Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2005. Том 46, № 2

УДК 519.542

О НЕКОММУТАТИВНЫХ ГРАФАХ, АССОЦИИРОВАННЫХ С КОНЕЧНОЙ ГРУППОЙ

А. Р. Могхаддамфар, У. Ши, В. Чжоу, А. Р. Зокаи

Аннотация: Пусть G — конечная группа. Определим некоммутирующий граф $\nabla(G)$ следующим образом: множество вершин составляет $G \setminus Z(G)$, и две вершины x, y соединены ребром (пишем $x \sim y$), если $[x, y] \neq 1$, где $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ — коммутатор x и y. Изучаются некоторые свойства такого графа. Также доказано, что для многих групп G если H — группа такая, что $\nabla(G) \cong \nabla(H)$, то $|G| = |H|$.

Ключевые слова: группа, некоммутирующий граф, регулярный граф.

1. Введение

Известно, что есть глубокая связь теории групп и теории графов, и во многих случаях свойства графов порождают какие-то свойства групп, и наоборот. Например, Грюнберг и Кегель в [1] ввели понятие *графа простых чисел* $\Gamma(G)$, ассоциированного с финитной группой G. Недавно в [2] было введено понятие разрешимого графа $\Gamma_S(G)$ для конечной группы G.

Среди графов, привлекающих внимание многих исследователей, можно отметить *коммутирующий граф*, ассоциированный с конечной группой. Для конечной группы G и подмножества X в G коммутирующий граф на X, обозначаемый через $\mathscr{C}(G, X)$, имеет X в качестве вершин, где $x, y \in X$ соединены ребром, если $[x, y] = 1$ (x и y коммутируют). Многие авторы изучали $\mathscr{C}(G, X)$ для различных G и X. В [3, 4] коммутирующий граф $\Delta(G) := \mathscr{C}(G, X)$ с неабелевой простой группой G и $X = G \setminus \{1\}$ применялся для доказательства гипотезы Маргулиса — Платонова об арифметических группах.

В данной работе рассматривается дополнительный граф к коммутирующему графу $\Delta(G) = \mathscr{C}(G, X)$, где $X := G \setminus Z(G)$, и для удобства этот граф обозначается через $\nabla(G)$. Будем называть этот граф *некоммутирующим графом для* G. В этом графе множество вершин $V(G) := G \setminus Z(G)$ и $x, y \in V(G)$ образуют ребро в том и только в том случае, если $[x, y] \neq 1$ (в обозначениях $x \sim y$). Отметим, что G абелева тогда и только тогда, когда $V(G) = \varnothing$. Таким образом, всюду далее G — неабелева конечная группа.

Сначала установим некоторые интересные свойства некоммутирующего графа $\nabla(G)$. Например, покажем, что $\nabla(G)$ всегда связен для каждой конечной группы G (см. предложение 1). Затем определим структуру групп G таких, что $\nabla(G)$ k-регулярен для некоторого k, т. е. вершины графа имеют одну и ту же

A. R. Moghaddamfar was supported by the Research Institute for Fundamental Sciences, Tabriz, Iran. W. J. Shi was supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant N 10171074).

степень k. Наконец, для некоторых конечных групп G и H проверим, что если $\nabla(G) \cong \nabla(H)$, то $|G| = |H|$. Например, мы рассмотрим диэдральные группы D_{2m} с нечетным m, знакопеременные группы A_n $(n \geq 4)$, все спорадические простые группы, простые группы типа Ли с несвязным графом простых чисел, симметричные группы S_n $(n \geq 3)$ и т. д. и покажем, что предыдущее утверждение для них справедливо. Нами пока не найден контрпример к предыдущему утверждению, поэтому естественно выдвинуть следующее

Предположение. *Пусть G и H — произвольные конечные группы такие, что $\nabla(G) \cong \nabla(H)$. Тогда $|G| = |H|$.*

Заметим, что существуют группы H и K такие, что $\nabla(H) \cong \nabla(K)$ и $H \ncong K$. В качестве примера можно взять $H = D_8$ и $K = Q_8$. Ясно, что $D_8 \ncong Q_8$, но $\nabla(D_8) \cong \nabla(Q_8)$.

2. Обозначения и определения

Для формулировки результатов введем некоторые обозначения. Для группы G обозначим через $\pi_e(G)$ множество все порядков элементов из G и через $\pi(G)$ — множество всех простых факторов в $|G|$. Ясно, что множество $\pi_e(G)$ замкнуто и частично упорядочено по делимости, поэтому оно однозначно определяется множеством $\mu(G)$ его максимальных элементов.

