Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2005. Том 46, № 2

УДК 517+519.2

ОБ ОДНОЙ ХАРАКТЕРИЗАЦИОННОЙ ТЕОРЕМЕ НА КОНЕЧНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУППАХ

М. В. Миронюк, Г. М. Фельдман

Аннотация: Согласно классической теореме Скитовича — Дармуа независимость двух линейных форм от независимых случайных величин характеризует гауссовское распределение. Близкий к теореме Скитовича — Дармуа результат был доказан Хейде, где условие независимости линейных форм заменяется симметрией условного распределения одной линейной формы при фиксированной второй. Настоящая статья посвящена аналогу теоремы Хейде для случая, когда случайные величины принимают значения в конечной абелевой группе, а коэффициенты линейных форм — автоморфизмы группы.

Ключевые слова: характеризация вероятностных распределений, идемпотентные распределения, конечные абелевы группы.

1. Введение

Согласно классической теореме Скитовича — Дармуа независимость двух линейных форм от независимых случайных величин характеризует гауссовское распределение (см., например, [1, гл. 3]). Близкий к теореме Скитовича — Дармуа результат был доказан Хейде, где условие независимости линейных форм заменяется симметрией условного распределения одной линейной формы при фиксированной второй [2], см. также [1, § 13.4.1].

Теорема Хейде. *Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, — независимые случайные величины. Рассмотрим линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$, где коэффициенты α_j, β_j — отличные от нуля константы такие, что $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \neq 0$ для любых $i \neq j$. Если условное распределение L_2 при фиксированной L_1 симметрично, то все случайные величины ξ_j гауссовские.*

Групповым аналогам теоремы Скитовича — Дармуа и предшествующей ей теореме Бернштейна посвящено большое число исследований [3–11]. В настоящей статье рассмотрен аналог теоремы Хейде для случая, когда случайные величины принимают значения в конечной абелевой группе, а коэффициенты линейных форм — автоморфизмы группы.

Пусть X — локально компактная сепарабельная абелева метрическая группа, $\mathrm{Aut}(X)$ — группа топологических автоморфизмов X. Рассмотрим ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, — независимые случайные величины со значениями в X и с распределениями μ_j. Пусть $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$, где α_j, $\beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$ такие, что $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ для любых $i \neq j$. Сформулируем следующие две задачи.

Задача 1. *Для каких групп X из симметрии условного распределения L_2 при фиксированной L_1 вытекает, что все μ_j либо гауссовские, либо принадлежат классу распределений, который можно рассматривать как естественный аналог класса гауссовских распределений?*

Задача 2. *Пусть группа X задана. Описать возможные распределения μ_j в предположении, что условное распределение L_2 при фиксированной L_1 симметрично.*

В [12] задача 1 решена в классе конечных абелевых групп (см. ниже теорему A). В настоящей статье мы решаем задачу 2 в классе конечных абелевых групп и изучаем также близкие вопросы.

Условимся о некоторых обозначениях. Для произвольной локально компактной абелевой группы X обозначим через $Y = X^*$ ее группу характеров, через (x, y) — значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$. Для любого $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ определим сопряженный автоморфизм $\tilde{\alpha} \in \mathrm{Aut}(Y)$ формулой $(x, \tilde{\alpha}y) = (\alpha x, y)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$. Тождественный автоморфизм произвольной группы будем обозначать через I. Подгруппу G группы X назовем *характеристической*, если всякий автоморфизм $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ переводит группу G в себя. Если H — замкнутая подгруппа группы Y, то обозначим через $A(X, H) = \{x \in X : (x, y) = 1 \text{ для всех } y \in H\}$ ее аннулятор. Для произвольного натурального числа n обозначим через $f_n : X \to X$ гомоморфизм, определяемый формулой $f_n(x) = nx$. Положим $X^{(n)} = \mathrm{Im}\, f_n$, $X_{(n)} = \mathrm{Ker}\, f_n$. Пусть $\mathbb{Z}(m)$ — группа вычетов по модулю m. Элементы группы $\mathbb{Z}(m)$ будем обозначать через $\{0, 1, \dots, m-1\}$. Если X — конечная абелева группа, то для любого простого p обозначим через X_p ее p-примарную компоненту, т. е. подгруппу в X, состоящую из всех элементов, порядки которых являются степенями числа p.

Для распределения μ его характеристическую функцию обозначим через $\hat{\mu}(y) = \int_X (x, y)\, d\mu(x)$. Носитель распределения μ обозначим через $\sigma(\mu)$. Отметим, что если H — замкнутая подгруппа в Y и $\hat{\mu}(y) = 1$ при $y \in H$, то $\hat{\mu}(y + h) = \hat{\mu}(y)$ при любых $y \in Y$, $h \in H$ и $\sigma(\mu) \subset A(X, H)$. Обозначим через $\Gamma(X)$ множество гауссовских распределений на группе X, а через $I(X)$ — множество идемпотентных распределений на группе X, т. е. множество сдвигов распределений Хаара m_K компактных подгрупп K группы X. Заметим, что характеристическая функция распределения Хаара m_K имеет вид

$$\widehat{m}_K(y) = \begin{cases} 1, & y \in A(Y, K), \\ 0, & y \notin A(Y, K). \end{cases}$$

Вырожденное распределение, сосредоточенное в точке $x \in X$, обозначим через E_x.

Пусть ξ_j, $j = 1, 2, \dots, n$, $n \geq 2$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Учитывая, что характеристическая функция распределения μ_j — это математическое ожидание $\mathbf{E}[(\xi_j, y)]$, так же, как и в классическом случае (см., например, [1, § 13.4.1]), убеждаемся в том, что симметрия условного распределения $L_2 = \beta_1\xi_1 + \dots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \dots + \alpha_n\xi_n$ эквивалентна тому, что характеристические функции $\hat{\mu}_j(y)$ распределений μ_j удовлетворяют функциональному уравнению

$$\prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j(\tilde{\alpha}_j u + \tilde{\beta}_j v) = \prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_j(\tilde{\alpha}_j u - \tilde{\beta}_j v), \quad u, v \in Y. \tag{1}$$

Решения этого уравнения мы и будем изучать.

