Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2005. Том 46, № 3

УДК 519.651

О СВОЙСТВАХ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ C^∞–ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ (К ФЕНОМЕНУ НЕНАСЫЩАЕМОСТИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ)

В. Н. Белых

Аннотация: В 1975 г. в Докладах АН СССР (Т. 221, № 1) появилось сообщение К. И. Бабенко об открытии им принципиально новых — *ненасыщаемых* — численных методов. Отличительная черта последних — отсутствие главного члена погрешности, и как результат — способность автоматически подстраиваться под любые естественные для задач классы корректности (*феномен ненасыщаемости*).

Показано, что на отрезке феномен ненасыщаемости численного метода является следствием, хотя и необычайно тонким, всего лишь основательно разработанной теории полиномиального приближения непрерывных функций. На этом всегда, кстати, настаивал К. И. Бабенко.

Ключевые слова: ненасыщаемый численный метод, экспоненциальная сходимость, сверхсходимость.

Чтобы получить наиболее эффективно работающие при приближенном решении задач численные алгоритмы, очень важно использовать всю информацию о свойствах решения и, в частности, информацию о его бесконечной дифференцируемости. Поэтому при использовании приближенных численных процедур всегда интересна задача об оптимальном выборе их параметров, т. е. о выборе с таким расчетом, чтобы приближение стало наилучшим для данного класса бесконечно дифференцируемых функций. Решение задачи оптимального выбора тесно связано с конструированием так называемых *ненасыщаемых* вычислительных методов [1]. При исследовании затронутой проблемы существенное значение имеют так называемые аппроксимационные свойства самого класса бесконечно дифференцируемых функций, рассматриваемого как ограниченное подмножество пространства непрерывных функций. В этой связи естественно возникает задача об асимптотике величин наилучших полиномиальных приближений бесконечно дифференцируемых функций на отрезке. При этом сколько-нибудь существенный прогресс в понимании важности этой задачи для целей реальных вычислений стал возможен только с того времени, когда к самой этой проблематике возник стойкий и не случайный *практический* интерес [2–9].

Пусть $C[I]$ — класс непрерывных на отрезке $I \equiv [-1,1]$ функций с чебышевской нормой

$$\|f\| = \max_{t\in I} |f(t)|.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05–01–00250) и программы «Современные проблемы математики» Отделения математических наук РАН.

Задача наилучшего полиномиального приближения элемента $f \in C[I]$ состоит, как известно [1], в отыскании такого многочлена $Q_n \in \mathscr{P}^n$, что

$$\|f - Q_n\| = \inf_{P_n \in \mathscr{P}^n} \|f - P_n\| = E_n(f),$$

где $\mathscr{P}^n \subset C[I]$ — подпространство алгебраических многочленов степени не выше $n-1$, $n > 0$ — целое число. Хорошо известно [10], что числовыми характеристиками $E_n(f)$ обладает любая непрерывная функция f и по теореме Вейерштрасса $\lim\limits_{n\to\infty} E_n(f) = 0$.

Фундаментальное значение при этом имеет существенное уточнение теоремы Вейерштрасса в форме так называемых неравенств Джексона: если $f \in C^k[I]$, где $k \geq 0$ — целое, а $C^k[I]$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых функций с нормой $\|f\|_k = \max\limits_{0\leq\alpha\leq k} \|f^{(\alpha)}\|$, то

$$E_n(f) \leq \frac{\pi}{2} \frac{\|f^{(k)}\|}{n^k} \quad \text{при } n \geq k.$$

Из серии этих классических неравенств получаем для любой бесконечно дифференцируемой функции $f \in C^\infty[I]$ следующее «усиленное» неравенство Джексона:

$$E_n(f) \leq \frac{\pi}{2} \min_{0\leq k\leq n} \frac{\|f^{(k)}\|}{n^k}.$$

Сопоставим теперь произвольной функции $f \in C^\infty[I]$, удовлетворяющей условиям

$$f \notin \mathscr{P}^n, \quad \|f\| = G(0) \neq 0, \quad \|f^{(k)}\| \leq G(k), \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{G(k)} = \infty,$$

следующую функцию непрерывного аргумента $x \geq 0$:

$$\lambda(x) = \begin{cases} G(0) & \text{при} \quad 0 \leq x < 1, \\ \min\limits_{0\leq k\leq x} \frac{G(k)}{x^k} & \text{при} \quad x \geq 1, \end{cases}$$

а также функцию $\theta(x)$, нулевую при $0 \leq x < 1$ и равную максимальному натуральному числу k со свойствами $1 \leq k \leq x$ и $\frac{G(k)}{x^k} = \lambda(x)$. Иными словами,

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leq x < 1, \\ \max\bigl\{k \mid 1 \leq k \leq x \quad \text{и} \quad \lambda(x) = \frac{G(k)}{x^k}\bigr\} & \text{при} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Таким образом, любой функции $f \in C^\infty[I]$ соответствует пара вещественных функций $\lambda(x)$ и $\theta(x)$, причем всегда

$$\lambda(x) = \min_{0\leq k\leq x} \frac{G(k)}{x^k} = \frac{G[\theta(x)]}{x^{\theta(x)}}, \quad 0 \leq \theta(x) \leq x \quad \text{и} \quad E_n(f) \leq \frac{\pi}{2}\lambda(n).$$

Примерами C^∞-гладких функций являются функции из известных классов Жеврея [11], а также функции, аналитически продолжимые с отрезка [12].

Теорема 1. *При $x \geq 1$ функция $\theta(x)$ целочисленна и неотрицательна, не убывает, всюду непрерывна справа и стремится к бесконечности вместе с x; функция $\lambda(x)$ строго монотонно убывает, всюду непрерывна справа и стремится к нулю при $x \to \infty$. Функция $\lambda(x)$ терпит разрывы слева в тех и только тех* *точках x_i, которые являются точками разрыва функции $\theta(x)$. При этом для любого $\xi \geq 0$ имеет место равенство*

$$\lambda(x) = \lambda(\xi) e^{-\int\limits_{\xi}^{x} \frac{\theta(t)}{t}\,dt} e^{-\sum\limits_{\xi < x_i \leq x} |\sigma_i|}, \quad x \geq \xi. \tag{1}$$

Здесь $\sigma_0 = 0$ и $\sigma_i = \ln\lambda(x_i - 0) - \ln\lambda(x_i)$[1] *для любого $i > 0$.*

Доказательство. Целочисленность и неотрицательность функции $\theta(x)$ очевидны. Проверим, что $\theta(x)$ не убывает. Пусть $y > x \geq 1$, а $\theta(y) < \theta(x)$. Тогда $\theta(y) < \theta(x) \leq x$ и

$$\frac{G[\theta(x)]}{x^{\theta(x)}} = \lambda(x) = \min_{1\leq k\leq x} \frac{G(k)}{x^k} \leq \frac{G[\theta(y)]}{x^{\theta(y)}}.$$

Значит,

$$y^{\theta(x)-\theta(y)} > x^{\theta(x)-\theta(y)} \geq \frac{G[\theta(x)]}{G[\theta(y)]},$$

т. е.

$$\frac{G[\theta(x)]}{y^{\theta(x)}} < \frac{G[\theta(y)]}{y^{\theta(y)}} = \lambda(y) \quad \text{при } \theta(x) \leq x < y,$$

что противоречит определению $\lambda(y)$.