Определение 1. *Граф простых чисел* $\Gamma(G)$ группы G определяется следующим образом. Множество вершин $\Gamma(G)$ — это $\pi(G)$, и два различных простых числа p, q соединены ребром, если $pq \in \pi_e(G)$.

Число связных компонент в $\Gamma(G)$ обозначается через $t(G)$, множества вершин связных компонент — через $\pi_i = \pi_i(G)$, $i = 1, 2, \dots, t(G)$. Если $2 \in \pi(G)$, мы всегда предполагаем, что $2 \in \pi_1$. Обозначим через $\mu_i(G)$ множество всех $n \in \mu(G)$ таких, что $\pi(n) \subseteq \pi_i(G)$. Для простых групп S связные компоненты $\Gamma(S)$ найдены Уильямсом и А. С. Кондратьевым (см. [5, 1]). Более того, в [6] доказано, что если S — простая группа с несвязным графом простых чисел $\Gamma(S)$, то $|\mu_i(S)| = 1$ для $2 \leq i \leq t(S)$. Обозначим через $n_i = n_i(S)$ единственный элемент в $\mu_i(S)$. Значения для S, $\pi_1(S)$ и $n_i(S)$ при $2 \leq i \leq t(S)$ такие же, как в табл. 1a–c из [7].

Число ребер, инцидентных вершине v в графе, называют *степенью* v и обозначают через $\deg(v)$. Для некоммутирующего графа $\nabla(G)$ положим

$$\rho(G) := \sum_{g \in V(G)} \deg(g).$$

Определение 2. Два графа $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ и $\Gamma_2 = (V_2, E_2)$ называют *изоморфными* (и пишут $\Gamma_1 \cong \Gamma_2$), если существует взаимно-однозначное отображение «на»

$$\phi : V_1 \to V_2$$

такое, что

$$u \sim v \Leftrightarrow \phi(u) \sim \phi(v) \quad \text{для всех } u, v \in V_1.$$

Отображение ϕ называют *графовым изоморфизмом.* Отметим, что для изоморфных графов Γ_1 и Γ_2 имеем $|V_1| = |V_2|$, $|E_1| = |E_2|$ и $\deg(v) = \deg(\phi(v))$ для любой $v \in V_1$.

Все группы, рассматриваемые в данной статье, конечны. Предположим также, что $G \setminus Z(G) := \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$. Очевидно, $|Z(G)| \mid n$. Кроме того, если известно $\nabla(G)$, то мы знаем централизатор g_i в G. Пусть $t_i := |C_G(g_i) \setminus Z(G)|$. Легко видеть, что $|Z(G)| \mid t_i$. Предположим, что класс сопряженности длины g_i есть l_i, тогда мы также имеем

$$l_i := \frac{n + |Z(G)|}{t_i + |Z(G)|}. \tag{1}$$

С каждой группой G можно связать множество делителей порядка группы G, а именно *классовый размер* G, определяемый следующим образом:

$$\mathrm{cs}(G) := \{|g^G| : g \in G\}.$$

Очевидно, $1 \in \mathrm{cs}(G)$.

Для произвольной группы G ее число классов обозначим через $k(G)$. Другие используемые понятия стандартны.

3. Свойства $\nabla(G)$

В этом разделе установим некоторые результаты, относящиеся к некоммутирующим графам. Далее мы покажем, что некоммутирующий граф любой группы всегда связен.

Предложение 1. *Для любой группы G некоммутирующий граф $\nabla(G)$ связен.*

Доказательство. Допустим, что $\nabla(G)$ несвязен. Тогда существует пара вершин x и y в $V(G)$ таких, что $x \nsim y$. Легко видеть, что $C_G(x) \cup C_G(y) \subsetneq G$, поэтому существует $z \in G \setminus (C_G(x) \cup C_G(y))$. Согласно определению очевидно, что $z \sim x$ и $z \sim y$, а это означает, что $\nabla(G)$ связен; противоречие. □

Предложение 2. *Не существует группы G с нормальной подгруппой $N \neq 1$ такой, что $\nabla(G) \cong \nabla(G/N)$.*