Основная часть работы посвящена случаю, когда число независимых случайных величин равно двум. При групповой постановке задачи мы должны предполагать что существуют автоморфизмы $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ такие, что $\beta_1\alpha_1^{-1} \pm \beta_2\alpha_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$. Это условие можно заменить равносильным: существует автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ такой, что $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Описание конечных абелевых групп, для которых это условие выполнено, дает следующее

Предложение A [12]. *Пусть X — конечная абелева группа. Пусть $X = \sum\limits_{p \in \mathscr{P}} X_p$, где $\mathscr{P}$ — множество простых чисел, — разложение X в прямую сумму своих p-примарных компонент. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(α) *при $p = 2$ и $p = 3$ либо $X_p = \{0\}$, либо разложение X_p в прямую сумму своих циклических слагаемых содержит каждое циклическое слагаемое с кратностью не меньше чем два;*

(β) *существует $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ такой, что $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$.*

В дальнейшем мы будем предполагать, что конечная абелева группа X всегда удовлетворяет условию (α) предложения A.

2. Теорема Хейде для конечных абелевых групп

В работе [12] доказана

Теорема A. *Пусть X — конечная абелева группа, не содержащая элементов порядка 2. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1, μ_2. Предположим, что δ, $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Если условное распределение $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично, то $\mu_j = E_{g_j} * m_F$, где F — подгруппа группы X, $g_j \in X$, $j = 1, 2$.*

Следующая теорема решает задачу 2 в случае, когда X — произвольная конечная абелева группа.

Теорема 1. *Пусть X — конечная абелева группа. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1, μ_2. Предположим, что $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathrm{Aut}(X)$ и $\beta_1\alpha_1^{-1} \pm \beta_2\alpha_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$. Если условное распределение $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ симметрично, то $\mu_j = \rho_j * \pi_j$, где $\sigma(\rho_j) \subset X_2$, $\pi_j \in I(X)$, $j = 1, 2$.*

Очевидно, что теорема A является частным случаем теоремы 1. Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся две леммы.

Лемма 1 [12]. *Пусть X — конечная абелева группа и $\varepsilon, I \pm \varepsilon \in \mathrm{Aut}(Y)$. Если характеристические функции $f(y)$, $g(y)$ удовлетворяют функциональному уравнению*

$$f(u+v)g(u+\varepsilon v) = f(u-v)g(u-\varepsilon v), \quad u, v \in Y,$$

то для любого $y \in Y$ выполнено $|f(y)| = |f(cy)|$, $|g(y)| = |g(cy)|$, где $c = (I - \varepsilon)(I + \varepsilon)^{-1}$.

Лемма 2. *Пусть X — компактная абелева группа такая, что $f_2 \in \mathrm{Aut}(X)$, F — компактная подгруппа в X такая, что фактор-группа X/F конечна. Пусть ε, $I \pm \varepsilon \in \mathrm{Aut}(Y)$. Если характеристическая функция $\widehat{m}_F(y)$ удовлетворяет функциональному уравнению*

$$\widehat{m}_F(u+v)\widehat{m}_F(u+\varepsilon v) = \widehat{m}_F(u-v)\widehat{m}_F(u-\varepsilon v), \quad u, v \in Y, \tag{2}$$

то $\varepsilon(B)=B$, где $B=A(Y,F)$.

Доказательство. Подставим в уравнение (2) $u=(I-\varepsilon)^{-1}t$, $v=-(I-\varepsilon)^{-1}t$, где $t\in Y$. Получим

$$\widehat{m}_F(t)=\widehat{m}_F(2(I-\varepsilon)^{-1}t)\widehat{m}_F(ct), \quad t\in Y, \tag{3}$$

где $c=(I+\varepsilon)(I-\varepsilon)^{-1}$. Пусть $t\in B$. Тогда $\widehat{m}_F(t)=1$ и из (3) следует, что $\widehat{m}_F(ct)=1$, а значит, $ct\in B$. Мы получили, что

$$c(B)\subset B. \tag{4}$$

Фактор-группа X/F конечна, так что и группа $B\approx(X/F)^*$ конечна. Поскольку $c\in \mathrm{Aut}(Y)$, из (4) и конечности группы B следует, что

$$c(B)=B. \tag{5}$$

Так как $f_2\in\mathrm{Aut}(Y)$, то $c-I=-f_2(I-\varepsilon)^{-1}\in\mathrm{Aut}(Y)$ и $c+I=f_2(I+\varepsilon)^{-1}\in\mathrm{Aut}(Y)$. Легко видеть, что

$$\varepsilon=(c-I)(c+I)^{-1}. \tag{6}$$

Утверждение леммы вытекает теперь из (5) и (6).

Доказательство теоремы 1. Полагая $\xi_j'=\alpha_j\xi_j$, легко видеть, что, не ограничивая общности, мы можем считать, что линейные формы имеют вид $L_1=\xi_1+\xi_2$ и $L_2=\delta_1\xi_1+\delta_2\xi_2$, где $\delta_1,\delta_2,\delta_1\pm\delta_2\in\mathrm{Aut}(X)$. Очевидно также, что можно предположить $\delta_1=I$. Обозначим $\delta_2=\delta$. Тогда условие симметрии условного распределения L_2 при фиксированной L_1 эквивалентно тому, что характеристические функции $\hat\mu_1(y)$, $\hat\mu_2(y)$ удовлетворяют функциональному уравнению (1), которое принимает вид

$$\hat\mu_1(u+v)\hat\mu_2(u+\tilde\delta v)=\hat\mu_1(u-v)\hat\mu_2(u-\tilde\delta v), \quad u,v\in Y. \tag{7}$$

Разложим группу X в прямую сумму своих p-примарных компонент: $X=\sum\limits_{p\in\mathscr{P}}X_p$, где $\mathscr{P}$ — множество простых чисел. Обозначим $G=X_2$, $K=\sum\limits_{p>2}X_p$. Тогда $X=G+K$. Если $G=\{0\}$, то утверждение теоремы 1 следует из теоремы A. Предположим, что $G\neq\{0\}$. Тогда $Y\approx H+L$, где $H=G^*$, $L=K^*$. Чтобы не усложнять обозначения, будем считать, что $Y=H+L$. Обозначим через (h,l), $h\in H$, $l\in L$, элементы группы Y. Так как подгруппы H и L, очевидно, характеристические, любой автоморфизм $d\in\mathrm{Aut}(Y)$ может быть записан в виде $d(h,l)=(dh,dl)$, $(h,l)\in Y$.

