Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2005. Том 46, № 2

УДК 517.547

ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИЙ ТИПА БЛОХА

Ли Сунсяо

Аннотация: В терминах дробной производной получены интегральные характеризации функций типа Блоха и их характеризации посредством мер типа Карлесона.

Ключевые слова: дробные производные, функция типа Блоха, мера типа Карлесона.

1. Введение

Пусть $B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ — единичный открытый шар в $\mathbb{C}^n$ с нормой $|z| = \langle z, z\rangle^{1/2}$, где $\langle , \rangle$ — обычное эрмитово скалярное произведение на $\mathbb{C}^n$, $S = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ — его граница, $d\nu$ — нормированная мера Лебега на B, т. е. $\nu(B) = 1$, и $d\sigma$ — нормированная инвариантная относительно вращений лебегова мера на S такая, что $\sigma(S) = 1$. Для $a \in B$ через φ_a обозначаем мёбиусово преобразование на B, удовлетворяющее условиям

$$\varphi_a \circ \varphi_a = \mathrm{id}, \quad \varphi_a(0) = a, \quad \varphi_a(a) = 0,$$

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \langle z, a\rangle|^2}, \quad J_R\varphi_a(z) = \left(\frac{1 - |a|^2}{|1 - \langle z, a\rangle|^2}\right)^{n+1},$$

$\varphi_a \in \mathrm{Aut}(B)$, где $\mathrm{Aut}(B)$ — группа биголоморфных автоморфизмов на B, см. [1].

Пусть $d\lambda(z) = (1-|z|^2)^{-n-1}\,d\nu(z)$. Тогда $d\lambda(z)$ мёбиусово инвариантна, т. е. для любых $\psi \in \mathrm{Aut}(B)$, $f \in L^1(B)$ выполнено равенство

$$\int\limits_B f(z)\,d\lambda(z) = \int\limits_B f \circ \psi(z)\,d\lambda(z).$$

Мёбиусово инвариантная функция Грина определяется, см. [2, 3], как $G(z, a) = g(\varphi_a(z))$, где

$$g(z) = \frac{n+1}{2n} \int\limits_{|z|}^{1} (1 - t^2)^{n-1} t^{-2n+1}\,dt.$$

Обозначим через $H(B)$ класс всех голоморфных функций на B. Если $f \in H(B)$ имеет однородное разложение $f = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$, то дробная производная $D^m f$ порядка $m > 0$ определяется следующим образом:

$$D^m f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^m f_k(z).$$

Partially supported by ZNSF of P. R. China (N 102025).

Для $m > 0$ положим $I^m f = D^{-m} f$. Известно [4], что $D^m f$, $I^m f \in H(B)$ и

$$D^m f(rz) = \frac{1}{r} \int\limits_0^r D^{m+1} f(\rho z)\, d\rho, \quad 0 < r < 1,\ z \in \overline{B},$$

$$I^m f(z) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int\limits_0^1 \left(\log \frac{1}{\rho}\right)^{m-1} f(\rho z)\, d\rho, \quad z \in B.$$

Для $a \in B$, $0 < r < 1$ положим $E(a, r) = \{z \in B : |\varphi_a(z)| < r\}$. Фиксируем $r > 0$ и $0 < \beta < \infty$. Положительную борелевскую меру μ на B называют *β-карлесоновой мерой*, если

$$\sup_{a \in B} \frac{\mu(E(a,r))}{\nu(E(a,r))^\beta} < \infty.$$

Меру μ будем называть *нулевой β-карлесоновой мерой*, если

$$\lim_{|a| \to 1} \frac{\mu(E(a,r))}{\nu(E(a,r))^\beta} = 0.$$

В следующей лемме [5, 6] даны эквивалентные интегральные характеризации β-карлесоновой и нулевой β-карлесоновой мер.

