod_{k=0}^{n-1} \mu(\lambda^k(x)) \cdot \varphi(\lambda^n(x)), \quad n \geq 2,$$

где $\lambda^n(x) = \lambda[\lambda^{n-1}(x)]$, $\lambda^0(x) = x$.

Нетрудно установить, что оператор $B^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k A^k$ является формально обратным к оператору $B = E + A$, где E — тождественный оператор. Покажем ограниченность оператора $B^{-1} = (E + A)^{-1}$ в пространстве $L_2(0,1)$.

В силу (21) после некоторых преобразований легко установить, что

$$\|A^n\varphi(x)\|^2_{L_2(0,1)} \leq \prod_{k=0}^{n-1} \max_{0\leq x\leq\lambda^k(1)} \frac{\mu^2(x)}{|\lambda'(x)|} \cdot \|\varphi(x)\|^2_{L_2(0,1)}.$$

Поэтому $\|A^n\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leq a_n$, где

$$a_n = \prod_{k=0}^{n-1} \max_{0\leq x\leq\lambda^n(1)} \frac{|\mu(x)|}{\sqrt{|\lambda'(x)|}}.$$

Так как $\lambda(x) < x$ при $x \neq 0$ и $\lambda(0) = 0$, последовательность $\lambda^n(1)$ монотонно стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда в силу (19) следует неравенство

$$\|B^{-1}\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)} \leq M, \quad \text{где } M = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty,$$

что и показывает ограниченность оператора B^{-1} в $L_2(0,1)$ и справедливость оценки (20). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть*

$$|\mu(0)|\lambda'(0) < 1. \tag{22}$$

Тогда если $F_2(x) \in C^1[0,1]$ и $F_2(0) = 0$, то существует единственное решение уравнения (18) из класса $C^1[0,1]$ и $\varphi(0) = 0$.

Доказательство леммы 2 с учетом (22) проводится по аналогии с доказательством леммы 1 в пространстве $C^1[0,1]$.

С учетом (12), (15), (17) нетрудно установить справедливость следующих лемм.

Лемма 3. *Если $\mu(t) \in C^2[0,1]$ и $f(x,y) \in C^1(\overline{\Omega})$, $f(A) = 0$, то $F(t) \in C^1[0,1]$ и $F(0) = 0$.*

Лемма 4. *Если $\mu(t) \in C^2[0,1]$ и $f(x,y) \in L_2(\Omega)$, то $F(t) \in L_2(0,1)$ и $\|F(t)\|_{L_2(0,1)} \leq c\|f\|_0$.*

Лемма 5. *Пусть выполнено условие (19). Тогда для любой функции $F(x) \in L_2[0,1]$ существует единственное решение уравнения (16). Это решение принадлежит классу $L_2(0,1)$ и удовлетворяет неравенству*

$$\|\tau'(x)\|_{L_2(0,1)} \leq c\|F(x)\|_{L_2(0,1)}. \tag{23}$$

Доказательство. Введем в рассмотрение интегральный оператор T, действующий в $L_2(0,1)$ по формуле

$$T\varphi(x) = \int_0^x k(x-t)\varphi(t)\,dt. \tag{24}$$

Очевидно (так как $\sqrt{x}k(x)$ — непрерывная функция), что T — вполне непрерывный оператор в $L_2(0,1)$.

С учетом (21) и (24) из (16), переходя к операторной записи, получим

$$[E+A]\tau'(x)+[E-A]T\tau'(x)=F(x). \tag{25}$$

В силу леммы 1 существует ограниченный оператор $(E+A)^{-1}$. Применяя к (25) оператор $(E+A)^{-1}$, имеем

$$\tau'(x)=(E+A)^{-1}F(x)+(E+A)^{-1}(E-A)T\tau'(x). \tag{26}$$

Уравнение (26) будем решать методом последовательных приближений. Положим $\tau_0'(x)=0$,

$$\tau_n'(x)=(E+A)^{-1}F(x)+(E+A)^{-1}(E-A)T\tau_{n-1}'(x),\quad n=1,2,\dots. \tag{27}$$