Для доказательства непрерывности справа функции $\theta(x)$ заметим, что значение $\theta(x+0)$ существует вследствие того, что $\theta(x)$ не убывает, и является целым числом, причем можно указать такое $\varepsilon_0 > 0$, что $\theta(x+\varepsilon) = \theta(x+0)$ при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Пусть $R = \theta(x+\varepsilon) = \theta(x+0)$. Тогда при $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ имеем

$$\lambda(x+\varepsilon) = \min_{1\leq k\leq x+\varepsilon} \frac{G(k)}{(x+\varepsilon)^k} = \frac{G(R)}{(x+\varepsilon)^R} \leq \frac{G(n)}{(x+\varepsilon)^n} \quad \forall n \leq x+\varepsilon.$$

По соображениям непрерывности при $\varepsilon \to +0$ для всех $n \leq x$ справедливо неравенство $G(R)/x^R \leq G(n)/x^n$ и, значит, $G(R)/x^R = \lambda(x)$. Следовательно, $\theta(x) \geq R = \theta(x+0)$. Но $\theta(x) \leq \theta(x+0)$ в силу монотонности $\theta(y)$, и непрерывность справа функции $\theta(x)$ установлена.

Легко разрешается вопрос и о поведении функции $\theta(x)$ при $x \to \infty$: оценка $\theta(x) \geq p$ с любым целым $p \geq 0$ верна при

$$x > \max_{0\leq k\leq p-1} \{ \sqrt[p-k]{G(p-k)/G(k)} \} \geq \sqrt[p]{G(p)/\|f\|}$$

и, поскольку $\lim\limits_{p\to\infty} \sqrt[p]{G(p)} = \infty$, а $\theta(x)$ не убывает, имеем $\lim\limits_{x\to\infty} \theta(x) = \infty$.

Устремив x к бесконечности, перенумеруем точки разрыва функции $\theta(x)$ в порядке их возрастания:

$$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < x_{i+1} < \ldots, \quad \text{причем } x_1 \geq 1.$$

В результате полуось $[0, \infty)$ разбивается на промежутки $[x_i, x_{i+1})$, в каждом из которых $\theta(x)$ принимает целое значение $\theta_i \equiv \theta(x_i) = \theta(x_i + 0)$. Значения θ_i строго возрастают, образуя неограниченно растущую последовательность: $\theta_0 = 0$, $\theta_i < \theta_{i+1}$ для любого $i \geq 0$.

---

[1] Аббревиатура $x \pm 0$ означает пределы в точке x последовательностей, сходящихся к ней соответственно слева (знак минус) и справа (знак плюс).

Докажем монотонность функции $\lambda(x)$. Действительно, если $y > x \geq 1$ и $r = \theta(y)$, $l = \theta(x)$, то $\theta(x) \leq \theta(y)$, $l \geq 1$, при этом

$$\lambda(y) = \frac{G(r)}{y^r} \leq \frac{G(l)}{y^l} = \frac{G(l)}{yy^{l-1}} \leq \frac{G(l)}{yx^{l-1}} \leq \frac{x}{y}\frac{G(l)}{x^l} = \frac{x}{y}\lambda(x) < \lambda(x).$$

Убывание функции $\lambda(x)$ к нулю с ростом x вытекает из неравенства $0 \leq \lambda(x) \leq G(1)/x$. Наконец, непрерывность функции $\lambda(x) = G[\theta(x)]/x^{\theta(x)}$ следует из уже установленной непрерывности функции $\theta(x)$: $\lambda(x) = \lambda(x+0)$. При этом $\lim\limits_{x\to+0} \lambda(x) = \lambda(0)$ и $\lambda(x)$ непрерывна в 0 справа.

Получим равенство (1). Отметим, что на конечном промежутке монотонная функция $\lambda(x)$ может иметь лишь конечное число точек разрыва. При этом по классической теореме Лебега $\lambda(x)$ имеет конечную производную на множестве полной меры, причем эта производная измерима и даже суммируема на нем. Если x изменяется внутри промежутка (x_i, x_{i+1}), то вследствие равенства $\ln\lambda(x) = -\theta(x)\ln x + G[\theta(x)]$ имеем $d\ln\lambda(x)/dx = -\theta(x)/x$. Отсюда ввиду непрерывности $\theta(x)$ справа заключаем, что в каждой точке $x \geq 0$ функция $\ln\lambda(x)$ обладает правой производной:

$$\left[\frac{d\ln\lambda(x)}{dx}\right]_+ = -\frac{\theta(x)}{x} \quad \forall x \geq 0.$$

Остается применить другую теорему Лебега о восстановлении первообразной с помощью интегрирования. В результате для любой точки $\xi \geq 0$, в которой функция $\lambda(\xi)$ непрерывна, и любого $x > \xi$ получаем представление

$$\int\limits_\xi^x \left[\frac{d\ln\lambda(t)}{dt}\right]_+ = -\int\limits_\xi^x \frac{\theta(t)}{t}\,dt,$$

которое с известными предосторожностями переписывается в следующем виде:

$$\ln\frac{\lambda(x)}{\lambda(\xi)} = -\int\limits_\xi^x \frac{\theta(t)}{t}\,dt - \sum_{\xi < x_i \leq x} |\sigma_i|,$$

где $\sigma_0 = 0$ и $\sigma_i = \ln\lambda(x_i - 0) - \ln\lambda(x_i)$, а суммирование производится по всем точкам разрыва x_i функции $\theta(x)$, лежащим в промежутке $(\xi, x]$. Теорема 1 доказана.

Прокомментируем полученный результат. Если в усиленном неравенстве Джексона зафиксировать параметр $n = n_0$, то среди оценок, отвечающих различным k, $0 \leq k \leq n_0$, имеется наилучшая. Ее номер $k_0 = \theta(n_0)$ как раз и есть порядок той (максимальной) производной, которая еще участвует в формировании правой части усиленного неравенства Джексона. Производные более высоких порядков $k > k_0$ могут повлиять на результат только при $n > n_0$. С ростом n порядок $\theta(n)$ стремления к нулю правой части усиленного неравенства Джексона монотонно изменяется и, не убывая, обеспечивает соответствующей величине минимальное для данного n значение. Тем самым метод аппроксимации бесконечно дифференцируемой функции f соответствующим ей многочленом Q_n чебышевского наилучшего приближения, примыкая к методам переменных порядков (сходимости), отличается от них повышенной ролью фактора ассоциативности с классом гладкости функции f. С ростом параметра n этот метод самосовершенствуется, т. е. автоматически непосредственно в дифференциальной природе f отслеживает эволюцию роста своей практической эффективности, настраиваясь по фактической гладкости f на максимальный для данного n порядок сходимости $\theta(n)$ (феномен *ненасыщаемости*). Значит, выявляя возможность «гибкого» участия в процессе вычислений больших (так называемых *экстраординарных*) запасов гладкости функций, теорема 1 в дополнение к этому устанавливает, что любой приближенный метод, погрешность которого оценивается в терминах полиномиальных чебышевских характеристик гладкости участвующих в вычислениях функций, оказывается *ненасыщаемым* [1]. При этом сама конструкция такого типа методов уже изначально такова, что способна вместить в себя, образно говоря, возможности бесконечного множества вычислительных методов, сосредоточенных, так сказать, в ней одной.

Приближенные методы, имеющие главный член погрешности, т. е. *насыщаемые* (конечно-разностные, конечных элементов, квадратур и подобные им), свойством «гибкости», присущей рассмотренному выше методу, не обладают [1]. Поэтому выход за клише господствующей в вычислительной практике конечно-разностной парадигмы становится возможен лишь за счет отречения от «ценностей», ассоциированных с ее статус-кво — главным членом погрешности.

Рассматривая C^∞-гладкие функции на отрезке $I \equiv [-1,1]$, мы считали их бесконечно дифференцируемыми всюду вплоть до границ I. Несомненный интерес представляет и тот случай, когда производные функций, будучи ограниченными в замкнутом промежутке, допускают вблизи его концов рост, сам характер которого фиксирован с помощью некоторого числового параметра ε_0, $0 < \varepsilon_0 < 1$. Ситуации подобного рода типичны для вычислительной практики [2–5, 13]. Например, они возникают при численном решении задач, имеющих «пограничные слои» — резкие переходные зоны в режимах поведения решений. Размеры таких переходных зон обычно характеризуются величиной параметра ε_0, называемого толщиной пограничного слоя. Присутствие в задаче такой ярко выраженной специфики поведения ее решений требует неформального отношения. Спрашивается: как указанная специфика способна отразиться на сходимости к нулю (с ростом параметра n) чебышевских характеристик $E_n(f)$? Дадим более четкую формулировку поставленного вопроса [2, 13].