Лемма 1.1. *Пусть μ — положительная борелевская мера на B, $\frac{n+1}{n} < \beta < \infty$. Тогда*

(1) *μ — β-карлесонова мера тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{a \in B} \int\limits_B (J_R \varphi_a(z))^\beta d\mu(z) < \infty;$$

(2) *μ — нулевая β-карлесонова мера тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{|a| \to 1} \int\limits_B (J_R \varphi_a(z))^\beta\, d\mu(z) = 0.$$

Для $f \in H(B)$, $z \in B$ положим

$$Q_f(z) = \sup\left\{ \frac{|\langle \nabla f(z), \overline{x} \rangle|}{(H_z(x,x))^{1/2}} : 0 \neq x \in \mathbb{C}^n \right\},$$

где $\nabla f(z) = \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(z), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(z)\right)$ — комплексный градиент f и $H_z(x,x)$ — метрика Бергмана на B, т. е.

$$H_z(x,x) = \frac{n+1}{2} \frac{(1 - |z|^2)|x|^2 + |\langle x, z \rangle|^2}{(1 - |z|^2)^2}.$$

Пространство Блоха $\mathscr{B}$ (введенное в [7]) состоит из всех голоморфных функций f на B, для которых

$$\|f\|_{\mathscr{B}} = \sup\{Q_f(z) : z \in B\} < \infty.$$

В [7] показано, что нормы $\|f\| = \sup\{|\nabla f(z)|(1 - |z|^2),\ z \in B\}$ и $\|f\|_{\mathscr{B}}$ эквивалентны.

Для $0 < \alpha < \infty$ будем говорить, что $f \in H(B)$ — *α-функция Блоха*, если $\sup\limits_{z\in B} |\nabla f(z)|(1-|z|^2)^\alpha < \infty$, и что f — *малая α-функция Блоха*, если $\lim\limits_{|z|\to 1} |\nabla f(z)|(1-|z|^2)^\alpha = 0$. Множества α-функций Блоха и малых α-функций Блоха будем обозначать через $\mathscr{B}^\alpha$ и $\mathscr{B}_0^\alpha$ соответственно.

Напомним некоторые известные результаты. Для функции f, голоморфной на B, в теореме 4.10 из [7] сообщается, что $f \in \mathscr{B} \Leftrightarrow |\mathscr{R} f(z)|(1-|z|^2) < \infty$, где $\mathscr{R} f$ — радиальная производная f, определенная следующим образом:

$$\mathscr{R} f = \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(z).$$

Заметим, что $Df = \mathscr{R} f + f$, и легко видеть, что $f \in \mathscr{B} \Leftrightarrow |Df(z)|(1-|z|^2) < \infty$. В [8] установлена следующая характеризация пространства Блоха.

Лемма 1.2. *Пусть f — голоморфная на B функция. Тогда для любых $0 < \alpha < \infty$ и $0 < p < \infty$ эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $f \in \mathscr{B}(B)$;

(2) $\sup\limits_{z\in B} (1-|z|^2)^\alpha |D^\alpha f(z)| < \infty$;

(3) $\sup\limits_{a\in B} \int_B |D^\alpha f(z)|^p (1-|z|^2)^{p\alpha} J_R \varphi_a(z)\, d\nu(z) < \infty$.

Лемма 1.3. *Пусть f — голоморфная на B функция. Тогда для любых $0 < \alpha < \infty$ и $0 < p < \infty$ эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $f \in \mathscr{B}_0(B)$;

(2) $\lim\limits_{|z|\to 1} (1-|z|^2)^\alpha |D^\alpha f(z)| = 0$;

(3) $\lim\limits_{|a|\to 1} \int_B |D^\alpha f(z)|^p (1-|z|^2)^{p\alpha} J_R \varphi_a(z)\, d\nu(z) = 0$.

Есть обширная литература, посвященная аналитическим характеризациям пространств типа Блоха $\mathscr{B}^\alpha$ и $\mathscr{B}_0^\alpha$ в терминах инвариантных градиентов и радиальных производных, см. [9, 10] и ссылки там. В [4] получены интегральные характеризации и характеризации с использованием мер типа Карлесона пространств типа Блоха $\mathscr{B}^\alpha$ и $\mathscr{B}_0^\alpha$ в терминах дробных производных. В данной работе продолжено изучение функций типа Блоха в терминах дробных производных и мер типа Карлесона. Получены обобщения результатов из [4] и [8].