В случае, когда $n=1$, из леммы 1 следует, что

$$\|\tau_1'(x)\|_{L_2(0,1)}\le\|(E+A)^{-1}\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)}\|F(x)\|_{L_2(0,1)}\le M\|F(x)\|_{L_2(0,1)}. \tag{28}$$

Непосредственным вычислением можно доказать справедливость следующих оценок:

$$\|T\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)}\le N,\quad \|E-A\|_{L_2(0,1)\to L_2(0,1)}\le L, \tag{29}$$

где

$$N^2=4+\max_{0\le x\le 1}\left|k(x)-\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\right|,\quad L=1+\max_{0\le x\le 1}\frac{|\mu(x)|}{\sqrt{|\lambda'(x)|}}.$$

Имеет место оценка

$$\|\tau_n'(x)-\tau_{n-1}'(x)\|_{L_2(0,1)}\le\frac{M^n(LN)^{n-1}}{n!}\|F(x)\|_{L_2(0,1)}.$$

Доказательство следует из оценок (28), (29) и из уравнений (27). Из последнего вытекает сходимость в $L_2(0,1)$ ряда

$$\tau'(x)=\lim_{n\to\infty}\tau_n'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}[\tau_n'(x)-\tau_{n-1}'(x)], \tag{30}$$

который мажорируется в $L_2(0,1)$ сходящимся числовым рядом

$$\|F(x)\|_{L_2(0,1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M^n(LN)^{n-1}}{n!}.$$

Пользуясь ограниченностью операторов A и T, в силу сходимости ряда (30) нетрудно убедиться, что построенная функция $\tau'(x)$ удовлетворяет уравнению (26) и решение уравнения (26) единственно. Лемма 5 доказана.

С учетом того, что T как оператор со слабой особенностью вполне непрерывен из $L_2(0,1)$ в $C[0,1]$, а A — ограниченный оператор в $C[0,1]$, с помощью леммы 2 можно доказать следующую лемму.

Лемма 6. *Пусть $F(x)\in C^1[0,1]$ и $F(0)=0$. Тогда если $\tau'(x)\in L_2(0,1)$ — решение уравнения (16), то $\tau'(x)\in C^1[0,1]$ и $\tau'(0)=0$.*

Лемма 7. *Пусть выполнено условие леммы* 2. *Тогда для любой функции* $F(t) \in C^1[0,1]$, $F(0) = 0$, *существует единственное решение уравнения* (16) *и* $\tau'(x) \in C^1[0,1]$ *и* $\tau'(0) = 0$.

Доказательство леммы 7 следует из лемм 5 и 6.

Доказательство теорем 2.1 и 2.2 вытекает из лемм 1–7. Действительно, если $f(x,y) \in C^1(\overline{\Omega})$ и $f(A) = 0$, то в силу лемм 3 и 7 имеем $\tau(x) \in C^2[0,1]$, а из (11) — $\nu(x) \in C^1[0,1]$.

Если $f(x,y) \in L_2(\Omega)$, то ввиду лемм 4 и 5 будет $\tau(x) \in W_2'(0,1)$ и $\nu(x) \in L_2(0,1)$.

Теперь согласно формулам (10) и (13), поступая так же, как и в работе [6], получаем все утверждения теорем 2.1 и 2.2, кроме (6_2).

Для завершения доказательства покажем, что для любой функции $f(x,y) \in L_2(\Omega)$ сильное решение задачи TM_2 представимо в виде (6_2).

