Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2005. Том 46, № 2

УДК 512.558

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПЕРВИЧНЫХ ПОЧТИ–КОЛЕЦ С (σ, τ)–ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕМ

О. Гёлбаши

Аннотация: Обобщаются некоторые результаты Белла и Мейсона, относящиеся к коммутативности на почти-кольцах. Пусть N — первичное правое почти-кольцо с мультипликативным центром Z, D — (σ,τ)-дифференцирование на N такое, что $\sigma D = D\sigma$, $\tau D = D\tau$. Доказаны следующие результаты. (i) Если $D(N) \subset Z$ или $[D(N), D(N)] = 0$, или $[D(N), D(N)]_{\sigma,\tau} = 0$, то $(N, +)$ абелево. (ii) Если $D(xy) = D(x)D(y)$ или $D(xy) = D(y)D(x)$ для любых $x, y \in N$, то $D = 0$.

Ключевые слова: первичное почти-кольцо, дифференцирование, $(\sigma,\ \tau)$-дифференцирование.

1. Введение

Недавние результаты по теории колец, связанные с коммутативностью первичных колец с дифференцированием, обобщались по разным направлениям. Естественно провести подобные обобщения для почти-колец. Белл и Мейсон доказали, что если D — дифференцирование на левом почти-кольце N таком, что $D(N) \subset Z$ или $[D(x), D(y)] = 0$ для любых x, y в N, то $(N, +)$ абелево [1]. Нашей целью в настоящей работе является распространение указанных результатов на случай, если дифференцирование заменено (σ,τ)-дифференцированием.

В [2] доказано, что если d — дифференцирование в полупервичном кольце R, которое является эндоморфизмом или антиэндоморфизмом, то $d = 0$. В [3] эти результаты обобщены на случай полупервичного почти-кольца. Другой нашей целью является обобщение указанного утверждения на первичные почти-кольца с (σ,τ)-дифференцированием в N.

Всюду в данной работе символом N будем обозначать нуль-симметричное почти-кольцо с мультипликативным центром Z. Напомним, что почти-кольцо N является 3-первичным, если из $aNb = \{0\}$ вытекает, что $a = 0$ или $b = 0$. Пусть σ, τ — два почти кольцевых автоморфизма N. Аддитивное отображение $D : N \to N$ называют (σ,τ)-*дифференцированием*, если $D(xy) = \tau(x)D(y) + D(x)\sigma(y)$ для любых $x, y \in N$. Для $x, y \in N$ через $[x, y]$ будем обозначать $xy - yx$, символ (x, y) означает коммутатор аддитивной группы $x + y - x - y$. Для $x, y \in N$ будем писать $[x, y]_{\sigma,\tau} = x\sigma(y) - \tau(y)x$; в частности, $[x, y]_{1,1} = [x, y]$ в обычном смысле. В работе без упоминания используется терминология из [4].

2. Результаты

Начнем с двух довольно общих и полезных лемм.

Лемма 1. *Пусть D — (σ,τ)-дифференцирование почти-кольца N. Тогда $D(xy) = D(x)\sigma(y) + \tau(x)D(y)$ для любых $x, y \in N$.*

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} D((x+x)y) &= \tau(x+x)D(y) + D(x+x)\sigma(y) \\ &= \tau(x)D(y) + \tau(x)D(y) + D(x)\sigma(y) + D(x)\sigma(y) \end{aligned}$$

и

$$D(xy + xy) = \tau(x)D(y) + D(x)\sigma(y) + \tau(x)D(y) + D(x)\sigma(y).$$

Сравнение этих двух соотношений приводит к равенству

$$\tau(x)D(y) + D(x)\sigma(y) = D(x)\sigma(y) + \tau(x)D(y),$$

откуда

$$D(xy) = D(x)\sigma(y) + \tau(x)D(y) \quad \text{для всех } x, y \in N. \quad \square$$