Доказательство. Пусть порядки G, N, $Z(G)$ и $N \cap Z(G)$ равны соответственно l, n, m и t. Если $\nabla(G) \cong \nabla(G/N)$, то $|G - Z(G)| = |G/N - Z(G/N)|$. Ясно, что $Z(G/N) \geq Z(G)N/N$ и $|Z(G)N/N| = m/t$. Таким образом,

$$|G - Z(G)| = |G/N - Z(G/N)| \leq |G/N - Z(G)N/N)|,$$

т. е. $l - m \leq l/n - m/t$. Так как $n \geq 2$, имеем

$$l/m \leq \frac{1 - 1/t}{1 - 1/n} \leq \frac{1 - 1/t}{1 - 1/2} \leq 2.$$

Это означает, что $|G/Z(G)| \leq 2$, и тем самым G абелева; противоречие. □

Предложение 3. *Не существует группы G с $H < G$ такой, что $\nabla(G) \cong \nabla(H)$.*

Доказательство. Если есть группа G и ее собственная подгруппа H такие, что $\nabla(G) \cong \nabla(H)$, то $|G| - |Z(G)| = |H| - |Z(H)|$. Ясно, что $|H| \leq (1/2)|G|$ и $|Z(G)| < (1/2)|G|$. Тогда

$$|G| = |H| - |Z(H)| + |Z(G)| < |G|;$$

противоречие. □

Предложение 4. *Пусть G — группа. Если $\nabla(G)$ k-регулярен, то $|\operatorname{cs}(G)| = 2$ и $G = P \times A$, где P — неабелева p-группа, а A абелева.*

Доказательство. Для любого $g \in V(G)$ имеем $\deg(g) = |G| - |C_G(g)| = k$, следовательно, все $C_G(g)$ $(g \in V(G))$, и тем самым все классы сопряженности g^G $(g \in V(G))$ имеют один порядок. Поэтому, так как группа G неабелева, получаем, что $|\operatorname{cs}(G)| = 2$. Тогда согласно результату Ито (см. [8]) G — нильпотентная группа и $G = P \times A$, где P — p-группа и A — абелева группа. Кроме того, поскольку G — неабелева группа, P неабелева. $\square$

4. Некоторые полезные результаты

В этом разделе приведем некоторые полезные результаты, касающиеся $\nabla(G)$.

Предложение 5. *Для любой группы G имеет место равенство $\rho(G) = |G|(|G| - k(G))$. В частности, $|E(G)| = \frac{|G|(|G|-k(G))}{2}$.*

Доказательство. Простым вычислением получаем

$$\rho(G) = \sum_{x\in G} |G \backslash C_G(x)| = |G|^2 - \sum_{x\in G} |C_G(x)| = |G|^2 - |G| \sum_{x\in G} \frac{1}{|x^G|} = |G|^2 - |G|k(G).$$

Завершение доказательства очевидно. $\square$

Следствие 1. *Число классов группы нечетного порядка нечетно.*

Это следует непосредственно из предыдущего предложения ввиду того, что $\rho(G)$ всегда четно.

Граф $\Gamma = (V, E)$ называют *k-дольным*, $k > 1$, если V можно разбить на k подмножеств $V_1, V_2, \dots, V_k$ (называемых множествами разбиения) так, что каждое ребро E соединяет некоторую вершину из V_i с некоторой вершиной в V_j, $i \neq j$. Если $[G : Z(G)] = m$, то $\nabla(G)$ $(m-1)$-дольный, где $m \geq 4$. Действительно, если $T = \{x_0 = 1, x_1, x_2, \dots, x_{m-1}\}$ — трансверсаль $Z(G)$ в G, то $V_i = x_i Z(G)$, $i = 1, 2, \dots, m-1$.

Предложение 6. *Пусть G — группа с $[G : Z(G)] = m$. Пусть $T = \{x_0 = 1, x_1, \dots, x_{m-1}\}$ — трансверсаль $Z(G)$ в G и $\Lambda(x_i) = \{x_j \mid [x_i, x_j] \neq 1\}$. Тогда для любого $g \in x_i Z(G)$, $i \geq 1$, имеют место соотношения $\deg(g) = |\Lambda(x_i)||Z(G)|$, $|\Lambda(x_i)| \geq |x_i^G| - 1$ и $|\Lambda(x_i)| \geq 2$. В частности,*

$$\rho(G) = |Z(G)|^2 \sum_{i=1}^{m-1} |\Lambda(x_i)| \leq |Z(G)|^2 (m-1)(m-2).$$

Доказательство. Очевидно, для любых $u, v \in x_i Z(G)$ будет $[u, v] = 1$ и тем самым $u \nsim v$. Если $[x_i, x_j] = 1$, $j \geq 1$, то для любых $u \in x_i Z(G)$ и $v \in x_j Z(G)$ имеем $[u, v] = 1$, так что $u \nsim v$. С другой стороны, если $[x_i, x_j] \neq 1$, то для каждых $u \in x_i Z(G)$ и $v \in x_j Z(G)$ будет $[u, v] \neq 1$, откуда $u \sim v$. Поскольку $|x_j Z(G)| = |Z(G)|$ для любого j, легко видеть, что если $g \in x_i Z(G)$, $i \geq 1$, то $\deg(g) = |\Lambda(x_i)||Z(G)|$.