В силу того, что $(E+A)^{-1}(E-A) = -E + 2(E+A)^{-1}$, с учетом (24) уравнение (26) можно представить в виде

$$\tau'(x) - \int\limits_0^x M(x-t)\tau'(t)\,dt = \Phi(x), \tag{31}$$

где

$$\Phi(x) = (E+A)^{-1}F(x) = (E+A)^{-1}F_1(x) - \Phi_0(x) + 2(E+A)^{-1}\Phi_0(x), \tag{32}$$

$$M(x-t) = K(x-t) - 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\theta(\lambda^n(x)-t)\prod_{k=0}^{n-1}\mu(\lambda^k(x)-t)K(\lambda^n(x)-t), \tag{33}$$

$$\theta(x) = 1, \quad x > 0, \quad \theta(x) = 0, \quad x < 0.$$

Решение уравнения (31) представим в виде

$$\tau'(x) = \Phi(x) + \int\limits_0^x \Gamma_0(x,t)\Phi(t)\,dt,$$

где $\Gamma_0(x,t)$ — резольвента ядра (33) интегрального уравнения (31).

С учетом того, что $\tau(0) = 0$, имеем

$$\tau(x) = \int\limits_0^x \Gamma_1(x,t)\Phi(t)\,dt.$$

Здесь $\Gamma_1(x,t) = \int\limits_t^x \Gamma_0(z,t)\,dz + 1$.

Теперь в (10) и (13), с учетом (11), (12), (15), (17), (32) и (33), произведя необходимые вычисления, получим (6_2). В формуле (6_2)

$$\begin{aligned} K_2(x,y;x_1,y_1) = \theta(y)\theta(y_1)K_{00}(x,y;x_1,y_1) + \theta(y)\theta(-y_1)K_{01}(x,y;x_1,y_1) \\ + \theta(-y)\theta(y_1)K_{10}(x,y;x_1,y_1) + \theta(-y)\theta(-y_1)K_{11}(x,y;x_1,y_1), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} K_{00}(x,y;x_1,y_1) = \theta(x-x_1)G(x-x_1,y,y_1) \\ + \int\limits_0^1 \theta(x-t)G_\eta(x-t,y,\eta)|_{\eta=0}M_1(t,x_1,y_1)\,dt, \end{aligned}$$

$$K_{01}(x,y;x_1,y_1)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\theta(x-t)G_\eta(x-t,y,\eta)|_{\eta=0}N_1(t,\xi_1,\eta_1)\,dt,$$

$$\xi_1=x_1+y_1,\quad \eta_1=x_1-y_1,$$

$$M_i(x,x_1,y_1)=-\theta(x-x_1)\int\limits_{x_1}^{x}\Gamma_i(x,t)G_y(t-x,0,y_1)\,dt$$

$$+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\theta(\lambda^n(x)-t)\int\limits_{x_1}^{\lambda(x)}\Gamma_i(x,\delta^n(t))\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\mu(\delta^{n-k}(t))}{\lambda'(\delta^{n-k}(t))}G_y(t-x,0,y_1)\,dt,$$

$$N_i(x,\xi_1,\eta_1)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Bigg[\theta(\lambda^n(x)-\xi_1)\theta(\lambda^n(x)-\eta_1)$$

$$\times\Gamma_i(x,\delta^n(\eta_1))\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\mu(\delta^{n-k}(\eta_1))}{\lambda'(\delta^{n-k}(\eta_1))}-\theta(\lambda^{n+1}(x)-\xi_1)\theta(\delta(\xi_1)-\eta_1)$$

$$\times\Gamma_i(x,\delta^{n+1}(\xi_1))\prod_{k=0}^{n}\frac{\mu(\delta^{n+1-k}(\xi_1))}{\lambda'(\delta^{n+1-k}(\xi_1))}\Bigg],\quad i=0,1.$$

Здесь $\xi=\lambda(\eta)$, $0<\eta<1$, или $\eta=\delta(\xi)$, $0<\xi<\xi_0=\lambda(1)$, — уравнения кривой AD в характеристических координатах $\xi=x+y$, $\eta=x-y$, $\delta^n(t)=\delta(\delta^{n-1}(t))$, $\delta^0(t)=t$,