Определение. Функция $f \in C^\infty[I]$ обладает на отрезке $I \equiv [-1,1]$ *пограничным слоем толщины* ε_0, $0 < \varepsilon_0 < 1$, если существуют такое малое положительное число $\tau = \tau(\varepsilon_0)$ и такая положительная функция $F(k)$, не зависящая от ε_0, что при любом целом $k \geq 0$ справедливо неравенство

$$|f^{(k)}(t)| \leq \begin{cases} F(k), & \text{если} \quad t \in I_\tau \equiv [-1+\tau, 1-\tau], \\ {\varepsilon_0}^{-k} F(k), & \text{если} \quad t \in I \setminus I_\tau. \end{cases} \tag{2}$$

Нижеследующий результат является следствием фундаментальности [10, 14], существующей в природе полиномиальной аппроксимации гладких непериодических функций на отрезке I (подробности в [2, 13]).

Теорема 2. *Если $f \in C^\infty[I]$ и выполнено условие* (2), *то*

$$E_n(f) \leq \frac{\pi}{2} \min_{0 \leq k \leq n} \left\{ \frac{F_k {\varepsilon_0}^{-k/2}}{n^k} \right\} \tag{3}$$

(*коэффициенты F_k вычисляются эффективно по набору $F(k)$ из* (2)).

Доказательство. Положим $t = \cos\theta$ и перейдем от промежутка $I \equiv [-1,1]$ к окружности $S \equiv [0,2\pi]$. Пусть $\tilde f(\theta) = f(\cos\theta)$ и $D = d/d\theta$. Высшие производные $D^k\tilde f(\theta)$ функции f переменной $t = t(\theta)$ выражаются через $t_j = D^j t$, $1 \le j \le k$, по известной формуле Фаа де Бруно [15]. Существует несколько версий равносильной записи этой формулы, лишь по-разному выражающих оператор D^k через коммутирующие дифференциальные операторы $d_j = (j!)^{-1}t_j\partial/\partial t$, которые, действуя на функции переменной t, переводят их в функции переменных t, t_j, $1 \le j \le k$:

$$D^k = \sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\alpha!}d^\alpha, \quad \text{где} \quad d^\alpha = d_1^{\alpha_1}\dots d_k^{\alpha_k} \quad \text{при } \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_k),$$
$$\text{и} \quad |\alpha| = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + k\alpha_k, \quad \alpha! = \alpha_1!\dots\alpha_k!.$$

Одна из упомянутых версий с учетом зависимости $t = \cos\theta$ такова:

$$D^k\tilde f(\theta) = \sum_{j=0}^{k-1} f^{(k-j)}(\cos\theta)\varphi_{k,k-j}(\theta), \quad f^{(j)}(t) = \frac{\partial^j f(t)}{\partial t^j}\bigg|_{t=\cos\theta}. \tag{4}$$

Здесь $\varphi_{0,0}(\theta) = 1$ и

$$\varphi_{k,j}(\theta) = \frac{1}{j!}\sum_{\nu=1}^{j}\binom{j}{\nu}(-\cos\theta)^{j-\nu}D^k(\cos^\nu\theta) \quad \text{при } 1 \le j \le k. \tag{5}$$

Коэффициенты $\varphi_{k,j}(\theta)$, как это явствует из (5), не зависят от функции f и являются тригонометрическими полиномами порядка не выше j. Легко устанавливаются следующие рекуррентные соотношения:

$$\varphi_{k,1}(\theta) = D\varphi_{k-1,1}(\theta), \quad \varphi_{k,k}(\theta) = -\sin\theta\varphi_{k-1,k-1}(\theta) \quad \text{при } k \ge 1, \tag{6}$$

$$\varphi_{k,j}(\theta) = -\sin\theta\varphi_{k-1,j-1}(\theta) + D\varphi_{k-1,j}(\theta) \quad \text{при } 2 \le j \le k-1. \tag{7}$$

Если в качестве граничных данных принять условие $\varphi_{0,0}(\theta) = 1$, то указанные соотношения удобны для рекуррентного восстановления коэффициентов $\varphi_{k,j}(\theta)$ из формулы (4). Например, из (6) сразу следует, что

$$\varphi_{k,k}(\theta) = (-\sin\theta)^k \quad \text{и} \quad \varphi_{k,k-1}(\theta) = (-1)^{k-1}\frac{k(k-1)}{2}\sin^{k-2}\theta\cos\theta.$$

Более тщательный анализ соотношений (7) выявляет аналитическое устройство некоторой части коэффициентов $\varphi_{k,j}(\theta)$. Например, в случае $j \le [k/2]$, где $[k/2]$ — целая часть $k/2$, справедливо представление

$$\varphi_{k,k-j}(\theta) = (\sin\theta)^{k-2j}p_{k,k-j}(\theta) \quad \text{при } j \le [k/2], \tag{8}$$

в котором $p_{k,k-j}(\theta)$ — тригонометрический полином порядка $\le j$.

Справедливость (8) проверяется индукцией по k. При $k = 1$ равенство (8) очевидно. Пусть (8) выполняется для некоторого целого $k > 1$. Докажем его справедливость для значения $k+1$. Привлекая соотношение (7), получим

$$\varphi_{k+1,k+1-j}(\theta) = -\sin\theta\varphi_{k,k-j}(\theta) + D\varphi_{k,k+1-j}(\theta). \tag{9}$$

Из (9) вытекает, что рассмотрению подлежат лишь две возможности: $j \le (k+1)/2$ и $j < (k+1)/2$. В случае $j \le (k+1)/2$, т. е. при $j-1 < k/2$, имеем

$$\varphi_{k,k+1-j}(\theta) = \varphi_{k,k-(j-1)}(\theta) = (\sin\theta)^{k-2(j-1)}p_{k,k-(j-1)}(\theta),$$

поэтому

$$D\varphi_{k,k+1-j}(\theta) = (\sin\theta)^{k+1-2j}[(k+2-2j)\cos\theta p_{k,k+1-j}(\theta) + \sin\theta D p_{k,k+1-j}(\theta)].$$

В случае $j < (k+1)/2$, т. е. при $j \le k/2$, имеем $\varphi_{k,k-j}(\theta) = (\sin\theta)^{k-2j} p_{k,k-j}(\theta)$. Окончательно из (9) получается равенство

$$\varphi_{k+1,k+1-j}(\theta) = (\sin\theta)^{k+1-2j} p_{k+1,k+1-j}(\theta),$$

которое и завершает индуктивные рассуждения, поскольку в случае $j = (k+1)/2$ соотношение (8) очевидно.

Доказательство утверждения о порядке полинома $p_{k,k-j}(\theta)$ труда не составляет.