Полагая $u=(h,l)$, $v=(h',l')$, $\tilde\delta=\varepsilon$, $\hat\mu_1(y)=f(y)$, $\hat\mu_2(y)=g(y)$, перепишем функциональное уравнение (7) в следующем виде:

$$\begin{aligned} f(h+h',l+l')g(h+\varepsilon h',l+\varepsilon l')&\\ =f(h-h',l-l')g(h-\varepsilon h',l-\varepsilon l'),&\quad (h,l),(h',l')\in Y. \end{aligned} \tag{8}$$

Подставим $h=h'=0$ в (8). Тогда получим следующее функциональное уравнение:

$$f(0,l+l')g(0,l+\varepsilon l')=f(0,l-l')g(0,l-\varepsilon l'), \quad l,l'\in L. \tag{9}$$

Из теоремы A следует, что каждое решение функционального уравнения (9) имеет вид

$$f(0,l)=(k_1,l)\widehat{m}_F(l), \quad g(0,l)=(k_2,l)\widehat{m}_F(l), \quad l\in L, \tag{10}$$

где F — подгруппа группы K и k_1, $k_2 \in K$. Подставляя (10) в (9), получаем, что $2(k_1+\delta k_2) \in F$, а поскольку $K_{(2)} = \{0\}$, то и $k_1+\delta k_2 \in F$. Положим $k = k_1+\delta k_2$. Ясно, что представление (10) не изменится, если вместо k_1 положить $k_1' = k_1-k$. Но в таком случае $k_1' + \delta k_2 = 0$, и тогда, как легко видеть, характеристические функции $(-k_1', l)$ и $(-k_2, l)$ удовлетворяют уравнению (9). Заменим распределения μ_j их сдвигами $\mu_1' = \mu_1 * E_{-k_1'}$ и $\mu_2' = \mu_2 * E_{-k_2}$ и сохраним обозначения $f(y)$ и $g(y)$ для характеристических функций распределений μ_j'. Очевидно, что характеристические функции распределений μ_j' удовлетворяют условию

$$f(0,l) = g(0,l) = \begin{cases} 1, & l \in B, \\ 0, & l \notin B, \end{cases} \tag{11}$$

где $B = A(L,F)$. Из (11) следует, что характеристические функции $f(h,l)$ и $g(h,l)$ B-инвариантны. Поскольку $f_2 \in \mathrm{Aut}(K)$, по лемме 2 $\varepsilon(B) = B$, и мы можем рассматривать уравнение, индуцированное уравнением (8) на фактор-группе Y/B, полагая $\tilde f([(h,l)]) = f(h,l)$, $\tilde g([(h,l)]) = g(h,l)$, $\hat\varepsilon[(h,l)] = [\varepsilon(h,l)]$, где $(h,l) \in [(h,l)] \in Y/B$, а $\hat\varepsilon$ — автоморфизм фактор-группы Y/B, индуцированный автоморфизмом ε. Заметим также, что $\hat a, \hat b \in \mathrm{Aut}(Y/B)$, где $a = I-\varepsilon$, $b = I+\varepsilon$. Переход от рассмотрения уравнения (8) на группе Y к уравнению, индуцированному уравнением (8) на фактор-группе Y/B означает, что мы перешли от рассмотрения случайных величин со значениями в группе $X = G+K$ к рассмотрению случайных величин со значениями в подгруппе $G+F$. Поскольку для решений индуцированного уравнения выполнено $\{[(0,l)] \in Y/B : \tilde f([(0,l)]) = \tilde g([(0,l)]) = 1\} = \{0\}$, то мы с самого начала можем считать, что

$$f(0,l) = g(0,l) = \begin{cases} 1, & l = 0, \\ 0, & l \neq 0. \end{cases} \tag{12}$$

Полагая в (8) $h = b^{-1}p$, $h' = -b^{-1}p$, $l = b^{-1}q$, $l' = -b^{-1}q$, где $p \in H$, $q \in L$, получим

$$g(cp, cq) = f(2b^{-1}p, 2b^{-1}q) g(p,q), \tag{13}$$

где $c = (I+\varepsilon)^{-1}(I-\varepsilon)$. Предположим, что существует элемент $y_0 = (h_0, l_0)$, $l_0 \neq 0$, такой, что $g(h_0,l_0) \neq 0$. Тогда по лемме 1 $|g(ch_0, cl_0)| = |g(h_0,l_0)| \neq 0$, и из (13) следует, что

$$|f(2b^{-1}h_0, 2b^{-1}l_0)| = 1. \tag{14}$$

Поскольку множество точек, в которых модуль характеристической функции равен 1, является подгруппой, из (14) вытекает, что при любом натуральном k выполнено $|f(2^k b^{-1}h_0, 2^k b^{-1}l_0)| = 1$. Заметим теперь, что если h_0 — элемент порядка 2^m, то $2^m b^{-1}h_0 = 0$. Следовательно,

$$|f(0, 2^m b^{-1} l_0)| = 1.$$

С другой стороны, так как подгруппа L не содержит элементов порядка 2, а $b^{-1} \in \mathrm{Aut}(L)$, то $2^m b^{-1} l_0 \neq 0$, что противоречит (12). Таким образом, мы доказали, что характеристическая функция $g(h,l)$ представима в следующем виде:

$$g(h,l) = \begin{cases} g_0(h), & l = 0, \\ 0, & l \neq 0, \end{cases}$$

где $g_0(h) = g(h,0)$, а следовательно, $g(h,l) = g_0(h)g_1(l)$, где $g_1(l) = g(0,l)$. Функция $g_0(h)$ является характеристической функцией некоторого распределения ρ_2

такого, что $\sigma(\rho_2) \subset G$, а функция $g_1(l)$ является характеристической функцией распределения $\pi_2 \in I(K)$. Итак, $\mu_2 = \rho_2 * \pi_2$. Аналогично рассуждаем для распределения μ_1. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Рассмотрим случай произвольного числа n независимых случайных величин. Пусть X — конечная абелева группа такая, что $X \neq X_2$, удовлетворяющая условию (α) предложения А. Пусть $X = \sum\limits_{p \in \mathscr{P}} X_p$, где $\mathscr{P}$ — множество простых чисел, — разложение X в прямую сумму своих p-примарных компонент. Тогда справедливы следующие утверждения.