Для всех $i \geq 1$ имеем

$$\deg(x_i) = |G \setminus C_G(x_i)| = |\Lambda(x_i)||Z(G)|,$$

так что

$$|C_G(x_i)|\big(|x_i^G| - 1\big) = |\Lambda(x_i)||Z(G)|.$$

Поскольку $|Z(G)|$ делит $|C_G(x_i)|$, имеем

$$\frac{|\Lambda(x_i)|}{\left|x_i^G\right|-1} = \frac{|C_G(x_i)|}{|Z(G)|} \in \mathbb{N}.$$

Итак, $\left|x_i^G\right|-1$ делит $|\Lambda(x_i)|$, следовательно, $|\Lambda(x_i)| \geq |x_i^G|-1$. Кроме того, если существует $i \geq 1$ такое, что $|\Lambda(x_i)| = 1$, то $|C_G(x_i)| = |Z(G)|$; противоречие. Завершение доказательства очевидно. $\square$

Предложение 7. *Пусть G — группа. Тогда*

(a) $\nabla(G)$ *не имеет вершины степени* 2*;*

(b) *если $\nabla(G)$ имеет вершину степени p, где p — простое нечетное число, то $G \cong D_{2p}$.*

Доказательство. Допустим, что есть $g \in V(G)$ с $\deg(g) = p$, где p простое. Тогда

$$p = \deg(g) = |C_G(g)|([G : C_G(g)] - 1),$$

откуда $|C_G(g)| = p$, $[G : C_G(g)] = 2$ и $|G| = 2p$. Так как G неабелева, p должно быть нечетным простым и $G \cong D_{2p}$. Тем самым доказательство (a) и (b) завершено. $\square$

Непосредственно из этого результата вытекает

Следствие 2. *Если G и H — группы такие, что $\nabla(G) \cong \nabla(H)$ и $\nabla(G)$ имеет вершину простой степени p, то $G \cong H$.*

Предложение 8. *Пусть G — группа такая, что существует вершина $g \in V(G)$ степени p^2. Тогда имеет место одно из следующих утверждений:*

(a) *G — группа Фробениуса порядка $p(p+1)$, дополнение которой — циклическая группа порядка p;*

(b) *G — группа порядка $2p^2$, где p простое.*

Доказательство. Так как $\deg(g) = p^2$, имеем

$$p^2 = |C_G(g)|([G : C_G(g)] - 1)$$

и рассмотрим следующие два случая.

Случай 1. $|C_G(g)| = p$.

В этом случае $C_G(g) = \langle g\rangle$ и $|G| = p(p+1)$. Поскольку класс сопряженности g^G имеет $p+1$ элементов порядка p, существует элемент x порядка p с $x \notin \langle g\rangle$. Отсюда $\langle g\rangle$ не может быть нормальной силовской p-подгруппой в G и тем самым число силовских p-подгрупп в G равно $p+1$. Далее, $N_G(\langle g\rangle) = C_G(\langle g\rangle) = \langle g\rangle$, следовательно, G p-нильпотентна. Итак,

$$G = M\langle g\rangle, \quad M \lhd G, \quad M \cap \langle g\rangle = 1.$$

Очевидно, g действует без неподвижных точек на M, так что M нильпотентна и G — группа Фробениуса с M в качестве ядра и $\langle g\rangle$ в качестве дополнения.

Случай 2. $|C_G(g)| = p^2$.

В этом случае G — группа порядка $2p^2$. Покажем, что для любой группы порядка $2p^2$ граф $\nabla(G)$ имеет вершину степени p^2. Сначала допустим, что $p = 2$. В этом случае $G \cong D_8$ или Q_8 и в $\nabla(G)$ каждая вершина имеет степень 4. Тем самым можно считать, что p простое нечетное. Пусть t — инволюция в G и P — силовская p-подгруппа в G, которая, очевидно, нормальна в G. Теперь $Z(G) = C_P(t)$ порядка 1 или p, так что существует элемент $x \in P \setminus Z(G)$ и, очевидно, $\deg(x) = p^2$. $\square$