Индукцией по k с применением классической теоремы С. Н. Бернштейна об оценке производной полинома [10] из (7) легко выводится следующая оценка коэффициентов $\varphi_{k,j}(\theta)$ в $C[S]$:

$$\|\varphi_{k,k-j}\| \ \le (k-j)^{2j} \quad \text{при } 1 \le j \le k-1.$$

Покажем, как в условиях (2) из формулы (4) выводятся равномерные оценки производных функции $\tilde f$ на S. Подставив (8) в (4), получим

$$\begin{aligned} D^k \tilde f(\theta) &= \sum_{j=0}^{[k/2]} f^{(k-j)}(\cos\theta)(\sin\theta)^{k-2j} p_{k,k-j}(\theta) + \sum_{j=[k/2]+1}^{k-1} f^{(k-j)}(\cos\theta)\varphi_{k,k-j}(\theta) \\ &= \sum_{j=0}^{[k/2]} f^{(k-j)}(\cos\theta)\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^{k-2j}\theta^{k-2j} p_{k,k-j}(\theta) + \sum_{j=[k/2]+1}^{k-1} f^{(k-j)}(\cos\theta)\varphi_{k,k-j}(\theta). \end{aligned} \tag{10}$$

Функция $s(\theta) = \sin\theta/\theta$ на отрезке $[0,\pi/2]$ убывает, поскольку $Ds(\theta) = \cos\theta(\theta - \operatorname{tg}\theta)/\theta^2 < 0$, так как $\theta < \operatorname{tg}\theta$, а поэтому $s(\theta) > s(\pi/2) = 2/\pi$, т. е. $2/\pi < \sin\theta/\theta < 1$. Аналогично убеждаемся, что поскольку функция $c(\theta) = \cos\theta - 1 + \theta^2/2$ обращается в нуль при $\theta = 0$, а при $\theta > 0$ ее производная $Dc(\theta) = -\sin\theta + \theta$ строго положительна (ибо $\sin\theta < \theta$), то $c(\theta)$ возрастает и, следовательно, $c(\theta) > c(0) = 0$, т. е. $\cos\theta > 1-\theta^2/2$ для $0 < \theta < \pi/2$. Поэтому если $1-\tau < t = \cos\theta < 1$, то $0 \le \theta \le \theta_0$ с $\theta_0 = \sqrt{2\tau} < \pi/2$. Далее, приняв $\tau = \varepsilon_0/2$ и использовав (2), оценим производную (10) вблизи правого конца отрезка I, т. е. на промежутке $0 \le \theta \le \theta_0 = \sqrt{\varepsilon_0}$, следующим образом:

$$\begin{aligned} |D^k \tilde f(\theta)| &\le \sum_{j=0}^{[k/2]} |f^{(k-j)}(t)|\theta_0^{k-2j}\|p_{k,k-j}\| + \sum_{j=[k/2]+1}^{k-1} |f^{(k-j)}(t)|\,\|\varphi_{k,k-j}\| \\ &\le \sum_{j=0}^{[k/2]} F(k-j)\varepsilon_0^{-k/2}\|p_{k,k-j}\| + \sum_{j=[k/2]+1}^{k-1} F(k-j)\varepsilon_0^{-(k-j)}\|\varphi_{k,k-j}\| \le \frac{1}{3}\varepsilon_0^{-k/2}F_k. \end{aligned}$$

Здесь

$$F_k = \sum_{j=0}^{[k/2]} F(k-j)\|p_{k,k-j}\| + \sum_{j=[k/2]+1}^{k-1} F(k-j)\varepsilon_0^{(j-k/2)}\|\varphi_{k,k-j}\|.$$

Принимая во внимание, что такое же неравенство верно и вблизи левого конца отрезка I, т. е. там, где $-1 < t = \cos\theta < -1+\tau$, для всех точек $\theta \in S$, загрубляя общую оценку, получаем

$$|D^k \tilde f(\theta)| \le \varepsilon_0^{-k/2}F_k, \quad F_k \le \sum_{j=0}^{k-1} F(k-j)\|\varphi_{k,k-j}\| \le \sum_{j=0}^{k-1} F(k-j)(k-j)^{2j}.$$

По теореме Джексона [10] для любого целого $n \geq k$ существует четный тригонометрический полином $H_n(\theta)$ порядка не выше n такой, что

$$|\tilde{f}(\theta) - H_n(\theta)| \leq \frac{\pi}{2}\frac{F_k\varepsilon_0^{-k/2}}{n^k}.$$

Поскольку $H_n(\theta) = P_n(\cos\theta)$, где $P_n(t)$ — алгебраический многочлен степени $\leq n$, для всех $t \in I$ будет выполнено неравенство $|f(t) - P_n(t)| \leq (\pi/2)\varepsilon_0^{-k/2}F_k/n^k$. Отсюда и следует оценка (3). Теорема 2 доказана.

Обратим внимание на прикладное значение оценки (3): за счет перераспределения пограничного слоя по всему отрезку I его толщина ε_0 увеличилась до значения $\sqrt{\varepsilon_0}$. Это важное и полезное для практики обстоятельство лежит в основе так называемой *нейтрализации* пограничного слоя заданной толщины $\varepsilon_0 > 0$. Нейтрализация состоит в использовании ресурсов гладкости функции $f \in C^\infty[I]$ и преодолении за счет этого и с учетом теоремы 1 трудностей, создаваемых наличием в неравенствах (2) пограничного слоя. Действительно, подходящим выбором параметра n обеспечивается оценка

$$E_n(f) \leq \frac{\pi}{2} \min_{0\leq k\leq n\sqrt{\varepsilon_0}} \frac{F_k}{(n\sqrt{\varepsilon_0})^k} \leq \varepsilon, \quad \text{где } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0,$$

достижимая для значений n, превосходящих некоторое «пороговое» значение $n_{\min}$: $n > n_{\min}$. С уменьшением ε_0 значение $n_{\min}$ может разве что возрасти. Количество используемых производных является при этом величиной $O\big(\varepsilon_0^{-1/2}\big)$. Как показано в [2–5], учет уже нескольких «лишних» производных может привести к успеху даже в очень сложных вычислительных ситуациях. При этом выясняется, что для нейтрализации пограничного слоя толщины $\varepsilon_0 > 0$ вовсе необязательно даже, чтобы функция f была бесконечно дифференцируемой: вполне можно обойтись конечным запасом производных в количестве, не меньшем $O\big(\varepsilon_0^{-1/2}\big)$. Отметим, что численные методы с главным членом погрешности, т. е. насыщаемые, способностью к нейтрализации пограничного слоя не обладают.

Пусть теперь $\widetilde{C}[0, 2\pi]$ — класс 2π-периодических непрерывных на всей оси функций с чебышевской нормой

$$\|f\| = \max_{t\in[0,2\pi]} |f(t)|.$$

Пространство $\widetilde{C}[0, 2\pi]$ можно трактовать и как пространство $C[S]$ непрерывных на единичной окружности S функций. Для любой функции $f \in C[S]$ определено ее наилучшее приближение тригонометрическими полиномами заданного порядка m, $m \geq 0$ целое:

$$e_m(f) = \inf_{H_m\in\mathscr{T}^m} \|f - H_m\| = \|f - R_m\|,$$

где $\mathscr{T}^m \subset \widetilde{C}[0, 2\pi]$ — подпространство тригонометрических полиномов порядка не выше m. Если $k \geq 0$ целое и $f \in \widetilde{C}^k[0, 2\pi]$ — пространство 2π-периодических k раз непрерывно дифференцируемых на всей оси функций, то из классических неравенств Джексона [10] имеем

$$e_m(f) \leq \frac{\pi}{2}\frac{\|f^{(k)}\|}{m^k} \quad \forall m \geq 0.$$

Пусть f — произвольная функция из $\widetilde{C}^\infty[0,2\pi]$, удовлетворяющая условиям

$$f \notin \mathscr{T}^m, \quad \|f\| = G(0) \neq 0, \quad \|f^{(k)}\| \leq G(k), \quad \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{G(k)} = \infty.$$

Сопоставим ей следующую функцию непрерывного аргумента $x \geq 0$:

$$\mu(x) = \begin{cases} G(0) & \text{при} \quad 0 \leq x < 1, \\ \inf\limits_{k\geq 0} \frac{G(k)}{x^k} & \text{при} \quad x \geq 1, \end{cases}$$

а также функцию $\vartheta(x)$, нулевую при $0 \leq x < 1$ и равную максимальному натуральному числу k со свойством $\frac{G(k)}{x^k} = \mu(x)$. Иными словами,

$$\vartheta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad 0 \leq x < 1, \\ \max\left\{k \mid \mu(x) = \frac{G(k)}{x^k}\right\} & \text{при} \quad x \geq 1. \end{cases}$$