$$K_{10}(x,y;x_1,y_1)=M_1(\xi,x_1,y_1)+\frac{1}{2}\int\limits_0^{\lambda(\xi)}K_1(t,\xi,\eta)M_0(t,x_1,y_1)\,dt$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\lambda(\xi)}^{\lambda(\eta)}\left[K_1(t,\delta(t),\eta)-\frac{\mu(\delta(t))}{\lambda'(\delta(t))}\right]M_0(t,x_1,y_1)\,dt$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_0^{\lambda(\xi)}\theta(t-x_1)K_1(t,\xi,\eta)G_y(t-x_1,0,y_1)\,dt$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\lambda(\xi)}^{\lambda(\eta)}\theta(t-x_1)K_1(t,\delta(t),\eta)G_y(t-x_1,0,y_1)\,dt$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Bigg\{\int\limits_0^{\lambda^{(n+1)}(\xi)}\theta(t-x_1)K_1(\delta^n(t),\xi,\eta)\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\mu(\delta^{n-k}(t))}{\lambda'(\delta^{n-k}(t))}G_y(t-x_1,0,y_1)\,dt$$

$$+\int\limits_{\lambda^{(n+1)}(\xi)}^{\lambda^{(n+1)}(\eta)}\theta(t-x_1)\left[K_1(\delta^n(t),\delta^{n+1}(t),\eta)-\frac{\mu(\delta^{n+1}(t))}{\lambda'(\delta^{n+1}(t))}\right]$$

$$\times\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\mu(\delta^{n-k}(t))}{\lambda'(\delta^{n-k}(t))}G_y(t-x_1,0,y_1)\,dt\Bigg\},$$

$$K_1(t,\xi,\eta)=\int\limits_{\xi}^{\eta}\mu(z)K(\lambda(z)-t)\,dt,$$

$$K_{11}(x,y;x_1,y_1)=\theta(\eta-\eta_1)\theta(\eta_1-\xi)-\theta(\lambda(\eta)-\xi_1)\theta(\xi_1-\lambda(\xi))$$
$$\times\,\theta(\delta(\xi_1)-\eta_1)\frac{\mu(\delta(\xi_1))}{\lambda'(\delta(\xi_1))}+N_1(x,\xi_1,\eta_1)+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\lambda(\xi)}K_1(t,\xi,\eta)N_0(t,\xi_1,\eta)\,dt$$
$$+\,\frac{1}{2}\int\limits_{\lambda(\xi)}^{\lambda(\eta)}[K_1(t,\delta(t),\eta)-\frac{\mu(\delta(t))}{\lambda'(\delta(t))}]N_0(t,\xi_1,\eta_1)\,dt$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\Biggl\{\theta(\lambda^{n+1}(\xi)-\eta_1)K_1(\delta^n(\eta_1),\xi,\eta)\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\mu(\delta^{n-k}(\eta_1))}{\lambda'(\delta^{n-k}(\eta_1))}$$
$$-\,\theta(\delta(\xi_1)-\eta_1)\theta(\lambda^{n+2}(\xi)-\xi_1)K_1(\delta^{n+1}(\xi_1),\xi,\eta)\prod_{k=0}^{n}\frac{\mu(\delta^{n+1-k}(\xi_1))}{\lambda'(\delta^{n+1-k}(\xi_1))}$$
$$+\,\theta(\lambda^{n+1}(\eta)-\eta_1)\theta(\eta_1-\lambda^{n+1}(\xi))\Biggl[K_1(\delta^n(\eta_1),\delta^{n+1}(\eta_1),\eta)-\frac{\mu(\delta^{n+1}(\eta_1))}{\lambda'(\delta^{n+1}(\eta_1))}\Biggr]$$
$$\times\prod_{k=0}^{n}\frac{\mu(\delta^{n-k}(\eta_1))}{\lambda'(\delta^{n-k}(\eta_1))}-\theta(\lambda^{n+2}(\eta)-\xi_1)\theta(\xi_1-\lambda^{n+2}(\xi))\theta(\delta(\xi_1)-\eta_1)$$
$$\times\Biggl[K_1(\delta^{n+1}(\xi_1),\delta^{n+2}(\xi_1),\eta)-\frac{\mu(\delta^{n+2}(\xi_1))}{\lambda'(\delta^{n+2}(\xi_1))}\Biggr]\prod_{k=0}^{n}\frac{\mu(\delta^{n+1-k}(\xi_1))}{\lambda'(\delta^{n+1-k}(\xi_1))}\Biggr\}.$$

Для завершения доказательства теорем 2.1 и 2.2 отметим, что условия (8) и (19) эквивалентны.