Всюду далее C — положительные постоянные, возможно, различные в зависимости от ситуации. Выражение $A \approx B$ означает, что существует положительная постоянная C такая, что $C^{-1}B \le A \le CB$.

2. Характеризация пространства α-функций Блоха $\mathscr{B}^\alpha$

Лемма 2.1 [4]. *Пусть $f(z) \in H(B)$, $m \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$. Тогда*

$$f \in \mathscr{B}^\alpha(B) \Leftrightarrow \sup_{z\in B} (1-|z|^2)^{\alpha+m+1} |D^m f(z)| < \infty.$$

Используя лемму 2.1 и методы из [9], можно получить интегральные и с использованием меры типа Карлесона характеризации α-функций Блоха в терминах дробных производных.

Теорема 2.2. *Предположим, что $0 < \alpha < \infty$, $0 < r < 1$, $0 < p < \infty$, $1 < s < \frac{n}{n-1}$, $\frac{n}{n+1} < \beta < \infty$, $1 < q < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $d\nu_\beta(z) = (1-|z|^2)^{-(n+1)(1-\beta)}\, d\nu(z)$ и $f(z) \in H(B)$. Тогда равносильны следующие утверждения:*

(1) $f \in \mathscr{B}^\alpha(B)$;

(2) $\sup\limits_{a\in B} \frac{1}{\nu(E(a,r))} \int\limits_{E(a,r)} |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)}\, d\nu(z) < \infty$;

(3) $\sup\limits_{a\in B} \int\limits_{E(a,r)} |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)-n-1}\, d\nu(z) < \infty$;

(4) $\sup\limits_{a\in B} \int\limits_B |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} (1-|\varphi_a(z)|^2)^{nq}\, d\lambda(z) < \infty$;

(5) $\sup\limits_{a\in B} \int\limits_B |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} G^s(z,a)\, d\lambda(z) < \infty$;

(6) $\sup\limits_{a\in B} \int\limits_B |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} (J_R\varphi_a(z))^\beta\, d\nu_\beta(z) < \infty$.

Доказательство. (2)⇒(1) Фиксируем $0 < r < 1$. Тогда ввиду субгармоничности $|D^m f|^p$ имеем

$$|D^m f(a)|^p \le \frac{1}{r^{2n}} \int\limits_{B_r} |(D^m f)\circ \varphi_a(z)|^p\, d\nu(z).$$

Замена переменных $w = \varphi_a(z)$ дает неравенство

$$|D^m f(a)|^p \le \frac{1}{r^{2n}} \int\limits_{E(a,r)} |D^m f|^p J_R\varphi_a(w)\, d\nu(w),$$

где $E(a,r) = \varphi_a(B_r)$. Для $w \in E(a,r)$ имеем

$$\frac{1-r}{1+r}(1-|a|^2) \le 1-|w|^2 \le \frac{1+r}{1-r}(1-|a|^2)$$

и $\nu(E(a,r)) \approx (1-|a|^2)^{n+1} \approx (1-|w|^2)^{n+1}$, как показано в [1]. Таким образом,

$$\begin{aligned}
&(1-|a|^2)^{p(\alpha+m+1)}|D^m f(a)|^p \\
&\quad\le \frac{1}{r^{2n}} \int\limits_{E(a,r)} |D^m f(w)|^p J_R\varphi_a(w)(1-|a|^2)^{p(\alpha+m+1)}\, d\nu(w) \\
&\quad\le \frac{C}{(1-|a|^2)^{n+1}} \int\limits_{E(a,r)} |D^m f(w)|^p (1-|w|^2)^{p(\alpha+m+1)}\, d\nu(w) \\
&\quad\le \frac{C}{\nu(E(a,r))} \int\limits_{E(a,r)} |D^m f(w)|^p (1-|w|^2)^{p(\alpha+m+1)}\, d\nu(w).
\end{aligned}$$

К требуемому результату легко прийти, взяв $\sup\limits_{a\in B}$ в обеих частях последнего соотношения и использовав лемму 2.1.