Определения функций $\mu(x)$ и $\vartheta(x)$ корректны: при $k \to \infty$ мажоранта $G(k)$ стремится к бесконечности быстрее любой степени фиксированного числа $x \geq 1$ и, стало быть, знак inf в определении $\mu(x)$ всегда можно заменить на min. Таким образом, любой функции $f \in \widetilde{C}^\infty[0,2\pi]$ соответствует пара вещественных функций $\mu(x)$ и $\vartheta(x)$, причем всегда

$$\mu(x) = \min_{k\geq 0} \frac{G(k)}{x^k} = \frac{G[\vartheta(x)]}{x^{\vartheta(x)}} \quad \text{и} \quad e_m(f) \leq \frac{\pi}{2}\mu(m).$$

Теорема 3. *При $x \geq 1$ функция $\vartheta(x)$ целочисленна, неотрицательна, не убывает, всюду непрерывна справа и стремится к бесконечности вместе с x. Функция $\mu(x)$ строго монотонно убывает, всюду непрерывна и стремится к нулю при $x \to \infty$. При этом для любого $\xi \geq 0$ имеет место равенство*

$$\mu(x) = \mu(\xi) e^{-\int\limits_\xi^x \frac{\vartheta(t)}{t}\,dt}, \quad x \geq \xi. \tag{11}$$

Доказательство. Условимся те значения целого параметра $k \geq 0$, для которых $\mu(x) = G(k)/x^k$, называть *экстремальными* для точки x. При данном $x \geq 1$ в силу условий на мажоранту $G(k)$ таких экстремальных значений всегда конечное число. Наименьшее из экстремальных для данного $x \geq 1$ значений обозначим через $\nu(x)$ (в то время как $\vartheta(x)$ — это наибольшее из них). При этом точку $x \geq 1$ назовем *простой*, если ей соответствует одно экстремальное значение $k = k(x)$, или *кратной*, если имеется не менее двух экстремальных значений $k = k(x)$. Все точки из промежутка $0 \leq x < 1$ считаем простыми.

Числовые функции $\mu(x)$, $\nu(x)$ и $\vartheta(x)$ связаны соотношениями

$$\mu(x) = \frac{G[\nu(x)]}{x^{\nu(x)}} = \frac{G[\vartheta(x)]}{x^{\vartheta(x)}} \quad \text{и} \quad 0 \leq \nu(x) \leq \vartheta(x).$$

Целочисленность и неотрицательность функций $\nu(x)$ и $\vartheta(x)$ очевидны. Установим их монотонность.

Пусть $x_1 \leq x_2$ и $N_i \equiv \vartheta(x_i)$, $n_i \equiv \nu(x_i)$, $i = 1, 2$. Тогда справедливы соотношения

$$\frac{G(N_1)}{x_1^{N_1}} = \mu(x_1) = \min_{k\geq 0} \frac{G(k)}{x_1^k} \leq \frac{G(n_2)}{x_1^{n_2}}, \quad \frac{G(n_2)}{x_2^{n_2}} = \mu(x_2) = \min_{k\geq 0} \frac{G(k)}{x_2^k} \leq \frac{G(N_1)}{x_2^{N_1}}.$$

Следовательно, $x_1^{N_1}x_2^{n_2} \geq x_1^{n_2}x_2^{N_1}$, так что $(N_1 - n_2)\ln(x_1/x_2) \geq 0$. Значит, $N_1 \leq n_2$, т. е. верны неравенства

$$\vartheta(x_1) \leq \nu(x_2) \leq \vartheta(x_2), \quad \nu(x_1) \leq \vartheta(x_1) \leq \nu(x_2). \tag{12}$$

Докажем, что функции $\vartheta(x)$ и $\nu(x)$ в точке $x \geq 1$ непрерывны соответственно справа и слева. Так как функции $\vartheta(x)$ и $\nu(x)$ целочисленны, существующие вследствие их монотонности значения $\vartheta(x \pm 0)$ и $\nu(x \pm 0)$ также являются целыми. При этом найдется такое число $\varepsilon_0 > 0$, что

$$\vartheta(x \pm \varepsilon) = \vartheta(x \pm 0) \quad \text{и} \quad \nu(x \pm \varepsilon) = \nu(x \pm 0) \quad \text{при } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

Тем самым существуют интервалы (x^-, x) и (x, x^+), на которых функции $\nu(x)$ и $\vartheta(x)$ принимают постоянные значения $n^- \equiv \nu(x-0)$, $n^+ \equiv \nu(x+0)$ и $N^- \equiv \vartheta(x-0)$, $N^+ \equiv \vartheta(x+0)$ соответственно. Установим, что значения $n^\pm$ и $N^\pm$ экстремальны для точки x.

В самом деле, если R — любая из величин $n^\pm$ и $N^\pm$, а $\{y_\varepsilon\}$ — сходящаяся к точке x последовательность из соответствующего R интервала, то для всех $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ справедливы соотношения

$$\mu(y_\varepsilon) = \min_{k \geq 0} \frac{G(k)}{y_\varepsilon^k} = \frac{G(R)}{y_\varepsilon^R} \leq \frac{G(m)}{y_\varepsilon^m} \quad \forall m \geq 0.$$

Значит, в пределе при $\varepsilon \to +0$ для всех $m \geq 0$ выполняется неравенство $G(R)/x^R \leq G(m)/x^m$, которое вместе с определением функции $\mu(x)$ приводит к соотношению $\mu(x) = G(R)/x^R$, означающему как раз экстремальность R для точки x.

Пользуясь установленной экстремальностью величин $n^\pm$ и $N^\pm$, получим в соответствии с определением функций $\nu(x)$ и $\vartheta(x)$ следующие неравенства:

$$\nu(x) \leq n^- \leq N^- \leq \vartheta(x), \quad \nu(x) \leq n^+ \leq N^+ \leq \vartheta(x).$$

Согласно неравенствам (12) при $y_1 \leq y_2$ имеем $\vartheta(y_1) \leq \nu(y_2)$. Следовательно, верны соотношения

$$N^- = \vartheta(x-0) \leq \nu(x) \quad \text{и} \quad \vartheta(x) \leq \nu(x+0) = n^+,$$

которые вместе с предыдущими оценками приводят к равенствам

$$\nu(x) = \nu(x-0) = \vartheta(x-0), \quad \nu(x+0) = \vartheta(x+0) = \vartheta(x).$$

Это и означает, что $\nu(x)$ непрерывна в точке x слева, а функция $\vartheta(x)$ — справа.

В процессе предыдущих рассуждений установлено, что у всякой точки x имеется окрестность (x^-, x^+), все точки которой, кроме, быть может, самой x, простые. Значит, множество кратных точек x_i на полуоси $x \geq 1$ не более чем счетно. Расположив кратные точки в порядке их возрастания:

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots,$$

где x_1 — первая кратная точка, $x_1 \geq 1$, установим, что $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = \infty$.

Предположим противное, т. е. что в множестве кратных точек существует максимальный элемент x_s, $x_s < \infty$. Тогда при всех достаточно больших x и $m \neq n_s$ будет справедливо неравенство $G(n_s)/x^{n_s} < G(m)/x^m$. Но $\lim\limits_{k\to\infty} G(k)/x^k = \infty$, и поэтому можно указать такое $m > n_s$, что $G(m) \neq 0$. Для этого m неравенство $G(n_s)/x^{n_s} < G(m)/x^m$ при достаточно больших x выполняться уже не может. Полученное противоречие доказывает искомое предельное соотношение.