Лемма 2. *Пусть D — (σ,τ)-дифференцирование на почти-кольце N и $a \in N$. Тогда для любых $x, y \in N$*

$$\tau(a)(\tau(x)D(y) + D(x)\sigma(y)) = \tau(a)\tau(x)D(y) + \tau(a)D(x)\sigma(y).$$

Доказательство. Для любых $x, y \in N$ имеем

$$D(a(xy)) = \tau(a)D(xy) + D(a)\sigma(xy) = \tau(a)(\tau(x)D(y) + D(x)\sigma(y)) + D(a)\sigma(x)\sigma(y).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} D((ax)y) &= \tau(ax)D(y) + D(ax)\sigma(y) \\ &= \tau(a)\tau(x)D(y) + \tau(a)D(x)\sigma(y) + D(a)\sigma(x)\sigma(y). \end{aligned}$$

Из этих двух выражений для $D(axy)$ получаем, что для любых $x, y \in N$

$$\tau(a)(\tau(x)D(y) + D(x)\sigma(y)) = \tau(a)\tau(x)D(y) + \tau(a)D(x)\sigma(y). \qquad \square$$

Лемма 3. *Пусть D — ненулевое (σ,τ)-дифференцирование на почти-кольце N и $a \in N$.*

(i) *Если $D(N)a = 0$, то $a = 0$.*

(ii) *Если $\tau(a)D(N) = 0$, то $a = 0$.*

Доказательство. (i) Для $x, y \in N$ имеем

$$0 = D(xy)a = \tau(x)D(y)a + D(x)\sigma(y)a.$$

Из предположений и того, что σ — автоморфизм N, получаем

$$D(x)Na = 0 \quad \text{для всех } x \in N.$$

Так как N — первичное почти-кольцо с ненулевым (σ,τ)-дифференцированием в D, приходим к равенству $a = 0$.

(ii) Аналогичные п. (i) рассуждения можно использовать и в том случае, если $\tau(a)D(N) = 0 \quad \square$.

Лемма 4. *Пусть N — свободное почти-кольцо без 2-кручения и D — (σ,τ)-дифференцирование, на котором коммутируют σ и τ. Если $D^2 = 0$, то $D = 0$.*

Доказательство. Для любых $x, y \in N$ имеем

$$0 = D^2(xy) = D(D(xy)) = D(\tau(x)D(y) + D(x)\sigma(y))$$
$$= \tau^2(x)D^2(y) + D(\tau(x))\sigma(D(y)) + \tau(D(x))D(\sigma(y)) + D^2(x)\sigma^2(y).$$

Согласно предположениям

$$2D(\tau(x))D(\sigma(y)) = 0 \quad \text{для любых } x, y \in N.$$

Так как N — свободное почти-кольцо без 2-кручения и σ — автоморфизм на N, имеем

$$\tau(D(x))D(N) = 0 \quad \text{для всех } x \in N.$$

Отсюда $D = 0$ по лемме 3(ii) $\square$.

Теорема 1. *Пусть D — ненулевое (σ,τ)-дифференцирование на N. Предположим, что $D(u) \in N$ не является правым делителем нуля. Если $[D(u), u]_{\sigma,\tau} = 0$, то $(x, u) = 0$ для всех $x \in N$.*

Доказательство. Поскольку $(u + x)u = u^2 + xu$, имеем $D((u + x)u) = D(u^2 + xu)$. Раскрывая это уравнение, получим

$$\tau(u + x)D(u) + D(u + x)\sigma(u) = D(u^2) + D(xu)$$

и тем самым

$$\tau(u)D(u) + \tau(x)D(u) + D(u)\sigma(u) + D(x)\sigma(u)$$
$$= \tau(u)D(u) + D(u)\sigma(u) + \tau(x)D(u) + D(x)\sigma(u),$$

откуда

$$\tau(x)D(u) + D(u)\sigma(u) = D(u)\sigma(u) + \tau(x)D(u).$$

Используя в последнем равенстве предположения теоремы, заключаем, что

$$\tau(x)D(u) + \tau(u)D(u) - \tau(x)D(u) - \tau(u)D(u) = 0.$$

Поэтому

$$\tau(x, u)D(u) = 0 \quad \text{для всех } x \in N.$$

Так как $D(u)$ не является правым делителем нуля, $(x, u) = 0$ для всех $x \in N$ $\square$.