(1)⇒(4) По лемме 2.1, используя свойства бета-функции и мёбиусову инвариантность $d\lambda(z)$, получаем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_B |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} (1-|\varphi_a(z)|^2)^{nq}\, d\lambda(z) \\
&\quad\le \sup_{z\in B} |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} \int\limits_B (1-|\varphi_a(z)|^2)^{nq}\, d\lambda(z) \\
&\quad\le C \int\limits_B (1-|\varphi_a(z)|^2)^{nq}\, d\lambda(z) \le CB(n, n(q-1)) < \infty.
\end{aligned}$$

(4)⇒(2) Так как $1-|\varphi_a(w)|^2 > 1-r^2$ для $w \in E(a,r)$, имеем

$$\frac{1}{\nu(E(a,r))} \int\limits_{E(a,r)} |D^m f(w)|^p (1-|w|^2)^{p(\alpha+m+1)}\, d\nu(w)$$

$$\leq \frac{1}{\nu(E(a,r))(1-r^2)^{nq}} \int\limits_{E(a,r)} |D^m f(w)|^p (1-|w|^2)^{p(\alpha+m+1)} (1-|\varphi_a(w)|^2)^{nq}\, d\nu(w)$$

$$\leq C \int\limits_{E(a,r)} |D^m f(w)|^p (1-|w|^2)^{p(\alpha+m+1)} (1-|\varphi_a(w)|^2)^{nq}\, d\lambda(w)$$

$$\leq C \int\limits_{B} |D^m f(w)|^p (1-|w|^2)^{p(\alpha+m+1)} (1-|\varphi_a(w)|^2)^{nq}\, d\lambda(w).$$

(2)⇔(3) Для $r \in (0,1)$ будет

$$\nu(E(a,r)) \approx (1-|a|^2)^{n+1} \approx (1-|w|^2)^{n+1}$$

при $z \in E(a,r)$, что и приводит к результату.

(1)⇒(5) Для $s \in (1, \frac{n}{n-1})$ по лемме 2.1 и лемме 1 из [3] с помощью свойств бета-функции и мёбиусовой инвариантности $d\lambda(z)$ получаем

$$\int\limits_{B} |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} G^s(z,a)\, d\lambda(z)$$

$$\leq \sup_{z\in B} |R^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} \int\limits_{B} G^s(z,a)\, d\lambda(z)$$

$$\leq C \int\limits_{B} G^s(z,a)\, d\lambda(z) \leq C \int\limits_{B} \frac{(1-|z|^2)^{ns-n-1}}{|z|^{2(n-1)s}}\, dv(z) < \infty.$$

(5) ⇒(1) Для $s \in (1, \frac{n}{n-1})$ в [2] показано, что $G^s(z,a) \geq (1-|\varphi_a(z)|^2)^{ns}$, откуда вытекает, что (5)⇒(4). Требуемый результат получается с учетом того, что (4)⇒(2) и (2)⇒(1).

(6)⇔(4) Положив $q = \frac{n+1}{n}\beta$, имеем

$$\int\limits_{B} |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} (J_R\varphi_a(z))^\beta\, d\nu_\beta(z)$$

$$= \int\limits_{B} |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} (J_R\varphi_a(z))^\beta (1-|z|^2)^{-(n+1)(1-\beta)}\, d\nu(z)$$

$$= \int\limits_{B} |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} (J_R\varphi_a(z)(1-|z|^2)^{n+1})^\beta (1-|z|^2)^{-(n+1)}\, d\nu(z)$$

$$= \int\limits_{B} |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} (1-|\varphi_a(z)|^2)^{nq}\, d\lambda(z),$$

так что (6) и (4) эквивалентны.