В результате полуось $[0, \infty)$, на которой определены функции $\vartheta(x)$ и $\nu(x)$, разбивается кратными точками на промежутки (x_i, x_{i+1}) $\forall i \geq 0$, в каждом из которых $\vartheta(x)$ и $\nu(x)$ постоянны и принимают целые значения. При этом для любого $x \in (x_i, x_{i+1})$ имеют место равенства

$$\vartheta_i \equiv \vartheta(x_i) = \vartheta(x_i + 0) = \vartheta(x) = \nu(x) = \nu(x_{i+1} - 0) = \nu(x_{i+1}) \equiv \nu_{i+1}.$$

Последовательность ϑ_i значений функции $\vartheta(x)$ в кратных точках x_i, где $\vartheta(x)$ терпит разрыв слева, строго возрастающая и неограниченная:

$$\vartheta_0 = 0 < \vartheta_1 < \cdots < \vartheta_i < \vartheta_{i+1} < \ldots, \quad i \geq 0.$$

Неограниченность последовательности ϑ_i является следствием монотонности функции $\vartheta(x)$ и неравенства $\vartheta(x) \geq p$, выполняющегося для любого заданного целого $p \geq 0$ при условии, что

$$x > \max_{0 \leq k \leq p-1} \{ \sqrt[p-k]{G(p-k)/G(k)} \} \geq \sqrt[p]{G(p)/\|f\|}.$$

Установим теперь требуемые свойства функции $\mu(x)$. Для точек x из интервала (x_i, x_{i+1}) имеем $\vartheta(x_i) = \vartheta(x) = \nu(x) = \nu(x_{i+1})$. Положив $\nu(x_{i+1}) = \vartheta(x_i) = N_i$, получим $\mu(x) = \mu_i(x) \equiv G(N_i)/x^{N_i}$. Следовательно, на интервале (x_i, x_{i+1}) функция $\mu(x)$, являясь степенной, строго монотонна и непрерывна. Значения $\nu(x_{i+1})$ и $\vartheta(x_{i+1})$ экстремальны для точки x_{i+1}, т. е. имеют место соотношения

$$\mu_i(x_{i+1}) \equiv \frac{G(N_i)}{x_{i+1}^{N_i}} = \frac{G[\nu(x_{i+1})]}{x_{i+1}^{\nu(x_{i+1})}} = \frac{G[\vartheta(x_{i+1})]}{x_{i+1}^{\vartheta(x_{i+1})}} = \frac{G(N_{i+1})}{x_{i+1}^{N_{i+1}}} \equiv \mu_{i+1}(x_{i+1}).$$

Поэтому и в любой кратной точке x_{i+1} функция $\mu(x)$ также непрерывна. Это свидетельствует о непрерывности и строгой монотонности функции $\mu(x)$ на $[x_1, \infty)$. Поскольку кратных точек счетное число, а непрерывная функция $\mu(x)$ строго монотонно убывает и $0 \leq \mu(x) \leq G(1)/x$, то $\lim\limits_{x \to \infty} \mu(x) = 0$.

Поведение функции $\mu(x)$ в промежутке $[0, x_1)$ определяется условиями

$$\mu(x) = G(0) = \|f\|, \quad \lim_{x \to +0} \mu(x) = \mu(0),$$

и, стало быть, в нуле функция $\mu(x)$ непрерывна справа. Формула (11) для $\mu(x)$ выводится аналогично формуле (1) для функции $\lambda(x)$. Из-за непрерывности $\mu(x)$ в (11) отсутствует конечная сумма в показателе экспоненты. Теорема 3 доказана.

Следствие 1. *Пусть монотонно возрастающая числовая последовательность*

$$\xi_0 = 0, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \ldots$$

содержит все точки разрыва x_i, $i > 0$, функции $\vartheta(x)$. Тогда при $x \in [\xi_{m-1}, \xi_m)$, где $m > 0$, имеет место равенство

$$\mu(x) = \|f\| \frac{\xi_1^{\vartheta(\xi_1)-\vartheta(\xi_0)} \xi_2^{\vartheta(\xi_2)-\vartheta(\xi_1)} \ldots \xi_{m-1}^{\vartheta(\xi_{m-1})-\vartheta(\xi_{m-2})}}{x^{\vartheta(\xi_{m-1})}}. \tag{13}$$

В частности, если $\xi_i = x_i$ и $\vartheta(\xi_i) = \vartheta(x_i) \equiv \vartheta_i$ при $i \geq 0$, то

$$\mu(x) = \mu(x_{m-1}) \left(\frac{x_{m-1}}{x} \right)^{\vartheta_{m-1}}, \quad \mu(x_{m-1}) = \|f\| \frac{x_1^{\vartheta_1 - \vartheta_0} x_2^{\vartheta_2 - \vartheta_1} \ldots x_{m-1}^{\vartheta_{m-1} - \vartheta_{m-2}}}{x_{m-1}^{\vartheta_{m-1}}}. \tag{14}$$

Доказательство. Функция $\vartheta(x)$ постоянна на промежутках $[x_k, x_{k+1})$, $k \geq 0$. Учитывая это при подсчете интеграла в показателе экспоненты из (11), получаем представление

$$\ln \mu(x) = -\left(\sum_{k=1}^{m-1} \vartheta(\xi_k) \ln \frac{\xi_{k+1}}{\xi_k} + \vartheta(\xi_m) \ln \frac{x}{\xi_m}\right) + \ln \mu(0).$$

Из этого равенства и следуют формулы (13) и (14).

Следствие 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $x^*(\varepsilon) \geq 1$, что при всех $x > x^*(\varepsilon)$ будет справедлива оценка*

$$x^{-(1+\varepsilon)\vartheta(x)} \leq \mu(x).$$

Кроме того, существует такое число $x^{**} \geq 1$, что при всех $\gamma > 1$ и при $x > x^{**}$ верно неравенство

$$\mu(\gamma x) \leq e^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}\vartheta(x)}.$$

Доказательство. При $x > 1$ и $\mu(1) < 1$ из (11) имеем

$$\ln \frac{1}{\mu(x)} \leq \left[1 + \left(\ln \frac{1}{\mu(1)}\right) \frac{1}{\vartheta(x) \ln x}\right] \vartheta(x) \ln x.$$

Выбирая x так, что $\left(\ln \frac{1}{\mu(1)}\right) \frac{1}{\vartheta(x) \ln x} < \varepsilon$, приходим к неравенству

$$\ln \frac{1}{\mu(x)} \leq (1+\varepsilon)\vartheta(x) \ln x,$$

откуда и следует первая из оценок в формулировке следствия. Далее, если $\mu(x) < 1$ при $x > x^{**} \geq 1$, то при $\gamma > 1$ из (11) получим

$$\ln \frac{\mu(x)}{\mu(\gamma x)} = \int_x^{\gamma x} \frac{\vartheta(t)}{t}\, dt \geq \vartheta(x) \ln \gamma \geq \frac{\gamma - 1}{\gamma} \vartheta(x).$$

Из этих соотношений вытекает вторая из доказываемых оценок.

Следствие 3. *Функция $\mu(x)$ стремится к нулю при $x \to \infty$ быстрее любой степени x, т. е. для любого $p \geq 0$ справедливо предельное соотношение $\lim\limits_{x\to\infty} x^p \mu(x) = 0$.*

Доказательство. Из равенства (11), пользуясь монотонностью функции $\vartheta(x)$, получаем при $x > 1$ следующие соотношения:

$$\vartheta_*(x) = \ln\left(\frac{\mu(1)}{\mu(x)}\right) = \int_1^x \frac{\vartheta(t)}{t}\, dt > \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\vartheta(t)}{t}\, dt \geq \frac{1}{2} \vartheta(\sqrt{x}) \ln x.$$

Пользуясь ими, а также установленным ранее равенством $\lim\limits_{x\to\infty} \vartheta(x) = \infty$, имеем, далее, $\lim\limits_{x\to\infty} \vartheta_*(x)(\ln x)^{-1} = \infty$. Следовательно, для любого $p \geq 0$ справедливы равенства

$$\lim_{x\to\infty} x^p \mu(x) = \mu(1) \lim_{x\to\infty} x^p e^{-\vartheta_*(x)} = 0.$$

Прокомментируем полученные результаты. Метод аппроксимации бесконечно дифференцируемой 2π-периодической функции f соответствующим ей тригонометрическим многочленом R_m наилучшего (чебышевского) приближения обладает повышенной ассоциативностью с классом гладкости функции f. С ростом порядка m этот метод самосовершенствуется (следствие 1) и, преодолевая степенной барьер своей сходимости (следствие 2), достигает максимума практической эффективности — *экспоненциальной* сходимости на классе C^∞-гладких функций (следствие 3). При этом информация об экстраординарном запасе гладкости функций перестает быть бесполезной теоретической тонкостью, обретая в рамках рассматриваемого приближенного метода вполне конкретное и осязаемое на практике значение. Тем самым информация о бесконечной дифференцируемости и аналитичности, прежде находившаяся на периферии насущных интересов реальных вычислений, становится их активным персонажем.