(I) Предположим, что группа X удовлетворяет условию: (i) разложение подгруппы X_5 в прямую сумму своих циклических подгрупп содержит по крайней мере одно циклическое слагаемое с кратностью один. Пусть $\alpha_j, \beta_j \in \mathrm{Aut}(X)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, и $\beta_i\alpha_i^{-1} \pm \beta_j\alpha_j^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$ при всех $i \neq j$. Пусть ξ_j — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_j. Если условное распределение $L_2 = \beta_1\xi_1 + \cdots + \beta_n\xi_n$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_n\xi_n$ симметрично, то $\mu_j = \rho_j * \pi_j$, где $\sigma(\rho_j) \subset X_2$, $\pi_j \in I(X)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$.

(II) Если условие (i) не выполнено, то существуют $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$ такие, что

$$I \pm \alpha, \quad I \pm \beta, \quad \alpha \pm \beta \in \mathrm{Aut}(X), \tag{15}$$

и независимые случайные величины ξ_j, $j = 1, 2, 3$, со значениями в группе X и с распределениями μ_j такие, что условное распределение $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2 + \beta\xi_3$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ симметрично и ни одно из распределений μ_j не представимо в виде $\mu_j = \rho_j * \pi_j$, где $\sigma(\rho_j) \subset X_2$, $\pi_j \in I(X)$.

Докажем (I). По условию существует такое k, что группа X содержит в качестве прямого слагаемого только одно слагаемое вида $\mathbb{Z}(5^k)$. Положим $G_1 = X^{(5^k)} \cap X_{(5)}$, $G_2 = X^{(5^{k-1})} \cap X_{(5)}$. Тогда, как легко видеть, $G = G_2/G_1 \approx \mathbb{Z}(5)$. Так как подгруппы $X^{(5^l)}$ и $X_{(5)}$ характеристические, подгруппы G_1 и G_2 характеристические. Поэтому любой автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ индуцирует автоморфизм $\hat\delta$ на фактор-группе G. Любой автоморфизм $\hat\delta \in \mathrm{Aut}(G)$ имеет вид $\hat\delta l = kl$, где $l \in \mathbb{Z}(5)$, а $k = 1, 2, 3, 4$. Поскольку, очевидно, что не существуют $\hat\alpha$, $\hat\beta \in \mathrm{Aut}(G)$, удовлетворяющие условию (15), то не существуют и $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(X)$, удовлетворяющие условию (15). Поэтому при выполнении условия (i) число независимых случайных величин n равно 2. Утверждение (I) следует теперь из теоремы 1.

Докажем (II). Так как группа X удовлетворяет условию (α) предложения А, то в X можно выделить прямое слагаемое G, изоморфное одной из групп $(\mathbb{Z}(3^r))^2$, $(\mathbb{Z}(3^r))^3$, $(\mathbb{Z}(5^r))^2$, $(\mathbb{Z}(5^r))^3$, $\mathbb{Z}(p^r)$, где p простое и $p \geq 7$, так, чтобы подгруппа K, где $X = G + K$, также удовлетворяла условию (α) предложения А и не удовлетворяла условию (i). Как доказано в [12], существуют независимые случайные величины ξ_j, $j = 1, 2, 3$, со значениями в G и с распределениями μ_j и автоморфизмы $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(G)$, удовлетворяющие условию (15), такие, что условное распределение $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2 + \beta\xi_3$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ симметрично, а распределения μ_j не идемпотентны. Автоморфизмы α и β можно продолжить до автоморфизмов всей группы X так, чтобы продолженные автоморфизмы также удовлетворяли условию (15). Для этого достаточно проверить, что на каждой p-примарной компоненте K_p существуют автоморфизмы $\alpha, \beta \in \mathrm{Aut}(K_p)$, удовлетворяющие условию (15). Поскольку группа K удовлетворяет условию (α) предложения А и не удовлетворяет условию (i), то для каждой p-примарной компоненты K_p при $p > 2$ такие автоморфизмы существуют (см. [12]). Построим такие автоморфизмы для подгруппы $K_2 = X_2$. Подгруппа X_2 является прямой суммой циклических слагаемых вида $(\mathbb{Z}(2^r))^2$ и вида $(\mathbb{Z}(2^r))^3$. Для подгруппы вида $(\mathbb{Z}(2^r))^2$ положим $\alpha(k,l) = (l, k+l)$, $\beta(k,l) = (k+l, k)$, а для подгруппы вида $(\mathbb{Z}(2^r))^3$ положим $\alpha(k,l,m) = (k+l+m, k+l, k)$, $\beta(k,l,m) = (l+m, k, k+m)$, $k,l,m \in \mathbb{Z}(2^r)$. Легко видеть, что для α, β условие (15) выполнено. Итак, условное распределение $L_2 = \xi_1 + \alpha\xi_2 + \beta\xi_3$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ симметрично, и по построению распределения μ_j не представимы в виде $\mu_j = \rho_j * \pi_j$, где $\sigma(\rho_j) \subset X_2$, $\pi_j \in I(X)$.

3. Теорема Хейде для конечной 2-примарной абелевой группы

Пусть X — конечная 2-примарная абелева группа, т. е. $X = X_2$. Обсудим задачу 2 для группы X: какими могут быть возможные распределения μ_1, μ_2 независимых случайных величин ξ_1, ξ_2 со значениями в группе X в предположении, что условное распределение $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$, где $\delta, I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$, при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично. Другими словами, для каких распределений μ_1, μ_2 их характеристические функции $\hat\mu_1(y)$, $\hat\mu_2(y)$ удовлетворяют уравнению (7).

В работе [12] описаны соответствующие идемпотентные распределения μ_j при условии $\mu_1 = \mu_2$. Очевидно также, что если $\sigma(\mu_j) \subset X_{(2)}$, то распределения μ_1, μ_2 являются решением этой задачи. В предположении, что $X_2 \neq X_{(2)}$, можно указать еще один класс распределений μ_j таких, что характеристические функции $\hat\mu_1(y)$, $\hat\mu_2(y)$ удовлетворяют уравнению (7). Это распределения μ_j, инвариантные относительно сдвигов на элементы подгруппы $X^{(2)}$. Проверим это. Легко видеть, что характеристические функции $\hat\mu_1(y)$, $\hat\mu_2(y)$ таких распределений имеют вид

$$\hat\mu_1(y) = \begin{cases} f_0(y), & y \in Y_{(2)}, \\ 0, & y \notin Y_{(2)}, \end{cases} \qquad \hat\mu_2(y) = \begin{cases} g_0(y), & y \in Y_{(2)}, \\ 0, & y \notin Y_{(2)}, \end{cases}$$