Теорема 2. *Пусть N — первичное почти-кольцо с нетривиальным (σ,τ)-дифференцированием D таким, что $\sigma D = D\sigma$, $\tau D = D\tau$. Если $D(N) \subset Z$, то $(N, +)$ абелево. Кроме того, если N свободное и без 2-кручения, то N — коммутативное кольцо.*

Доказательство. Пусть $a \in N$ таково, что $D(a) \neq 0$. Тогда $D(a) \in Z\backslash\{0\}$ и $D(a) + D(a) \in Z\backslash\{0\}$. Для любых $x, y \in N$ имеем

$$(D(a) + D(a))(x + y) = (x + y)(D(a) + D(a)),$$

так что

$$D(a)x + D(a)x + D(a)y + D(a)y = xD(a) + yD(a) + xD(a) + yD(a).$$

Поскольку $D(a) \in Z$, получаем

$$xD(a) + yD(a) = yD(a) + xD(a),$$

откуда
$$(x,y)D(a)=0 \quad \text{для любых } x,y\in N.$$
Так как $D(a)\in Z\backslash\{0\}$ и N — первичное почти-кольцо, то $(x,y)=0$ для любых $x,y\in N$. Итак, $(N,+)$ абелево.

Ввиду предположений теоремы для любых $a,b,c\in N$ будет
$$\tau(c)D(ab)=D(ab)\tau(c).$$
По леммам 1 и 2
$$\tau(c)\tau(a)D(b)+\tau(c)D(a)\sigma(b)=\tau(a)D(b)\tau(c)+D(a)\sigma(b)\tau(c).$$
Из последних дух равенств, используя включение $D(N)\subset Z$ и тот факт, что $(N,+)$ абелево, получим
$$\tau(c)\tau(a)D(b)+\tau(c)\sigma(b)D(a)=\tau(a)\tau(c)D(b)+\sigma(b)\tau(c)D(a),$$
откуда
$$\tau([c,a])D(b)=[\sigma(b),\tau(c)]D(a) \quad \text{для всех } a,b,c\in N.$$
Предположим теперь, что N не коммутативно. Выбирая $b,c\in N$ так, что $[\sigma(b),\tau(c)]\neq 0$, и заменяя a на $D(a)\in Z$, получаем
$$[\sigma(b),\tau(c)]D^2(a)=0 \quad \text{для любых } a,b,c\in N.$$
Поскольку центральный элемент $D^2(a)$ не может быть ненулевым делителем нуля, выводим, что $D(a)=0$ для любого $a\in N$. По лемме 4 такое невозможно для нетривиального D. $\square$

Теорема 3. *Пусть N — первичное почти-кольцо, допускающее нетривиальное (σ,τ)-дифференцирование D такое, что $\sigma D=D\sigma$, $\tau D=D\tau$. Если $[D(N),D(N)]=0$, то $(N,+)$ абелево. Более того, если N не имеет 2-кручения, то N — коммутативное кольцо.*

Доказательство. Рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 2, показывают, что если z и $z+z$ поэлементно коммутируют с $D(N)$, то
$$D(x,y)z=0 \quad \text{для любых } x,y\in N. \tag{2.1}$$
Подставляя $D(t)$, $t\in N$, вместо z в (2.1), приходим к равенству $D(x,y)D(t)=0$. Так как τ — автоморфизм N, имеем $\tau(D(x,y))\tau(D(t))=0$. Используя равенство $\tau D=D\tau$, получаем
$$\tau(D(x,y))D(\tau(t))=0 \quad \text{для любых } x,y,t\in N. \tag{2.2}$$
По лемме 3(ii) $D(x,y)=0$ для всех $x,y\in N$. Для любого $w\in N$ имеем $D(xw,yw)=0$, откуда с учетом (2.2) вытекает, что $D((x,y)w)=0$. Тем самым
$$\tau((x,y))D(w)=0 \quad \text{для всех } x,y,w\in N.$$
Вновь применяя лемму 3(ii), получаем $(x,y)=0$ для всех $x,y\in N$.