Замечание 1. Для теоремы 1 справедливы следствия, аналогичные приведенным следствиям теоремы 3.

Замечание 2. В проведенных рассуждениях предполагалось, что

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{G(k)} = \infty.$$

Оказывается, что к этому случаю сводится и более общий, когда

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{G(k)} = \infty.$$

Действительно, определив новую мажоранту $\overline{G}(k)$ равенством

$$\ln \overline{G}(k) = k \max_{1\le t\le k} \frac{\ln G(t)}{t},$$

заметим, что $\ln \overline{G}(k)/k$ неубывающая, $G(k) \le \overline{G}(k)$ и

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln \overline{G}(k)}{k} = \infty.$$

Более того, из неравенства $G_0(k) \le \overline{G}(k)$ при $k > k_0$ всегда следует неравенство $\overline{G}_0(k) \le \overline{G}(k)$ при $k > k_1$, поскольку

$$\ln \overline{G}_0(k) = k \max_{1\le t\le k} \ln G_0(t)/t \le k \max_{1\le t\le k} \ln \overline{G}(t)/t = \ln \overline{G}(k).$$

Тривиальные случаи — финитность и отсутствие указанного предела — исключаются условиями $f \notin \mathscr{P}^n$ (теорема 1) и $f \notin \mathscr{T}^m$ (теорема 3).

Сделаем из полученных результатов некоторые общие выводы. Содержательность представленных теоремами 1 и 3 результатов обусловлена всего лишь особой формой оценки чебышевских наилучших приближений непрерывной функции, позволившей посредством теорем Джексона вместить в саму эту оценку информацию о «запасе» гладкости функций, взглянув на ее (оценки) наличие под особым — *ненасыщаемым* — углом зрения [1]. Это же обстоятельство послужило поводом к введению функций $\theta(n)$ и $\vartheta(n)$, априори вобравших в себя те максимальные порядки производных, на которых и реализуются минимумы функционалов $\lambda(n)$ и $\mu(n)$. В результате феномен ненасыщаемости рассмотренных приближенных методов объясняется отчасти намеренной «хитростью», допущенной нами в определении функций $\theta(n)$ и $\vartheta(n)$, отчасти следующих из нее свойств монотонности функционалов $\lambda(n)$ и $\mu(n)$. Как выяснилось при этом, потенциальные возможности развития рассмотренных приближенных методов на

C^∞-гладких функциях зависят исключительно от скорости роста функций $\theta(n)$ и $\vartheta(n)$ при увеличении параметра n. В результате, как и следовало ожидать исходя из асимптотик экспоненциального убывания к нулю александровских n-поперечников классов C^∞-гладких функций на отрезке [1], рассмотренные приближенные методы достигают пика своей практической эффективности — *экспоненциальной* сходимости или *сверхсходимости* [16] — на классах бесконечно дифференцируемых функций.

Проиллюстрируем вышеизложенное примером, в котором явно указывается зависимость параметров приближенных методов рассмотренного нами типа от параметров класса. Пусть

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{G(k)}}{k^\alpha} < \infty, \quad \text{где } \alpha > 0.$$

Это условие выполнено, например, для классов Жеврея на отрезке [11], в случае которых $G(k) = A^k k^{\alpha k}$, где $A > 1$ и $\alpha > 0$. При этом имеем

$$\mu(n) \asymp e^{-\varrho \sqrt[\alpha]{n}}, \quad \lambda(n) \asymp e^{-\varrho \sqrt[\alpha]{n}}, \quad \vartheta(n) = \theta(n) = [\varrho \sqrt[\alpha]{n}]. \tag{15}$$

Константа ϱ здесь эффективно вычисляется, $\varrho > 0$, а отношение $f(n) \asymp g(n)$ означает наличие констант c_1 и c_2, $0 < c_1 \leq c_2$, не зависящих от параметра n, таких, что $c_1 \leq f(n)/g(n) \leq c_2$.

Выведем оценки (15). Обозначим $y(k) = k^{\alpha k}/\sigma^k$, где $\sigma = x/A < x$. Функция $\ln y(\xi)$ выпукла вниз, так как $(\ln y)'' = \alpha/\xi > 0$. Выражение $\alpha\xi \ln \xi - \xi \ln \sigma$, где $\xi > 0$ — переменная и $\sigma = x/A$ фиксировано, достигает своего минимума при $\xi = e^{-1}\sigma^{1/\alpha} = \xi_0$. Если при этом ξ принимает целое значение n, то по определению функции $\mu(x)$ выражение $y(n)$ является минимальным:

$$y(n) = n^{\alpha n}\sigma^{-n} = e^{-\alpha\xi_0} = \exp(-\alpha e^{-1} \sqrt[\alpha]{\sigma}).$$

Если же $\xi = n + t$, где $0 \leq t \leq 1$, то

$$y(n) = n^{\alpha n}\sigma^{-n} = e^{-\alpha n}[(1 + t/n)^n]^{-\alpha} \asymp e^{-\alpha(n+t)} = \exp(-\alpha e^{-1} \sqrt[\alpha]{\sigma}).$$

Следовательно, в периодическом случае при достаточно больших x имеют место следующие асимптотические формулы для функций из теоремы 3:

$$\mu(x) \asymp \exp(-\alpha e^{-1} \sqrt[\alpha]{x/A}), \quad \vartheta(x) \asymp e^{-1} \sqrt[\alpha]{x/A}, \quad x_n \asymp Ae^\alpha n^\alpha.$$

Непериодический случай несущественно отличается от периодического. Ограничившись целыми ξ, заметим, что $\min\limits_{1\leq k\leq\infty} y(k)$ достигается при k, отличающемся от ξ_0 меньше, чем на единицу, т. е. во всяком случае при $k < x$. Но $\lambda(x) = \min\limits_{1\leq k\leq x} y(k)$ и есть наименьшее из значений функции $y(\xi)$ при целых $\xi < x$. Последний минимум, хотя и не равен в точности $y(\xi_0)$, но при достаточно больших x, как нетрудно подсчитать, определяется равенством

$$\lambda(x) = (A(\xi_0 + t)^\alpha/x)^{\xi_0+t} \asymp y(\xi_0) = e^{-\alpha\xi_0}, \quad \text{где } 0 \leq t \leq 1.$$

Итоговые асимптотики функций из теоремы 1 таковы:

$$\lambda(x) \asymp \exp(-\alpha e^{-1} \sqrt[\alpha]{x/A}), \quad \theta(x) \asymp e^{-1} \sqrt[\alpha]{x/A}, \quad x_n \asymp Ae^\alpha n^\alpha.$$