Следствие 3. *Пусть G и H — группы такие, что $\nabla(G) \cong \nabla(H)$. Если $\nabla(G)$ имеет вершину степени p^2, то $|G| = |H|$.*

Доказательство. По предложению 8 $|G|$ равно $p(p+1)$ или $2p^2$. Из графового изоморфизма $\nabla(G) \cong \nabla(H)$ получаем, что $\nabla(H)$ имеет вершину степени p^2, и снова по предложению 8 $|H|$ равно $p(p+1)$ или $2p^2$. Допустим теперь, что $|G| \neq |H|$. Не уменьшая общности, можно считать, что $|G| = p(p+1)$ и $|H| = 2p^2$. В таком случае G — группа Фредгольма и $Z(G) = 1$. Из равенства $|V(G)| = |V(H)|$ следует, что $|G| - 1 = |H| - |Z(H)|$, т. е. $|Z(H)| = p^2 - p + 1$; противоречие. □

Следствие 4. *Если $\nabla(G)$ p^2-регулярен, то $p = 2$ и $G \cong D_8$ или Q_8.*

Доказательство. Заметим вначале, что если G — группа Фробениуса, то $\nabla(G)$ не может быть k-регулярным для любого k. Если теперь $\nabla(G)$ p^2-регулярен, то по предложению 8 G — неабелева группа порядка $2p^2$, не являющаяся фробениусовой. В этом случае пусть t — инволюция в G. Тогда $|C_G(t)| = 2p$ и тем самым $p^2 = \deg(t) = 2p^2 - 2p$, откуда следует, что $p = 2$ и $G \cong D_8$ или Q_8. □

Предложение 9. *Пусть g — вершина графа $\nabla(G)$ такая, что $\deg(g) = |G| - 2$. Тогда g — инволюция и G изоморфна фредгольмовой группе порядка $2m$, где m нечетно.*

Доказательство. Поскольку $|G| - 2 = \deg(g) = |G| - |C_G(g)|$, имеем $|C_G(g)| = 2$, и тем самым g — инволюция. Далее, $C_G(g)$ — силовская 2-подгруппа в G. Отсюда $|G| = 2m$, где m — нечетное целое. Группа G 2-нильпотентна и существует нормальная подгруппа порядка m, на которой инволюция g действует без неподвижных точек. Поэтому G — группа Фробениуса с абелевым ядром порядка m и циклическим дополнением порядка 2. □

Предложение 10. *Пусть G и H — группы такие, что $\nabla(G) \cong \nabla(H)$. Предположим, что $y = \frac{|Z(G)|}{|Z(H)|} \in \mathbb{N}$. Если $\{2,3\} \cap \mathrm{cs}(G) \neq \varnothing$, то $|H| = |G|$.*

Доказательство. Пусть $x = t/|Z(G)|$, где $t = |C_G(g) \setminus Z(G)|$ для некоторого $g \in G$. Пусть l — класс сопряженности длины g. Тогда согласно уравнению (1)

$$n + |Z(H)| = (l - 1 + lx)y|Z(H)| + |Z(H)|$$

и

$$t + |Z(H)| = (xy + 1)|Z(H)|.$$

Снова по уравнению (1), так как $(n + |Z(H)|)/(t + |Z(H)|) \in \mathbb{N}$, имеем

$$\frac{lxy + (l-1)y + 1}{xy + 1} \in \mathbb{N}.$$

Отсюда простыми преобразованиями получаем

$$\frac{(l-1)(y-1)}{xy + 1} \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Рассмотрим следующие два случая.

Случай 1. $l = 2 \in \mathrm{cs}(G)$. В этом случае легко видеть, что $y = 1$, и тем самым $|Z(H)| = |Z(G)|$, откуда $|H| = |G|$.

Случай 2. $l = 3 \in \mathrm{cs}(G)$. Допустим, что $y > 1$. Так как $xy + 1 \geq y + 1 > y - 1$, получаем

$$0 \leq \frac{(3-1)(y-1)}{xy+1} < \frac{2(y-1)}{y-1} = 2;$$

противоречие. Поэтому $y = 1$. Отсюда $|Z(H)| = |Z(G)|$ и $|G| = |H|$. $\square$

5. О группах без центра

Всюду в этом разделе мы считаем, что $G \neq 1$ — группа без центра, т. е. $Z(G) = 1$. Здесь мы проверим выполнение предположения для некоторых групп без центра для усиления предположения.