Предположим теперь, что N не имеет 2-кручения. По частичному дистрибутивному закону для любых $x,y,z\in N$
$$D(\tau(z))D(D(x)y)=D(D(x)y)D(\tau(z)).$$
Следовательно,
$$D(\tau(z))(\tau(D(x))D(y)+D^2(x)\sigma(y))=\tau(D(x))D(y)D(\tau(z))+D^2(x)\sigma(y)D(\tau(z)).$$

Согласно лемме 2

$$D(\tau(z))\tau(D(x))D(y) + D(\tau(z))D^2(x)\sigma(y) = \tau(D(x))D(y)D(\tau(z)) + D^2(x)\sigma(y)D(\tau(z)),$$

откуда, используя равенства $D(\tau(z))D(\tau(x)) = D(\tau(x))$, $D(\tau(z))$ и $\tau D = D\tau$, выводим, что

$$D(\tau(z))D(\tau(x))D(y) + D(\tau(z))D^2(x)\sigma(y) = D(\tau(z))D(\tau(x))D(y) + D^2(x)\sigma(y)D(\tau(z)).$$

Поскольку $(N,+)$ абелево, получаем

$$D(\tau(z))[D(\tau(x)), D(y)] = [\sigma(y), D(\tau(z))]D^2(x) \quad \text{для всех } x, y, z \in N$$

Левая часть этого уравнения нулевая по предположению, поэтому

$$D(\tau(z))\sigma(y)D^2(x) = \sigma(y)D(\tau(z))D^2(x) \quad \text{для всех } x, y, z \in N. \tag{2.3}$$

Заменяя y на yt, $t \in N$, в (2.3) и используя (2.3), получаем

$$D(\tau(z))\sigma(y)\sigma(t)D^2(x) = \sigma(y)\sigma(t)D(\tau(z))D^2(x) = \sigma(y)D(\tau(z))\sigma(t)D^2(x)$$

и тем самым

$$[D(\tau(z)), \sigma(y)]ND^2(x) = 0 \quad \text{для всех } x, y, z \in N.$$

Так как N — первичное почти-кольцо, отсюда вытекает, что

$$D^2(N) = 0 \quad \text{или} \quad D(N) \subset Z.$$

Если $D^2(N) = 0$, то это противоречит тому, что D — ненулевое (σ,τ)-дифференцирование на N по лемме 4. Значит, должно быть $D(N) \subset Z$. Отсюда N — коммутативное кольцо по теореме 2 $\square$.

Теорема 4. *Пусть D — ненулевое (σ,τ)-дифференцирование на первичном почти-кольце N и $a \in N$. Если $[D(N), a]_{\sigma,\tau} = 0$, то $D(a) = 0$ или $a \in Z$.*

Доказательство. Согласно предположениям для любых $x \in N$

$$D(xa)\sigma(a) = \tau(a)D(xa),$$

откуда

$$(\tau(x)D(a) + D(x)\sigma(a))\sigma(a) = \tau(a)(\tau(x)D(a) + D(x)\sigma(a)).$$

Так как N удовлетворяет частичной дистрибутивности из леммы 2, имеем

$$\tau(x)D(a)\sigma(a) + D(x)\sigma(a)\sigma(a) = \tau(a)\tau(x)D(a) + \tau(a)D(x)\sigma(a).$$

Используя условия теоремы, получаем

$$\tau(x)D(a)\sigma(a) + D(x)\sigma(a)\sigma(a) = \tau(a)\tau(x)D(a) + D(x)\sigma(a)\sigma(a),$$

откуда

$$\tau(a)\tau(x)D(a) = \tau(x)D(a)\sigma(a) \quad \text{для всех } x \in N. \tag{2.4}$$