Оценим константы в (15). Поскольку минимум функции $\ln y(\xi)$ вычисляется лишь для целых ξ и всегда несколько выше величины $\ln y(\xi_0) = -\alpha\xi_0$, найденной в целой точке n, ближайшей к ξ_0 справа, имеем

$$\ln y(\xi_0) \leq \ln y(n) \leq \ln y(\xi_0) + 0.5\alpha/\xi_0.$$

Поэтому $y(\xi_0) \le \mu(x) \le \exp(0.5\alpha/\xi_0)y(\xi_0)$. Таким образом, можем принять в (15)

$$c_1 = 1, \quad c_2 = \exp\left(\alpha e \sqrt[\alpha]{A}/2\right), \quad \varrho = \alpha e^{-1}/\sqrt[\alpha]{A}.$$

Указав в конкретных формулах (15) туманную до этого границу практической значимости информации о C^∞-гладкости функции на отрезке, обратим внимание на то, что влияние этой границы на характер вычислительного процесса определяется скоростью роста показателей экспонент в оценках (15) — функций $\vartheta(x) = \theta(x) = \varrho \sqrt[\alpha]{x}$. Стало быть, необыкновенная (*экспоненциальная*) сходимость рассмотренных нами приближенных методов становится особенно заметной на практике при ее сравнении со сходимостью насыщаемых методов [1]. Обычно считается, что насыщаемый метод имеет благополучную сходимость, если порядок этой сходимости совпадает с порядком главного члена нормы соответствующего функционала погрешности. Более того, сходимость считается перевыполняющей требования, которые могут быть к ней предъявляемы на классах Жеврея, когда она определяется множителем n^{-k}, $k > 0$. Напротив, из (15) следует, что сходимость ненасыщаемых методов на тех же классах функций, аналитических при $\alpha = 1$ и жевреевских при $\alpha > 1$, определяется исключительно наличием множителя $e^{-\varrho \sqrt[\alpha]{n}}$, $\varrho = \text{const}$, $\alpha > 0$, убывание которого с ростом параметра n, конечно же, неизмеримо превосходит убывание любой степени n^{-k}, $k > 0$.

Замечание 3. Неверно утверждать, что, неограниченно увеличивая рост мажоранты $G(k)$, можно достичь сколь угодно быстрого экспоненциального убывания к нулю функционалов погрешности рассмотренных в статье ненасыщаемых численных методов. Действительно, согласно оценкам (15) скорость роста функций $\theta(x)$ и $\vartheta(x)$ с увеличением параметра $\alpha > 1$ монотонно убывает: ее максимальное значение достигается при $\alpha = 1$, т. е. на классе аналитических функций. Следовательно, пик эффективности, сверх которого дальнейшее совершенствование экспоненциальной сходимости рассмотренных в статье методов на классах Жеврея уже невозможно, достигается на классе аналитических функций, т. е. при выполнении условия $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{G(k)}/k < \infty$, являющегося характеристическим для аналитичности функции f на отрезке. Последнее условие приводит, таким образом, к результату, в некотором роде уже неулучшаемому (во всяком случае это так для периодических функций, аналитически продолжимых с отрезка [12]).

Итак, при условии, что функционал погрешности приближенного метода оценивается в терминах полиномиальных чебышевских характеристик гладкости непрерывных функций, полученные в статье результаты дают исчерпывающий ответ на следующий актуальный вопрос [2–7]: насколько справедливо то, что именно в величине «запаса» гладкости решений задач находится нечто наиболее существенное для целей их (решений) эффективного компьютерного отыскания? При этом обнаружились механизмы конструктивного построения на полуоси $n \ge 0$ определяющих методы параметров — этой своеобразной иерархической лестницы порядков сходимости, позволяющей автоматически и не выходя за пределы класса функций конечной гладкости непосредственно по результатам самих вычислений оценивать все нюансы присутствия в них информации о бесконечной дифференцируемости искомых решений. На фоне уже имеющихся в вычислительной математике представлений ненасыщаемые методы выделяются, стало быть, особой новизной и нестандартностью, привнося в процесс вычислений нечто неуловимое, но зато экстремально существенное, позволяющее быть увлекаемым любой потенциальной информацией о запасе гладкости решений и способствующее тем самым наиболее полному освоению интеллектуальных ресурсов исходной задачи [1]. Видимо, этим и стоит объяснять тайну сокрушающей практической эффективности ненасыщаемых численных методов при решении C^{∞}-гладких эллиптических задач (примеры этому указаны в [2–7]).

В заключение, не углубляясь в разрешение всей цепи загадок, связанных с тотальным распространением в вычислительной практике методов быстрого преобразования Фурье и гауссовских квадратур, и принимая эту данность лишь за фактор, способствовавший включению этих методов в состав «джентльменского» набора алгоритмов современного вычислителя-практика, обратим внимание на то, что указанные методы в силу теорем 1 и 3 всего лишь просто *ненасыщаемы*.

Автор считает приятным долгом отметить неизменную поддержку и внимание к своей работе со стороны С. К. Годунова и В. С. Рябенького и выражает им искреннюю признательность.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабенко К. И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. (2-е издание: М.; Ижевск: РХD, 2002).

2. *Белых В. Н.* Численные алгоритмы без насыщения в нестационарных задачах гидродинамики идеальной жидкости со свободными границами // Тр. Ин-та математики СО АН СССР. 1988. Т. 11. С. 3–67.

3. *Белых В. Н.* Алгоритмы без насыщения в задаче численного интегрирования // Докл. АН СССР. 1989. Т. 304, № 3. С. 529–533.

4. *Белых В. Н.* К проблеме численного решения задачи Дирихле гармоническим потенциалом простого слоя (алгоритмы без насыщения) // Докл. РАН. 1993. Т. 329, № 4. С. 392–395.

5. *Белых В. Н.* Ненасыщаемые квадратурные формулы на отрезке // Оптимизация численных методов: Тр. Междунар. науч. конф., посвященной 90-летию со дня рождения С. Л. Соболева (1908–1989). Ч. 1 / Под ред. проф. М. Д. Рамазанова. Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН, 2000. С. 12–40.

6. *Belykh V. N.* To the problem of evolutionary “blow-up” of axially symmetric gas bubble in ideal incompressible fluid (main constructive hypothesis) // Intern. Conf. dedicated to M. A. Lavrentyev on the occasion on his birthday centenary. Kiev, Ukraine, 2000. Abstract, p. 6–8.

7. *Белых В. Н.* Сверхсходящиеся ненасыщаемые алгоритмы численного решения уравнения Лапласа // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, № 2. С. 36–52.

8. *Белых В. Н.* Насколько можно доверять результатам компьютерных вычислений? // Кубатурные формулы и их приложения: Тр. VI Междунар. семинара-совещания / Под ред. проф. М. Д. Рамазанова. Уфа: ИМВЦ УНЦ РАН, 2002. С. 14–26.

9. *Белых В. Н.* О свойствах наилучших приближений бесконечно дифференцируемых функций на конечном отрезке // Докл. РАН. 2002. Т. 385, № 1. С. 7–10.

10. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.

11. *Соболев С. Л.* Сходимость кубатурных формул на различных классах периодических функций // Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики (Тр. семинара С. Л. Соболева). Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1976. № 1. С. 122–140.

12. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. М.: АН СССР, 1952. Т. 1.; М.: АН СССР, 1954. Т. 2.

13. *Бабенко К. И., Стебунов В. А.* О спектральной задаче Орра — Зоммерфельда. М., 1975. 34 с. (Препринт/АН СССР. Ин-т прикл. математики; № 93).

14. *Никольский С. М.* О наилучшем приближении многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1946. Т. 10, № 4. С. 295–318.

15. *Бурбаки Н.* Функции действительного переменного. М.: Наука, 1965.
16. *Belykh V. N.* Overconvergence of numerical algorithms without saturation (on an example of elliptic problems) // Adv. Math.: Comput. and Appl. Proc. of AMCA-95 (Eds. A. S. Alexeev, N. S. Bakhvalov). Novosibirsk, 1995. P. 458–462.

Статья поступила 17 апреля 2003 г.

Белых Владимир Никитич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
belykh@math.nsc.ru