где $f_0(y)$ и $g_0(y)$ — произвольные характеристические функции на $Y_{(2)}$. Проверим, что характеристические функции $\hat\mu_1(y)$, $\hat\mu_2(y)$ удовлетворяют уравнению (7). Пусть $u, v \in Y_{(2)}$. Тогда $u + v = u - v$, $u + \tilde\delta v = u - \tilde\delta v$. Следовательно, $\hat\mu_1(u+v) = \hat\mu_1(u-v)$, $\hat\mu_2(u+\tilde\delta v) = \hat\mu_2(u-\tilde\delta v)$, и уравнение (7) выполнено. Пусть либо $u \in Y_{(2)}$, $v \notin Y_{(2)}$, либо $u \notin Y_{(2)}$, $v \in Y_{(2)}$. Тогда $u \pm v \notin Y_{(2)}$. Поэтому $\hat\mu_1(u \pm v) = 0$ и уравнение (7) выполнено. Если $u, v \notin Y_{(2)}$, то левая часть уравнения (7) может не обращаться в нуль лишь при условии, что $u + v \in Y_{(2)}$, $u + \tilde\delta v \in Y_{(2)}$. Отсюда следует, что $(I - \tilde\delta)v \in Y_{(2)}$, а значит, и $v \in Y_{(2)}$, что противоречит предположению. Тем самым левая часть уравнения (7) всегда обращается в нуль при $u, v \notin Y_{(2)}$. Аналогично проверяем, что правая часть уравнения (7) также обращается в нуль при $u, v \notin Y_{(2)}$. Таким образом, уравнение (7) выполнено для любых $u, v \in Y$.

Итак, если $X_2 \neq X_{(2)}$, то существует три различных класса распределений μ_j таких, что характеристические функции $\hat\mu_1(y)$, $\hat\mu_2(y)$ удовлетворяют уравнению (7):

(I) идемпотентные распределения;

(II) распределения с носителем в $X_{(2)}$;

(III) распределения, инвариантные относительно сдвигов на элементы $X^{(2)}$.

Очевидно, если распределения μ_1, μ_2 и ν_1, ν_2 таковы, что их характеристические функции удовлетворяют уравнению (7), то и распределения $\gamma_1 = \mu_1 * \nu_1$, $\gamma_2 = \mu_2 * \nu_2$ также обладают этим свойством. Оказывается, что если $X_2 \neq X_{(2)}$, то на X существуют распределения μ_1, μ_2, не принадлежащие ни одному из классов (I)–(III), не являющиеся свертками распределений из этих классов, но характеристические функции которых удовлетворяют уравнению (7). Эта ситуация противоположна случаю, когда $X_2 = \{0\}$, поскольку на таких группах лишь характеристические функции идемпотентных распределений удовлетворяют уравнению (7) (см. теорему A). Сформулируем теперь основной результат данного параграфа.

Теорема 2. *Пусть X — конечная 2-примарная абелева группа такая, что $X \neq X_{(2)}$. Тогда существуют автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ такой, что $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$, и независимые случайные величины ξ_1, ξ_2 со значениями в группе X и с распределениями μ_1, μ_2 такие, что условное распределение $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично, а μ_j не могут быть представлены в виде сверток распределений из классов* (I)–(III).

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится

Лемма 3. *Для каждой из групп $X = (\mathbb{Z}(4))^2$ и $X = (\mathbb{Z}(4))^3$ существуют автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ такой, что $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$, и независимые случайные величины ξ_1, ξ_2 со значениями в группе X и с распределениями μ_1, μ_2 такие, что условное распределение $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично, а μ_j не могут быть представлены в виде сверток распределений из классов* (I)–(III).

Доказательство. Пусть $X = (\mathbb{Z}(4))^2$. Тогда $Y \approx (\mathbb{Z}(4))^2$. Обозначим через (a,b) элементы группы X, а через (k,l) элементы группы Y, $a,b,k,l \in \mathbb{Z}(4)$. Пусть автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ имеет вид $\delta(a,b) = (a+b, a)$. Тогда $\varepsilon(k,l) = (k+l, k)$, где $\varepsilon = \tilde{\delta}$. Очевидно, что $\delta, I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями $\mu_1 = \alpha m_{K_1} + (1-\alpha) m_G$, $\mu_2 = \alpha m_{K_2} + (1-\alpha) m_G$, где $K_1 = \{(0,0),(0,2)\}$, $K_2 = \{(0,0),(2,2)\}$, $G = \{X_{(2)}, (1,0) + X_{(2)}\}$, $0 < \alpha < 1$. Легко видеть, что $A(Y, K_1) = \{Y_{(2)}, (1,0) + Y_{(2)}\}$, $A(Y, K_2) = \{Y_{(2)}, (1,1) + Y_{(2)}\}$, $A(Y, G) = \{(0,0),(0,2)\}$, а, следовательно, характеристические функции $\hat\mu_1(y) = f(y)$, $\hat\mu_2(y) = g(y)$ имеют вид

$$f(y) = \begin{cases} 1, & y \in \{(0,0),(0,2)\}, \\ \alpha, & y \in \{(2,0),(2,2),(1,0) + Y_{(2)}\}, \\ 0, & y \in \{(1,1) + Y_{(2)}, (0,1) + Y_{(2)}\}, \end{cases}$$

$$g(y) = \begin{cases} 1, & y \in \{(0,0),(0,2)\}, \\ \alpha, & y \in \{(2,0),(2,2),(1,1) + Y_{(2)}\}, \\ 0, & y \in \{(1,0) + Y_{(2)}, (0,1) + Y_{(2)}\}. \end{cases}$$

Покажем, что условное распределение $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ симметрично, т. е. характеристические функции $f(y)$ и $g(y)$ удовлетворяют функциональному уравнению

$$f(u+v)g(u+\varepsilon v) = f(u-v)g(u-\varepsilon v), \quad u, v \in Y. \tag{16}$$

Легко видеть, что для любых $u, v \in Y$ либо $u \pm v \in Y_{(2)}$, либо $u \pm v \notin Y_{(2)}$. Поэтому возможны следующие случаи.

1. $u \pm v$, $u \pm \varepsilon v \in Y_{(2)}$. Отсюда следует, что $(I-\varepsilon)v \in Y_{(2)}$, а значит, и $u, v \in Y_{(2)}$. Тогда $u+v=u-v$, $u+\varepsilon v = u-\varepsilon v$ и уравнение (16) выполнено.