Лемма 1. *Пусть $|G| = p + 1$ для некоторого простого p. Если H — группа с $\nabla(H) \cong \nabla(G)$, то $|H| = |G|$.*

Доказательство. Из того, что $\nabla(H) \cong \nabla(G)$, следует равенство $|V(H)| = |V(G)|$. Поэтому $|H| - |Z(H)| = |G| - 1 = p$ и тем самым

$$|Z(H)| \left(\left| \frac{H}{Z(H)} \right| - 1 \right) = p.$$

Мы утверждаем, что $|Z(H)| = 1$. Действительно, если это не так, то $|H/Z(H)| = 2$, откуда H абелева, т. е. $H = Z(H)$. Но тогда $|G| = 1$; противоречие. Теперь очевидно, что $|H| = |G|$. $\square$

Предложение 11. *Пусть G и H — группы такие, что $\nabla(G) \cong \nabla(H)$. Пусть g — вершина в $V(G)$ такая, что $\deg(g) = |G| - 2$. Тогда $|H| = |G|$.*

Доказательство. Из соотношения $\nabla(H) \cong \nabla(G)$ следует, что $|H| - |Z(H)| = |G| - 1$, поэтому существует $h \in V(H)$ такая, что $\deg(h) = |H| - |Z(H)| - 1$. Мы утверждаем, что $Z(H) = 1$. В самом деле, если это не так, то $1 \neq z \in Z(H)$. Очевидно, $hz \in V(H)$ и $[h, hz] = 1$. Отсюда $h \nsim hz$, так что $\deg(h) \leq |H \backslash Z(H)| - 2$; противоречие. Поэтому $Z(H) = 1$ и $|H| = |G|$, что и требовалось. $\square$

Пример 1. Возьмем диэдральную группу

$$G = D_{2m} = \langle x, y : x^m = y^2 = 1, \ yxy = x^{-1} \rangle$$

порядка $2m$. Если m нечетно, то $Z(G) = 1$. С другой стороны, $[y, x^i y^j] \neq 1$, где $1 \leq i$ и $j = 0$ или $j = 1$, и тем самым $\deg(y) = 2m - 2$. Если теперь H — группа такая, что $\nabla(H) \cong \nabla(G)$, по предложению 11 получаем, что $|H| = |G|$.

Лемма 2. *Пусть G и H — группы такие, что $\nabla(H) \cong \nabla(G)$. Справедливы следующие утверждения.*

(a) *$|Z(H)|$ делит $|C_G(g_i)| - 1$, и $\left|g_i^G\right| - 1$ для любого $g_i \in G^{\#}$. В частности, если выполнено одно из условий*

$$g.c.d.\ \{|C_G(g_1)| - 1, |C_G(g_2)| - 1, \dots, |C_G(g_n)| - 1\} = 1$$

или

$$g.c.d. \left\{ \left|g_1^G\right| - 1, \left|g_2^G\right| - 1, \dots, \left|g_n^G\right| - 1 \right\} = 1,$$

то $|H| = |G|$.

(b) *$|Z(H)|$ делит $k(G) - 1$.*

Доказательство. (a) Пусть $\phi : V(G) \to V(H)$ — изоморфизм графов. Во-первых, $|H| - |Z(H)| = |G| - 1$, откуда $|Z(H)| \mid |G| - 1$ и $(|Z(H)|, |G|) = 1$.

Более того, для любого $g_i \in V(G) = G^{\#}$ имеем $|Z(H)| \mid \deg(\phi(g_i)) = \deg(g_i)$, а поскольку

$$\deg(g_i) = |G| - |C_G(g_i)| = (|G| - 1) - (|C_G(g_i)| - 1),$$

получаем $|Z(H)| \mid |C_G(g_i)| - 1$.

Имеем также

$$\deg(g_i) = |G \setminus C_G(g_i)| = |C_G(g_i)|\big(\big|g_i^G\big| - 1\big)$$

для любого $g_i \in V(G)$. Теперь из равенства $(|Z(H)|, |C_G(g_i)|) = 1$ вытекает, что $|Z(H)|$ делит $\big|g_i^G\big| - 1$ для каждого $g_i \in V(G)$. Завершение доказательства очевидно.

(b) Поскольку

$$|H| - |Z(H)| = |G| - 1 = \sum_{i=1}^{k(G)} \big(\big|g_i^G\big| - 1\big) + (k(G) - 1),$$

согласно (a) выводим, что $|Z(H)|$ делит $k(G) - 1$. □

Замечание 1. В качестве следствия леммы 2 легко показать, что если $\nabla(H) \cong \nabla(G)$ и $2 \in \mathrm{cs}(G)$, то $|G| = |H|$. Например, если $G = D_{2m}$, где m нечетно, то $2 \in \mathrm{cs}(G)$ и из $\nabla(H) \cong \nabla(G)$ вытекает, что $|G| = |H|$ (что ранее было исследовано в примере 1).