Подставляя $xy, y \in N$ вместо x и используя (2.4), получаем

$$\tau(a)\tau(x)\tau(y)D(a) = \tau(x)\tau(y)D(a)\sigma(a) = \tau(x)D(a)\tau(y)D(a).$$

Установленное соотношение может быть записано в виде

$$\tau([a,x])\tau(y)D(a) = 0 \quad \text{для любых } x, y \in N.$$

Так как τ — автоморфизм первичного почти-кольца в N, то $D(a) = 0$ или $a \in Z$. Это завершает доказательство. $\square$

Теорема 5. *Пусть D — ненулевое (σ,τ)-дифференцирование первичного почти-кольца N такое, что $\sigma D = D\sigma$, $\tau D = D\tau$. Если $[D(N), D(N)]_{\sigma,\tau} = 0$, то $(N,+)$ абелево. Кроме того, если N не имеет 2-кручения, то N — коммутативное кольцо.*

Доказательство. По теореме 4 имеем $D^2(y) = 0$ или $D(y) \in Z$ для любого $y \in N$. Положим $K = \{y \in N \mid D^2(y) = 0\}$ и $L = \{y \in N \mid D(y) \in Z\}$. Как K, так и L — аддитивные подгруппы в N. Более того, N — теоретико-множественное объединение K и L. Но группа не может быть теоретико-множественным объединением двух собственных подгрупп. Отсюда $K = N$ или $L = N$. Если $K = N$, то $D^2(N) = 0$. Это противоречит тому, что D — ненулевое (σ,τ)-дифференцирование на N по лемме 4. Если $L = N$, то $D(N) \subset Z$. Доказательство завершается ссылкой на теорему 2. $\square$

Теорема 6. *Пусть N — первичное почти-кольцо и D — ненулевое (σ,τ)-дифференцирование на первичном почти-кольце N такое, что $\sigma D = D\sigma$, $\tau D = D\tau$. Если D действует как гомоморфизм на N, то $D = 0$ на N.*

Доказательство. Пусть D действует как гомоморфизм на N. Тогда

$$D(xy) = \tau(x)D(y) + D(x)\sigma(y) = D(x)D(y) \quad \text{для любых } x, y \in N. \tag{2.5}$$

Взяв $\tau(y)x$ вместо x в (2.5), получим

$$\tau(\tau(y)x)D(y) + D(\tau(y)x)\sigma(y) = D(\tau(y)x)D(y) = D(\tau(y))D(x)D(y),$$
$$\tau^2(y)\tau(x)D(y) + \tau^2(y)D(x)\sigma(y) + D(\tau(y))\sigma(x)\sigma(y) = \tau(D(y))D(xy).$$

Отсюда по лемме 2

$$\tau^2(y)\tau(x)D(y) + \tau^2(y)D(x)\sigma(y) + D(\tau(y))\sigma(x)\sigma(y) = \tau(D(y))\tau(x)D(y) + \tau(D(y))D(x)\sigma(y).$$

Поскольку D — гомоморфизм на N, имеем

$$\begin{aligned}\tau^2(y)\tau(x)D(y) &+ \tau^2(y)D(x)\sigma(y) + D(\tau(y))\sigma(x)\sigma(y)\\ &= \tau(D(y))\tau(x)D(y) + D(\tau(y)x)\sigma(y)\\ &= \tau(D(y))\tau(x)D(y) + \tau^2(y)D(x)\sigma(y) + D(\tau(y))\sigma(x)\sigma(y)\end{aligned}$$

или, что равносильно,

$$(\tau^2(y) - \tau(D(y))\tau(x)D(y) = 0 \quad \text{для любых } x, y \in N.$$

Так как N — первичное почти-кольцо и τ — автоморфизм N, можно заключить, что

$$D(y) = 0 \text{ или } D(y) = \tau(y) \quad \text{для всех } y \in N.$$

Подмножества $A = \{y \in N : D(y) = 0\}$ и $B = \{y \in N : D(y) = \tau(y)\}$ являются аддитивными подгруппами в N, и ввиду предыдущих рассуждений их объединение равно N. Применяя прием Брауэра (Brauer's Trich), получаем, что либо $N = A$, либо $N = B$. Так как D — ненулевое (σ,τ)-дифференцирование на N, мы должны получить, что $N = B$, т. е. $D(y) = \tau(y)$ для любого $y \in N$. Записывая xy вместо x, имеем

$$D(xy) = \tau(xy) = \tau(x)\tau(y) = \tau(x)D(y),$$

так что

$$\tau(x)D(y) + D(x)\sigma(y) = \tau(x)D(y) \quad \text{для любых } x, y \in N.$$