2. $u \pm v \in Y_{(2)}$, $u \pm \varepsilon v \notin Y_{(2)}$. Так как $u \pm v \in Y_{(2)}$, возможны следующие случаи.

(a) $u, v \in (1,0)+Y_{(2)}$. Тогда $\varepsilon v \in (1,1)+Y_{(2)}$ и $g(u \pm \varepsilon v)=0$. Следовательно, уравнение (16) выполнено.

(b) $u, v \in (1,1)+Y_{(2)}$. Тогда $\varepsilon v \in (0,1)+Y_{(2)}$ и $g(u \pm \varepsilon v)=0$. Следовательно, уравнение (16) выполнено.

(c) $u, v \in (0,1)+Y_{(2)}$. Тогда $\varepsilon v \in (1,0)+Y_{(2)}$ и $g(u+\varepsilon v)=g(u-\varepsilon v)=\alpha \neq 0$. Поэтому уравнение (16) не выполнено, если либо $u+v \in \{(0,0),(0,2)\}$, $u-v \in \{(2,0),(2,2)\}$, либо $u-v \in \{(0,0),(0,2)\}$, $u+v \in \{(2,0),(2,2)\}$. В каждом из этих случаев $2u \in \{(2,0),(2,2)\}$, а значит, $u \in \{(1,0)+Y_{(2)},(1,1)+Y_{(2)}\}$, что противоречит предположению. Таким образом, уравнение (16) выполнено.

3. $u \pm v \notin Y_{(2)}$, $u \pm \varepsilon v \in Y_{(2)}$. Так как $u \pm \varepsilon v \in Y_{(2)}$, возможны следующие случаи.

(a) $u \in (1,0)+Y_{(2)}$, $v \in (0,1)+Y_{(2)}$. Тогда $f(u \pm v)=0$ и уравнение (16) выполнено.

(b) $u \in (1,1)+Y_{(2)}$, $v \in (1,0)+Y_{(2)}$. Тогда $f(u \pm v)=0$ и уравнение (16) выполнено.

(c) $u \in (0,1)+Y_{(2)}$, $v \in (1,1)+Y_{(2)}$. Тогда $f(u+v)=f(u-v)=\alpha \neq 0$. Поэтому уравнение (16) не выполнено, если либо $u+\varepsilon v \in \{(0,0),(0,2)\}$, $u-\varepsilon v \in \{(2,0),(2,2)\}$, либо $u-\varepsilon v \in \{(0,0),(0,2)\}$, $u+\varepsilon v \in \{(2,0),(2,2)\}$. В каждом из этих случаев $2u \in \{(2,0),(2,2)\}$, а значит, $u \in \{(1,0)+Y_{(2)},(1,1)+Y_{(2)}\}$, что противоречит предположению. Таким образом, уравнение (16) выполнено.

4. $u \pm v \notin Y_{(2)}$, $u \pm \varepsilon v \notin Y_{(2)}$. Поскольку $u+v=u-v+2v$, элементы $u+v$ и $u-v$ одновременно принадлежат или классу $(1,0)+Y_{(2)}$, или классу $(0,1)+Y_{(2)}$, или классу $(1,1)+Y_{(2)}$. Следовательно, $f(u+v)=f(u-v)$, $g(u+\varepsilon v)=g(u-\varepsilon v)$, и уравнение (16) выполнено.

Осталось проверить, что функции $f(y)$ и $g(y)$ нельзя представить в виде произведения характеристических функций распределений из классов (I)–(III). Покажем это для функции $f(y)$. Предположим, что $f(y)=f_1(y)f_2(y)f_3(y)$, где $f_j(y)$ — характеристическая функция соответствующего распределения. Множитель $f_3(y)$ в этом произведении должен отсутствовать, так как существуют элементы $y \notin Y_{(2)}$ такие, что $f(y) \neq 0$. Итак, $f(y)=f_1(y)f_2(y)$. Предположим, что в этом представлении присутствуют оба множителя. Если $y \in Y^{(2)}$, то $f_2(y)=1$. Но функция $f_1(y)$ равна по модулю либо 0, либо 1. Значит, при любом $y \in Y^{(2)}$ функция $f(y)$ равна по модулю либо 0, либо 1. Но это не так. Значит, либо $f(y)=f_1(y)$, либо $f(y)=f_2(y)$, что, очевидно, невозможно. Аналогично проводим доказательство для функции $g(y)$. Лемма 3 для группы $X=(\mathbb{Z}(4))^2$ доказана.

Пусть $X=(\mathbb{Z}(4))^3$. Тогда $Y \approx (\mathbb{Z}(4))^3$. Обозначим через (a,b,c) элементы группы X, $a,b,c \in \mathbb{Z}(4)$. Пусть автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ имеет вид $\delta(a,b,c)=(a+b+c,a+b,a)$. Очевидно, что $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(Y)$. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями $\mu_1=\alpha m_{K_1}+(1-\alpha)m_G$, $\mu_2=\alpha m_{K_2}+(1-\alpha)m_G$, где $K_1=\{(0,0,0),(0,2,2)\}$, $K_2=\{(0,0,0),(2,0,0)\}$, $G=\{X_{(2)},(0,0,1)+X_{(2)}\}$, а $0<\alpha<1$. Дальнейшие рассуждения следуют схеме доказательства леммы 3 для группы $X=(\mathbb{Z}(4))^2$, но требует рассмотрения большего числа случаев, и мы их опустим. Итак, лемма 3 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2. Поскольку группа X отлична от $X_{(2)}$ и удовлетворяет условию (α) предложения A, в X можно выделить прямое слагаемое вида $G = (\mathbb{Z}(2^l))^r$, где $r = 2$ либо $r = 3$, а $l \geq 2$, так, чтобы подгруппа K, где $X = G + K$, также удовлетворяла условию (α) предложения A. Пусть для определенности $r = 2$. Обозначим через (a, b) элементы подгруппы G. Пусть автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(G)$ имеет вид $\delta(a, b) = (a+b, a)$, $a, b \in \mathbb{Z}(2^l)$. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в подгруппе $F \approx (\mathbb{Z}(4))^2 \subset G$. Очевидно, что сужение автоморфизма δ на F также является автоморфизмом. Как доказано в лемме 3, для так заданного автоморфизма δ на F существуют независимые случайные величины ξ_1, ξ_2 со значениями в F и с распределениями μ_1, μ_2 такие, что условное распределение L_2 при фиксированной L_1 симметрично, а μ_j не могут быть представлены в виде сверток распределений из классов (I)–(III). Продолжим автоморфизм δ до автоморфизма всей группы X таким образом, чтобы $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$. Это можно сделать, потому что подгруппа K также удовлетворяет условию (α) предложения A. Тогда случайные величины ξ_1, ξ_2 можно считать принимающими значения во всей группе X, и тем самым теорема 2 доказана.