С помощью леммы 2(a) можно проверить выполнение предположения для знакопеременных групп A_n $(n \geq 4)$, всех простых спорадических групп, простых групп типа Ли с несвязным графом простых чисел и симметричных групп S_n $(n \geq 3)$. Рассмотрим указанные случаи по отдельности.

Теорема 1. *Пусть $S = A_n$ $(n \geq 4)$. Если H — группа такая, что $\nabla(H) \cong \nabla(S)$, то $|H| = |S|$.*

Доказательство. Согласно лемме 1 утверждение выполнено для знакопеременных групп A_4, A_5, A_6. Если $S = A_7$, то существует элемент порядка 7, допустим x, такой, что $|C_S(x)| = 7$. Отсюда $|Z(H)|$ делит 6, а так как $(|Z(H)|, |S|) = 1$, получаем, что $|Z(H)| = 1$, т. е. $|H| = |S|$. Теперь можно считать, что $n \geq 8$. Рассмотрим перестановки $x = (12)(3456)$ и $y = (123)(456)$. Очевидно, длина классов сопряженности элементов x и y одна и та же в S_n и A_n. Следовательно,

$$|x^S| = \frac{a}{8}, \quad |y^S| = \frac{a}{18},$$

где $a = \frac{n!}{(n-6)!}$. Легко видеть, что $(|x^S| - 1, |y^S| - 1) = 1$, и по лемме 2(a) получаем $|H| = |S|$. □

Теорема 2. *Пусть S — простая спорадическая группа. Если H — группа такая, что $\nabla(H) \cong \nabla(S)$, то $|H| = |S|$.*

Доказательство. Легко проверить существование пары элементов $x, y \in S \setminus \{1\}$ таких, что $(|C_S(x)| - 1, |C_S(y)| - 1) = 1$ (см. [9]), откуда по лемме 2(a) заключаем, что $|H| = |S|$. □

Теорема 3. *Пусть S — простая группа типа Ли с $t(S) \geq 2$. Если H — группа такая, что $\nabla(H) \cong \nabla(S)$, то $|H| = |S|$.*

Доказательство. В каждой конечной простой группе типа Ли S с $t(S) \geq 2$ (кроме $S = A_1(q)$, q нечетно) есть максимальные циклы типа T, циклической холловой подгруппой в S, и, очевидно, $C_S(T) = T$ (см. [6]). Так как $n_i = |T|$ для некоторого $i \geq 2$, выводим, что $|C_S(g)| = n_i$ для каждого $g \in T^{\#}$. Тогда по лемме 2(a) если H — группа такая, что $\nabla(H) \cong \nabla(S)$, то $|Z(H)| \mid n_i - 1$ для каждого $i \geq 2$. Напомним, что $|Z(H)|$ должно также быть делителем $|S| - 1$. Наши рассуждения вместе с результатами, объединенными в табл. 1a–c в [7], показывают, что для каждого несвязного графа простых чисел типа Ли S, кроме $A_1(q)$, q нечетно, выполнены также следующие свойства:

$$\text{g.c.d. } \{n_2 - 1, \dots, n_{t(S)} - 1, |S| - 1\} = 1. \tag{2}$$

Исследуем свойство (2), например, для некоторых простых групп.

(1) $S = B_n(q)$, $n = 2^m \geq 4$, q нечетно.

В этом случае имеем $n_2 = \frac{q^n+1}{2}$ и

$$|S| = \frac{1}{(2, q-1)} q^{n^2} \sum_{i=1}^{n} (q^{2i} - 1).$$

Очевидно, $n_2 - 1 = \frac{q^n-1}{2}$ делит $|S|$, поэтому $(n_2 - 1, |S| - 1) = 1$.

(2) $S = {}^3D_4(q)$.

В этом случае $n_2 = q^4 - q^2 + 1$ и

$$|S| = q^{12}(q^2 - 1)(q^8 + q^4 + 1)(q^6 - 1).$$

Вновь, так как $n_2 - 1 = q^2(q^2 - 1)$ делит $|S|$, получаем $(n_2 - 1, |S| - 1) = 1$.

(3) $S = G_2(q)$, $q \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 3)$.