Действительно, из уравнения кривой AD в характеристических координатах легко следует, что

$$\lambda'(0)=\frac{1-\gamma'(0)}{1+\gamma'(0)}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$$

Теоремы 2.1 и 2.2 доказаны.

Доказательство теоремы 2.3. В силу теоремы 2.2 обратный оператор L_2^{-1} задачи TM_2 (оператора L_2) существует, определен на всем $L_2(\Omega)$, представим в виде

$$L_2^{-1}f(x,y)=\iint\limits_{\Omega}K_2(x,y;x_1,y_1)f(x_1,y_1)\,dx_1dy_1$$

и вполне непрерывен. Поэтому остается показать, что L_2^{-1} квазинильпотентный в $L_2(\Omega)$. Для этого воспользуемся критерием вольтерровости интегральных операторов [12].

Из (34) нетрудно заметить, что $K_2(x,y;x_1,y_1)=0$, если $x<x_1$. Поэтому из результатов работы [12] получаем, что оператор L_2^{-1} не имеет собственных значений и в силу полной непрерывности является вольтерровым. Отсюда легко следует утверждение теоремы 2.3.

Теорема 2.3 доказана.

Доказательство теорем 3.1 и 3.2 с учетом (9) проводится аналогично доказательству теорем 2.1–2.3.

Автор выражает глубокую благодарность академикам АН РУз М. С. Салахитдинову и Ш. А. Алимову за полезное обсуждение результатов работ и за ряд ценных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.

2. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Нелокальная краевая задача для оператора Штурма — Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // Докл. АН СССР. 1986. Т. 291, № 3. С. 534–539.

3. *Салахитдинов М. С., Уринов А. К.* Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром. Ташкент: ФАН, 1997.

4. *Моисеев Е. И., Капустин Н. Ю.* О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии // Дифференц. уравнения. 1997. Т. 33, № 1. С. 115–119.

5. *Салахитдинов М. С., Бердышев А. С.* Краевые задачи для параболо-гиперболического уравнения в области с отходом от характеристики // Докл. РАН. 1992. Т. 327, № 3. С. 303–305.

6. *Салахитдинов М. С., Бердышев А. С.* О вольтерровости краевой задачи с отходом от характеристики для параболо-гиперболического уравнения // Узб. мат. журн. 1993. № 3. С. 6–13.

7. *Садыбеков М. А., Тойжанова Г. Д.* Спектральные свойства одного класса краевых задач для параболо-гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 1. С. 176–179.

8. *Сабитов К. Б.* К теории уравнений смешанного параболо-гиперболического типа со спектральным параметром // Дифференц. уравнения. 1989. Т. 25, № 1. С. 117–126.

9. *Елеев В. А.* Аналог задачи Трикоми для смешанных параболо-гиперболических уравнений с нехарактеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 1. С. 56–63.

10. *Капустин Н. Ю.* Оценка решения задачи Трикоми для системы уравнений параболо-гиперболического типа // Докл. АН СССР. 1982. Т. 265, № 3. С. 524–525.

11. *Эшматов Б. Э.* О вольтерровости задач с условиями Бицадзе — Самарского для параболо-гиперболического уравнения // Узб. мат. журн. 2001. № 1. С. 73–78.

12. *Нерсесян А. Б.* К теории интегральных уравнений типа Вольтерра // Докл. АН СССР. 1964. Т. 155, № 5. С. 1049–1051.

Статья поступила 19 мая 2004 г.

Бердышев Абдумаувлен Сулейманович
Институт Математики АН РУз,
ул. Ф. Ходжаева, 29, Ташкент 700125, Узбекистан
mathinst@uzsci.net, berdyshev@mail.ru