4. Теорема Хейде для группы $X = \mathbb{R} + N$, где N — конечная абелева группа

Основным результатом данного параграфа является следующая

Теорема 3. *Пусть $X = \mathbb{R}+N$, где N — конечная абелева группа. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1, μ_2. Предположим, что $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathrm{Aut}(X)$ и $\beta_1\alpha_1^{-1} \pm \beta_2\alpha_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$. Если условное распределение $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ симметрично, то $\mu_j = \gamma_j * \rho_j * \pi_j$, где $\gamma_j \in \Gamma(\mathbb{R})$, $\sigma(\rho_j) \subset N_2$, $\pi_j \in I(X)$, $j = 1, 2$.*

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится следующая

Лемма 4. *Пусть $X = \mathbb{R}+G$, где G — конечная 2-примарная группа. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины со значениями в группе X и с распределениями μ_1, μ_2. Предположим, что $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathrm{Aut}(X)$ и $\beta_1\alpha_1^{-1} \pm \beta_2\alpha_2^{-1} \in \mathrm{Aut}(X)$. Если условное распределение $L_2 = \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2$ при фиксированной $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2$ симметрично, то $\mu_j = \gamma_j * \rho_j$, где $\gamma_j \in \Gamma(\mathbb{R})$, $\sigma(\rho_j) \subset G$, $j = 1, 2$.*

Доказательство. Имеем $Y \approx \mathbb{R} + H$, где $H = G^*$. Чтобы не усложнять обозначения, будем считать, что $Y = \mathbb{R} + H$. Обозначим через (s, h), $s \in \mathbb{R}$, $h \in H$, элементы группы Y. Если $d \in \mathrm{Aut}(Y)$, то $d(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, так как $\mathbb{R}$ — связная компонента нуля группы Y, и $d(H) = H$, так как H — подгруппа в Y, состоящая из всех элементов конечного порядка. Таким образом, любой автоморфизм $d \in \mathrm{Aut}(Y)$ может быть записан в виде $d(s, h) = (ds, dh)$, $(s, h) \in Y$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, сведем доказательство леммы 4 к случаю, когда $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$, где δ, $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$, т. е. к решению функционального уравнения

$$\begin{aligned} &f(s+s', h+h')g(s+\varepsilon s', h+\varepsilon h') \\ &\qquad = f(s-s', h-h')g(s-\varepsilon s', h-\varepsilon h'), \quad (s,h),(s',h') \in Y, \end{aligned} \tag{17}$$

где $f(y) = \hat{\mu}_1(y)$, $g(y) = \hat{\mu}_2(y)$, $\varepsilon = \tilde{\delta}$.

Полагая $h = h' = 0$ в (17), получим следующее функциональное уравнение:

$$f(s+s',0)g(s+\varepsilon s',0) = f(s-s',0)g(s-\varepsilon s',0), \quad s, s' \in \mathbb{R}.$$

Отсюда по теореме Хейде находим

$$f(s,0) = \exp\{-\sigma_1 s^2 + it_1 s\}, \quad g(s,0) = \exp\{-\sigma_2 s^2 + it_2 s\}, \quad s \in \mathbb{R}, \tag{18}$$

где $\sigma_j \ge 0$, $-\infty < t_j < \infty$, $j = 1, 2$.

Покажем индукцией по k, где 2^k — порядок элемента h, что справедливо представление

$$f(s,h) = F_1(s)F_2(h), \quad g(s,h) = G_1(s)G_2(h), \tag{19}$$

где $F_j(0) = G_j(0) = 1$, $j = 1, 2$.

Полагая в (17) $s = -\varepsilon s'$, $h' = h$, получаем уравнение

$$f(as', 2h)g(0, bh) = f(-bs', 0)g(-2\varepsilon s', ah), \quad (s,h), (s',h') \in Y, \tag{20}$$

где $a = I - \varepsilon$, $b = I + \varepsilon$.

Пусть $k = 1$, т. е. $2h = 0$. Уравнение (20) принимает вид

$$f(as', 0)g(0, bh) = f(-bs', 0)g(-2\varepsilon s', ah), \quad (s,h), (s',h') \in Y. \tag{21}$$

Из (18) следует, что $f(-bs', 0) \ne 0$. Поскольку $-2\varepsilon \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R})$, а $a \in \mathrm{Aut}(H)$, из (21) вытекает требуемое представление для $g(s,h)$.

Аналогично, подставляя в (17) $s' = -s$, $h = \varepsilon h'$, получаем функциональное уравнение

$$f(0, bh)g(as, 2\varepsilon h') = f(2s, -ah')g(bs, 0), \quad (s,h), (s',h') \in Y, \tag{22}$$

из которого при $k = 1$, т. е. $2h' = 0$, следует нужное представление для $f(s,h)$. Итак, при $k = 1$ утверждение доказано.

Предположим, что если h имеет порядок 2^k, то представление (19) справедливо. Пусть h имеет порядок 2^{k+1}. Тогда $2h$ имеет порядок 2^k и в (20) по предположению индукции $f(as', 2h) = F_1(as')F_2(2h)$. Рассуждая далее так же, как и в случае, когда $k = 1$, из (20) получаем требуемое представление для $g(s,h)$. Аналогично из (22) следует требуемое представление для $f(s,h)$. Рассуждая затем так же, как в заключительной части доказательства теоремы 1, доказываем лемму 4.