Следствие 2.3. *Пусть* $0 < \alpha < \infty$, $0 < p < \infty$, $\frac{n}{n+1} < \beta < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $d\nu_\beta(z) = (1-|z|^2)^{-(n+1)(1-\beta)} d\nu(z)$. *Тогда* $f \in \mathscr{B}^\alpha$ *в том и только в том случае, если* $|D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} dv_\beta(z)$ — β-*мера Карлесона.*

3. Характеризация пространства $\mathscr{B}^{\mathbf{0}}$ малых $\boldsymbol{\alpha}$-функций Блоха

Лемма 3.1 [4]. *Для $f(z) \in H(B)$, $m \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$ имеет место соотношение*

$$f \in \mathscr{B}_0^\alpha(B) \Leftrightarrow \lim_{|z|\to 1^-}(1-|z|^2)^{\alpha+m+1}|D^m f(z)| = 0.$$

Теорема 3.2. *Предположим, что $0 < \alpha < \infty$, $0 < r < 1$, $0 < p < \infty$, $1 < s < \frac{n}{n-1}$, $\frac{n}{n+1} < \beta < \infty$, $1 < q < \infty$, $m \in \mathbb{N}$, $d\nu_\beta(z) = (1-|z|^2)^{-(n+1)(1-\beta)}\,d\nu(z)$ и $f(z) \in H(B)$. Тогда равносильны следующие утверждения:*

(1) $f \in \mathscr{B}_0^\alpha(B)$;

(2) $\lim\limits_{|a|\to 1} \frac{1}{\nu(E(a,r))} \int\limits_{E(a,r)} |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)}\,d\nu(z) = 0$;

(3) $\lim\limits_{|a|\to 1} \int\limits_{E(a,r)} |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)-n-1}\,d\nu(z) = 0$;

(4) $\lim\limits_{|a|\to 1} \int\limits_B |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)}(1-|\varphi_a(z)|^2)^{nq}\,d\lambda(z) = 0$;

(5) $\lim\limits_{|a|\to 1} \int\limits_B |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} G^s(z,a)\,d\lambda(z) = 0$;

(6) $\lim\limits_{|a|\to 1} \int\limits_B |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} (J_R\varphi_a(z))^\beta\,d\nu_\beta(z) = 0$.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 2.2, имеем

$$\begin{aligned}
&|D^m f(a)|^p(1-|a|^2)^{p(\alpha+m-1)} \\
&\qquad\le \frac{C}{\nu(E(a,r))}\int\limits_{E(a,r)} |D^m f(z)|^p(1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)}\,d\nu(z) \\
&\qquad\qquad \le C\int\limits_B |D^m f(z)|^p(1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)}(1-|\varphi_\alpha(z)|^2)^{nq}\,d\lambda(z).
\end{aligned}$$

Предельным переходом в предыдущем неравенстве при $|a| \to 1$ можно получить, что (4)$\Rightarrow$(2)$\Rightarrow$(1).

(1)$\Rightarrow$(4) Пусть $f \in \mathscr{B}_0^\alpha$. По лемме 3.1 для данного $\varepsilon > 0$ существует $r_0 \in (0,1)$ такое, что

$$|D^m f(z)|^p(1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} < \varepsilon,$$

когда $z \in B \setminus B_{r_0}$. Рассмотрим

$$\begin{aligned}
&\int\limits_B |D^m f(z)|^p(1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)}(1-|\varphi_a(z)|^2)^{nq}\,d\lambda(z) \\
&= \Bigg(\int\limits_{B_{r_0}} + \int\limits_{B\setminus B_{r_0}}\Bigg)|D^m f(z)|^p(1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)}(1-|\varphi_a(z)|^2)^{nq}\,d\lambda(z) = I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Оценим первый интеграл:

$$\begin{aligned}
I_1 &\le \sup_{z\in B}|D^m f(z)|^p(1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)}\int\limits_{B_{r_0}}(1-|\varphi_a(z)|^2)^{nq}\,d\lambda(z) \\
&\qquad\qquad \le C\int\limits_{E(a,r_0)}(1-|z|^2)^{nq-n-1}\,d\nu(z).
\end{aligned}$$

Поскольку $1-|z|^2 \approx 1-|a|^2$ и $\nu(E(a,r_0)) \approx (1-|a|^2)^{n+1}$ на $E(a,r_0)$, имеем $I_1 \le C(1-|a|^2)^{nq}$. Для второго интеграла будет

$$I_2 \le \varepsilon \int\limits_{B\setminus B_{r_0}} (1-|\varphi_a(z)|^2)^{nq} d\lambda(z) \le \varepsilon \int\limits_B (1-|z|^2)^{nq-n-1} d\nu(z) \le C\varepsilon$$

равномерно по a из B.