Для этой группы имеем $n_2 = q^2 - q + 1$, $n_3 = q^2 + q + 1$ и

$$|S| = q^6(q^2 - 1)(q^6 - 1).$$

Теперь путем простых вычислений можно увидеть, что

$$\text{g.c.d. } \{n_2 - 1, n_3 - 1, |S| - 1\} = 1.$$

(4) $S = {}^2B_2(q)$, $q = 2^{2f+1}$.

Здесь имеем $n_2 = q - 1$, $n_3 = q - \sqrt{2q} + 1$, $n_4 = q + \sqrt{2q} + 1$ и

$$|S| = q^2(q - 1)(q^2 + 1).$$

Простые вычисления показывают, что

$$\text{g.c.d. } \{n_2 - 1, n_3 - 1, n_4 - 1, |S| - 1\} = 1.$$

(5) $S = E_8(q)$.

В этом случае $t(S) \geq 4$ и мы имеем $n_4 = q^8 - q^4 + 1$ и

$$|S| = q^{120}(q^2 - 1)(q^8 - 1)(q^{12} - 1)(q^{14} - 1)(q^{18} - 1)(q^{20} - 1)(q^{24} - 1)(q^{30} - 1).$$

Поскольку $n_4 - 1 = q^4(q^4 - 1)$ делит $|S|$, ясно, что $(n_4 - 1, |S| - 1) = 1$, поэтому выполнено свойство (2).

Если $S = A_1(q)$, $3 < q \equiv \varepsilon \,\mathrm{mod}\, 4$, $\varepsilon = \pm 1$, то S содержит элемент порядка $(q - \varepsilon)/2$, а так как $\pi_1(S) = \pi(q - \varepsilon)$, заключаем, что S содержит централизующуюся циклическую подгруппу C_1 порядка $(q - \varepsilon)/2$. С другой стороны, S содержит централизующуюся циклическую подгруппу C_2 порядка $n_3 = \frac{q+\varepsilon}{2}$. Поскольку $|Z(H)|$ делит $(|C_1| - 1, |C_2| - 1) = 1$, получаем $|Z(H)| = 1$ или $|H| = |S|$, что и требовалось. $\square$

Теорема 4. *Пусть* $G = S_n$ $(n \geq 3)$. *Если* H — *группа такая, что* $\nabla(H) \cong \nabla(G)$, *то* $|H| = |G|$.

Доказательство. Согласно лемме 2(a) достаточно найти пару элементов в G, скажем x и y, таких, что $(|x^G| - 1, |y^G| - 1) = 1$. Вначале предположим, что $n \geq 4$. Возьмем $x = (12)(34)$ и $y = (1234)$. Очевидно, $2|x^G| = |y^G| = a/4$, где $a = \frac{n!}{(n-4)!}$. Легко видеть, что $(|x^G| - 1, |y^G| - 1) = 1$, и мы приходим к требуемому. Предположим теперь, что $n = 3$. В таком случае рассматриваются $x = (12)$ и $y = (123)$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69. P. 487–513.
2. *Abe S., Iiyori N.* A generalization of prime graphs of finite groups // Hokkaido Math. J. 2000. V. 29, N 2. P. 391–407.
3. *Segev Y.* On finite homomorphic images of the multiplicative group of a division algebra // Ann. of Math. 1999. V. 149. P. 219–251.
4. *Segev Y., Seitz G.* Anisotropic groups of type A_n and the commuting graph of finite simple groups // Pacific J. Math. 2002. V. 202. P. 125–225.
5. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
6. *Кондратьев А. С., Мазуров В. Д.* Распознавание знакопеременных групп простой степени по порядкам их элементов // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 2. С. 294–302.
7. *Мазуров В. Д.* Распознавание конечных простых групп $S_4(q)$ по порядкам их элементов // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 2. С. 166–198.
8. *Ito N.* On finite groups with given conjugate types. I // Nagoya Math. J. 1953. V. 6. P. 17–28.
9. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.

Статья поступила 6 июля 2004 г.

Ali Reza Moghaddamfar, Ali Reza Zokayi
Department of Mathematics,
K. N. Toosi University of Technology,
P.O. Box 16315-1618, Tehran, Iran
moghadam@iust.ac.ir, zokayi@kntu.ac.ir

Wujie Shi
Department of Mathematics,
Southwest Normal University,
Chongqing 400715, People's Republic of China
and
School of Mathematics,
Soochow University,
Suzhou 215006, People's Republic of China
wjshi@suda.edu.cn

Wei Zhou
School of Mathematics, Soochow University,
Suzhou 215006, People's Republic of China
and
Department of Mathematics, Southwest Normal University,
Chongqing 400715, People's Republic of China
zh_great@hotmail.com