Доказательство теоремы 3. Разложим группу N в прямую сумму своих p-примарных компонент: $N = \sum_{p \in \mathscr{P}} N_p$, где $\mathscr{P}$ — множество простых чисел. Обозначим $G = N_2$, $K = \sum_{p>2} N_p$. Тогда $X = \mathbb{R} + G + K$, а $Y \approx \mathbb{R} + H + L$, где $H = G^*$, $L = K^*$. Чтобы не усложнять обозначения, будем считать, что $Y = \mathbb{R} + H + L$. Обозначим через (s,h,l), $s \in \mathbb{R}$, $h \in H$, $l \in L$, элементы группы Y. Поскольку, очевидно, подгруппы $\mathbb{R}$, H, L характеристические, любой автоморфизм $d \in \mathrm{Aut}(Y)$ может быть записан в виде $d(s,h,l) = (ds, dh, dl)$, $(s,h,l) \in Y$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 1, сведем доказательство теоремы 3 к случаю, когда $L_1 = \xi_1 + \xi_2$ и $L_2 = \xi_1 + \delta\xi_2$, где δ, $I \pm \delta \in \mathrm{Aut}(X)$, т. е. к решению функционального уравнения

$$\begin{aligned} &f(s+s', h+h', l+l')g(s+\varepsilon s', h+\varepsilon h', l+\varepsilon l') \\ &= f(s-s', h-h', l-l')g(s-\varepsilon s', h-\varepsilon h', l-\varepsilon l'), (s,h,l), \quad (s',h',l') \in Y, \end{aligned} \tag{23}$$

где $f(y) = \hat{\mu}_1(y)$, $g(y) = \hat{\mu}_2(y)$, $\varepsilon = \tilde{\delta}$.

Полагая в (23) $s = s' = 0$, получаем

$$f(0, h + h', l + l')g(0, h + \varepsilon h', l + \varepsilon l') = f(0, h - h', l - l')g(0, h - \varepsilon h', l - \varepsilon l').$$

Как следует из доказательства теоремы 1, можно с самого начала считать, что имеет место представление

$$f(0,h,l) = \begin{cases} f_0(h), & l = 0, \\ 0, & l \neq 0, \end{cases} \quad g(0,h,l) = \begin{cases} g_0(h), & l = 0, \\ 0, & l \neq 0, \end{cases} \tag{24}$$

где $f_0(h)$ и $g_0(h)$ — характеристические функции на H.

Полагая $s' = s$, $h' = -h$, $l' = -l$ в (23), получим

$$f(2s, 0, 0)g(bs, ah, al) = f(0, 2h, 2l)g(as, bh, bl), \quad (s, h, l) \in Y, \tag{25}$$

где $a = I - \varepsilon$, $b = I + \varepsilon$. Из (24) вытекает, что $f(0, 2h, 2l) = 0$ при $l \neq 0$. Значит, $f(2s, 0, 0)g(bs, ah, al) = 0$ при $l \neq 0$. Поскольку для функции $f(s, 0, 0)$ по теореме Хейде справедливо представление (18), то $f(2s, 0, 0) \neq 0$ и, следовательно, из (25) получаем

$$g(bs, ah, al) = 0 \tag{26}$$

при $l \neq 0$. Так как $a, b \in \mathrm{Aut}(Y)$, из (26) вытекает, что

$$g(s, h, l) = 0, \quad l \neq 0. \tag{27}$$

Аналогично убеждаемся, что

$$f(s, h, l) = 0, \quad l \neq 0. \tag{28}$$

Положим в (23) $l = l' = 0$. Тогда по лемме 4 имеем представление

$$f(s, h, 0) = \exp\{-\sigma_1 s^2 + it_1 s\}F(h), \quad g(s, h, 0) = \exp\{-\sigma_2 s^2 + it_2 s\}G(h), \tag{29}$$

где $\sigma_j \geq 0$, $-\infty < t_j < \infty$, $j = 1, 2$.

Из (27)–(29) следует, что

$$f(s,h,l) = \begin{cases} \exp\{-\sigma_1 s^2 + it_1 s\}F(h), & l = 0, \\ 0, & l \neq 0, \end{cases} \tag{30}$$

$$g(s,h,l) = \begin{cases} \exp\{-\sigma_2 s^2 + it_2 s\}G(h), & l = 0, \\ 0, & l \neq 0. \end{cases} \tag{31}$$

Утверждение теоремы 3, как легко видеть, вытекает из представлений (30) и (31).

Основная идея этой статьи возникла во время пребывания второго автора в Weizmann Institute of Science в качестве Meyerhoff Visiting Professor.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики. М.: Наука, 1972.
2. *Heyde C. C.* Characterization of the normal law by the symmetry of a certain conditional distribution // Sankhya. Ser. A. 1970. V. 32. P. 115–118.
3. *Рухин А. Л.* Об одной теореме С. Н. Бернштейна // Мат. заметки. 1969. Т. 6, № 3. С. 307–310.
4. *Heyer H., Rall Ch.* Gausssche Wahrscheinlichkeitsmasse auf Corwinschen Gruppen // Math. Z. 1972. Bd 128. S. 343–361.

5. *Фельдман Г. М.* Гауссовские распределения в смысле Бернштейна на группах // Теория вероятностей и ее применения. 1986. Т. 31, № 1. С. 47–58.
6. *Neuenschwander D.* Gauss measures in the sense of Bernstein on the Heisenberg group // Probab. Math. Statist. 1993. V. 14, N 2. P. 253–256.
7. *Neuenschwander D., Roynette B., Schott R.* Characterizations of Gaussian distributions on symply connected nilpotent Lie groups and symmetric spaces // C. R. Acad. Sci. Paris. Sèr. I. 1997. V. 324. P. 87–92.
8. *Neuenschwander D., Schott R.* The Bernstein and Skitovich–Darmois characterization theorems for Gaussian distributions on groups, symmetric spaces, and quantum groups // Exposition Math. 1997. V. 15. P. 289–314.
9. *Feldman G. M., Graczyk P.* On the Skitovich–Darmois theorem for compact Abelian groups // J. Theoret. Probab. 2000. V. 13. P. 859–869.
10. *Graczyk P., Loeb J.-J.* A Bernstein property of measures on groups and symmetric spaces // Probab. Math. Statist. 2000. V. 20, N 1. P. 141–149.
11. *Feldman G. M.* A characterization of the Gaussian distribution on Abelian groups // Probab. Theory Related Fields. 2003. V. 126. P. 91–102.
12. *Feldman G. M.* On the Heyde theorem for finite Abelian groups // J. Theoret. Probab. 2004. V. 17. P. 929–941.

Статья поступила 16 сентября 2003 г.

Миронюк Маргарита Вячеславовна, *Фельдман Геннадий Михайлович*
Физико-технический институт низких температур им. Б. И. Веркина
НАН Украины
пр. Ленина, 47, Харьков 61103, Украина
myronjuk@ilt.kharkov.ua, feldman@ilt.kharkov.ua