Комбинируя полученные оценки, для данного ε найдем $r_1 \in (0,1)$ такое, что $(1-|a|^2)^{nq} < \varepsilon$ при $a \in B \setminus B_{r_1}$. Тогда

$$\lim_{|a|\to 1} \int\limits_B |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} (1-|\varphi_a(z)|^2)^{nq}\, d\lambda(z) = \lim_{|a|\to 1} (I_1+I_2) = 0.$$

(2)⇔(3) Для $r \in (0,1)$ будет

$$\nu(E(a,r)) \approx (1-|a|^2)^{n+1} \approx (1-|w|^2)^{n+1}$$

при $z \in E(a,r)$, откуда вытекает требуемое.

(5)⇒(1) Пусть s, $1 < s < \frac{n}{n-1}$, фиксировано. Так как $G^s(z,a) \ge (1-|\varphi_a(z)|^2)^{ns}$, имеем

$$\lim_{|a|\to 1} \int\limits_B |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} (1-|\varphi_a(z)|^2)^{ns}\, d\lambda(z)$$
$$\le \lim_{|a|\to 1} \int\limits_B |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} G^s(z,a)\, d\lambda(z) = 0.$$

Это означает, что (5)⇒(4). Мы показали, что (4)⇒(1), так что (5)⇒(1).

(1)⇒(5) Предположим, что $f \in \mathscr{B}_0^\alpha \subset \mathscr{B}^\alpha$. Тогда по леммам 2.1 и 3.1 получим

$$\lim_{|a|\to 1} |D^m f(z)|(1-|z|^2)^{(\alpha+m-1)} = 0$$

и

$$\sup_{z\in B} |D^m f(z)|(1-|z|^2)^{(\alpha+m-1)} < \infty.$$

Для данного $\varepsilon > 0$ существует $r_0 \in (0,1)$ такое, что

$$(1-r^2)^{\frac{ns-n}{2}} r^{2n-1-2(n-1)s} < \varepsilon$$

при $r \in (r_0,1)$, поскольку $\frac{ns-n}{2} > 0$ для $1 < \varepsilon < \frac{n}{n-1}$. Рассмотрим

$$\int\limits_B |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} G^s(z,a)\, d\lambda(z)$$
$$= \int\limits_B |D^m f(\varphi_a(z))|^p (1-|\varphi_a(z)|^2)^{p(\alpha+m-1)} g^s(z)\, d\lambda(z)$$
$$= \Bigg(\int\limits_{B\setminus B_{r_0}} + \int\limits_{B_{r_0}} \Bigg) |D^m f(\varphi_a(z))|^p (1-|\varphi_a(z)|^2)^{p(\alpha+m-1)} g^s(z)\, d\lambda(z) = I_1 + I_2.$$

Имеем

$$I_1 \le \sup_{z\in B} |D^m f(\varphi_a(z))|^p (1-|\varphi_a(z)|^2)^{p(\alpha+m-1)} \int\limits_{B\setminus B_{r_0}} g^s(z)\,d\lambda(z)$$

$$\le C \int\limits_{B\setminus B_{r_0}} \frac{(1-|z|^2)^{ns-n-1}}{|z|^{2(n-1)s}}\,d\nu(z) \le C\varepsilon \int\limits_{r_0}^{1} (1-r^2)^{\frac{ns-n-2}{2}}\,dr \le C\varepsilon.$$

Для $z\in B_{r_0}$

$$1-|\varphi_a(z)|^2 = \frac{(1-|a|^2)(1-|z|^2)}{|1-\langle z,a\rangle|^2} \le \frac{1-|a|^2}{1-r_0^2}.$$