По лемме 3(i) отсюда выводим, что $D = 0$ на N $\square$.

Теорема 7. *Пусть N — первичное почти-кольцо и D — ненулевое (σ,τ)-дифференцирование первичного почти-кольца N такое, что $\sigma D = D\sigma$, $\tau D = D\tau$. Если D действует как антигомоморфизм на N, то $D = 0$ на N.*

Доказательство. Пусть D действует как антигомоморфизм на N. Тогда

$$D(xy) = \tau(x)D(y) + D(x)\sigma(y) = D(y)D(x) \quad \text{для всех } x, y \in N. \tag{2.6}$$

Заменяя xy на x в (2.6), имеем

$$\tau(xy)D(y) + D(xy)\sigma(y) = D(y)D(xy),$$
$$\tau(xy)D(y) + D(y)D(x)\sigma(y) = D(y)D(xy).$$

Так как τ — автоморфизм N, получаем

$$\tau^2(xy)\tau(D(y)) + \tau(D(y))\tau(D(x))\tau(\sigma(y))$$
$$= \tau(D(y))\tau(D(xy)) = \tau(D(y))D(\tau(xy)).$$

По лемме 2 выводим, что

$$\tau^2(xy)\tau(D(y)) + \tau(D(y))\tau(D(x))\tau(\sigma(y))$$
$$= \tau(D(y))\tau^2(x)\tau(D(y)) + \tau(D(y))\tau(D(x))\sigma(\tau(y)).$$

Поскольку вторые члены в обеих частях равны, заключаем, что

$$\tau^2(xy)\tau(D(y)) = \tau(D(y))\tau^2(x)\tau(D(y)),$$

так что

$$\tau(x)\tau(y)D(y) = D(y)\tau(x)D(y) \quad \text{для любых } x, y \in N. \tag{2.7}$$

Подстановка xz, $z \in N$, вместо x в (2.7) приводит к равенству

$$\tau(x)\tau(z)\tau(y)D(y) = D(y)\tau(x)\tau(z)D(y).$$

Согласно (2.7)

$$[\tau(x), D(y)]\tau(z)D(y) = 0 \quad \text{для всех } x, y, z \in N.$$

Поскольку τ — автоморфизм первичного почти-кольца N, получаем, что

$$D(y) = 0 \text{ или } D(y) \in Z \quad \text{для любого } y \in N.$$

Если $D(y) = 0$, то $D(y) \in Z$. Тем самым мы можем взять $D(N) \subset Z$, а это приводит к тому, что D должно быть гомоморфизмом на N. Из теоремы 6 следует, что $D = 0$. Теорема 7 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bell H. E., Mason G.* On derivations in near-rings // Near-rings and Near-fields. Amsterdam: North-Holland, 1987. (Math. Stud.; 137).
2. *Bell H. E., Kappe L. C.* Rings in which derivations satisfy certain algebraic conditions // Acta Math. Hungar. 1989. V. 53, N 3–4. P. 339–346.
3. *Argaç N.* On prime and semiprime near-rings with derivations // Internat. J. Math. Sci. 1997. V. 20, N 4. P. 737–740.
4. *Pilz G.* Near-rings. Amsterdam: North-Holland, 1983.

Статья поступила 7 апреля 2003 г.

Öznur Gölbaşi
Cumhuriyet University, Faculty of Arts and Science,
Department of Mathematics, Sivas, Turkey
`http://www.cumhuriyet.edu.tr`, `ogolbasi@cumhuriyet.edu.tr`