Отсюда $|\varphi_a(z)|$ сходится равномерно к 1 при $|a|\to 1$. Тем самым для данного ε найдется $r_1\in(0,1)$ такое, что для $a\in B\setminus B_{r_1}$

$$|D^m f(\varphi_a(z))|^p(1-|\varphi_a(z)|^2)^{p(\alpha+m-1)} < \varepsilon$$

равномерно относительно $z\in B_{r_0}$. Имеем $2n-1-2(n-1)s > -1$ при $1<s<\frac{n}{n-1}$, кроме того,

$$(1-|z|^2)^{ns-n-1} \le \max\bigl\{1, \bigl(1-r_0^2\bigr)^{ns-n-1}\bigr\} < \infty$$

для $z\in B_{r_0}$, откуда для $a\in B\setminus B_{r_1}$ выводим, что

$$I_2 \le \varepsilon \int\limits_{B_{r_0}} g^s(z)\,d\lambda(z) \le C\varepsilon \int\limits_{B_{r_0}} \frac{(1-|z|^2)^{ns-n-1}}{|z|^{2(n-1)s}}\,d\nu(z)$$

$$\le C\varepsilon \int\limits_{B_{r_0}} \frac{1}{|z|^{2(n-1)s}}\,dv(z) \le C\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\int\limits_B |D^m f(z)|^p (1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)} G^s(z,a)\,d\lambda(z) = I_1 + I_2 \le C\varepsilon$$

для $a\in B\setminus B_{r_1}$. Это и означает, что (1)⇒(5).

(6)⇔(4) Пусть $q=\frac{n+1}{n}\beta$. Требуемая равносильность обосновывается, как в доказательстве теоремы 2.2. Доказательство теоремы 3.2 закончено.

Следствие 3.3. *Пусть* $0<\alpha<\infty$, $0<p<\infty$, $\frac{n}{n+1}<\beta<\infty$, $m\in\mathbb{N}$, $d\nu_\beta(z)=(1-|z|^2)^{-(n+1)(1-\beta)}\,d\nu(z)$. *Тогда* $f\in B_0^\alpha$ *в том и только в том случае, если* $|D^m f(z)|^p(1-|z|^2)^{p(\alpha+m-1)}dv_\beta(z)$ — *нулевая* β*-мера Карлесона.*

Автор признателен рецензенту за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rudin W.* Function theory in the unit ball of $\mathbb{C}^n$. New York: Springer-Verl., 1980.
2. *Ouyang C. H., Yang W. S., Zhao R. H.* Möbius invariant Q_p spaces associated with the Green's function on the unit ball of $\mathbb{C}^n$ // Pacific J. Math. 1998. V. 182. P. 69–99.
3. *Ouyang C. H., Yang W. S., Zhao R. H.* Characterizations of Bergman spaces and Bloch spaces in the unit ball of $\mathbb{C}^n$ // Trans. Amer. Math. Soc. 1995. V. 347. P. 4301–4313.
4. *Xu H. M.* A class of characterizations of α-Bloch functions in the unit ball // Adv. in Math. (Chinese edition). 2003. V. 32, N 5. P. 580–584.

5. *Ouyang C. H.* α-Carleson measure and Bloch functions on bounded symmetric domains of $\mathbb{C}^n$ // Acta Math. Sci. 1995. V. 15. P. 385–393.
6. *Yang W. S.* Vanishing Carleson type measure characterizations of $Q_{p,0}$ // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1999. V. 21. P. 1–5.
7. *Timoney R. M.* Bloch functions in several complex variables // Bull. London Math. Soc. 1980. V. 12. P. 241–267.
8. *Boo R. C., Kyung S. R.* Fractional derivatives of Bloch functions, growth rate, and interpolation // Acta Math. Hungar. 1996. V. 72, N 1–2. P. 67–86.
9. *Li Bo, Ouyang C. H.* Higher radial derivative of Bloch type functions // Acta Math. Sci. 2002. V. 22, N B:4. P. 433–445.
10. *Zhuo W. X., Yang W. S.* Integral criteria of Bloch type functions on radial derivative // Acta Math. Sci. (Chinese edition). 1998. V. 18. P. 451–458.

Статья поступила 1 мая 2004 г.

Li Songxiao (Ли Сунсяо)
Department of Mathematics, JiaYing University,
514015, GuangDong, China
lsx@mail.zjxu.edu.cn