Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2005. Том 46, № 2

УДК 517.53/57

ОДНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ N ШАРОВ

Р. М. Гарипов

Аннотация: Найдены все упругие системы с точечным спектром. Для неконсервативных систем, близких к упругим, получена асимптотика скоростей шаров для больших времен. Эта одномерная модель шаров была призвана прояснить проблемы кинетической теории газов и турбулентности, но сама оказалась трудной для изучения.

Ключевые слова: динамическая система, кристаллографическая группа, факторизация, точечный спектр, малая неконсервативность, средняя скорость, флуктуация.

1. Введение

Динамическая система упругих или неупругих шаров, движущихся так, что их центры все время остаются на отрезке прямой между стенками, впервые была доложена на семинаре Л. В. Овсянникова [1]. При наличии неупругих столкновений с потерей кинетической энергии вводится простейший механизм притока энергии извне: в свободном движении ускорение шаров пропорционально их скорости. В этом случае система не является консервативной. Консервативная модель в общем виде была дана в книге [2]. Несмотря на простоту формулировки, эта динамическая система оказалась трудной для изучения. В случае двух неупругих шаров получена априорная оценка и для некоторых значений констант системы установлено свойство перемешивания [3, 4]. В данной статье найдены все упругие системы с точечным спектром, а для неупругих систем, близких к упругим, получена асимптотика скоростей шаров для больших времен.

Пусть шары находятся на отрезке $[0, a]$ оси y. Перенумеруем их числами $1, 2, \dots, N$ слева направо. Диаметр, массу, координату центра и скорость i-го шара соответственно обозначим через d_i, m_i, y_i, v_i $(i = 1, 2, \dots, N)$ (рис. 1). Стенки и шары предполагаются абсолютно жесткими, поэтому справедливы неравенства

$$d_1/2 \le y_1, \quad y_{i+1} - y_i \ge (d_i + d_{i+1})/2 \ (i = 1, 2, \dots, N-1), \quad y_N \le a - d_N/2.$$

Свободное от шаров подмножество отрезка $[0, a]$ предполагается имеющим суммарную длину 1: $a = 1 + d_1 + \dots + d_N$. Этого всегда можно добиться выбором масштаба. Выполним замену:

$$y_i \to x_i = y_i - (d_1 + \dots + d_{i-1} + d_i/2) \quad (i = 1, 2, \dots, N).$$

Упорядоченная совокупность новых координат $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ центров шаров заполняет симплекс

$$0 \le x_1 \le x_2 \le \dots \le x_N \le 1, \tag{1.1}$$

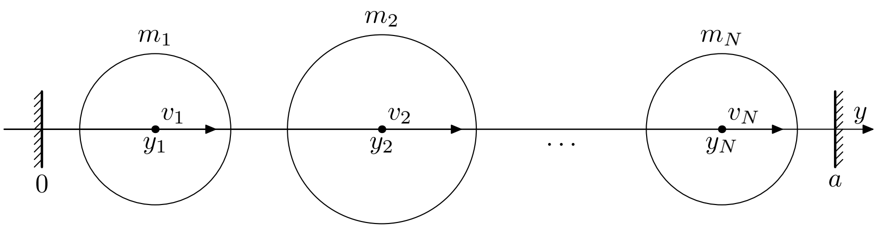

Рис. 1.

который обозначим через D. На скорости шаров $v = (v_1, v_2, \dots, v_N)$ нет кинематических ограничений. Таким образом, фазовым пространством рассматриваемой динамической системы является замкнутое множество $\Phi = D \times \mathbb{R}^N$.

Примем следующие уравнения движения внутри Φ:

$$\dot{x}_i = v_i, \quad \dot{v}_i = \alpha v_i \quad (i = 1, 2, \dots, N), \tag{1.2}$$

где $\alpha \geq 0$ — константа ускорения, точка сверху обозначает производную по времени t. Если $\alpha > 0$, то имеется приток энергии извне, и динамическая система не консервативна. Так как уравнение на скорость интегрируется в виде $v = v_0 \exp(\alpha t)$, то лучи прямые (напомним, что *лучом* называется проекция траектории на координатное пространство). Система уравнений (1.2) имеет нужный в дальнейшем очевидный интеграл

$$v - \alpha x = \text{const}\,. \tag{1.2$'$}$$

Теперь сформулируем условия отражения траектории системы (1.2) от границы фазового пространства $\partial\Phi = \partial D \times \mathbb{R}^N$. Граница симплекса D состоит из граней $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_N$, которые, в свою очередь, являются симплексами размерности $N-1$. В системе неравенств (1.1) перенумеруем знаки $\leq$ слева направо числами $0, 1, \dots, N$. Заменив i-й знак $\leq$ на $=$, получим грань Γ_i. Таким образом, грань Γ_0 соответствует соударению 1-го шара с левой стенкой, Γ_i $(1 \leq i \leq N-1)$ — столкновению i-го и $i+1$-го шаров, а Γ_N — соударению N-го шара с правой стенкой. Столкновения более высокого порядка, чем парные, не рассматриваются. Им соответствует множество траекторий лебеговой меры 0.

Пусть столкновения неупругие. Тогда при i-м соударении, т. е. при отражении от грани Γ_i, относительная скорость умножается на $-\beta_i$, суммарный импульс сохраняется. Число $0 < \beta_i \leq 1$ в бильярде называется *коэффициентом восстановления.* При $\beta_i = 1$ соударение абсолютно упругое. Если не все константы $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N$ равны 1, то при столкновениях теряется кинетическая энергия, поэтому константа ускорения должна быть положительной, чтобы шары не остановились через некоторое время. В этом случае система не консервативна. При столкновениях координата x остается непрерывной, а скорость v скачком переходит в v':

$$x \in \Gamma_0 : v_1' = -\beta_0 v_1 > 0; \quad x \in \Gamma_N : v_N' = -\beta_N v_N < 0;$$

$$x \in \Gamma_i : v_i' - v_{i+1}' = -\beta_i(v_i - v_{i+1}) < 0, \quad m_i v_i' + m_{i+1} v_{i+1}' = m_i v_i + m_{i+1} v_{i+1}$$

$$(i = 1, \dots, N-1), \tag{1.3}$$

не указанные координаты скорости сохраняются неизменными.

2. Консервативная система с точечным спектром

Пусть задано аффинное отображение координатного пространства $\pi : x \to x'$. Этой же буквой π условимся обозначать отображения $v \to \dot{\pi} v$, $(x, v) \to (\pi x, \dot{\pi} v)$, где $\dot{\pi}$ — линейная часть π. Это соглашение не ведет к большой путанице, так как скорость является вектором касательного пространства к пространству координат. Граничные условия (1.3) определяют линейные части $v \to v'$ аффинных отображений π_i, обладающих свойством $\pi_i x = x \; \forall x \in \Gamma_i$. Отражение траектории от грани Γ_i в принятых обозначениях можно записать так: $v' = \pi_i v$. Отображения $\pi_0, \dots, \pi_{N-1}$ совпадают с их линейными частями $v \to v'$,

$$\pi_N x = (x_1, \dots, x_{N-1}, -\beta_N x_N + \beta_N + 1).$$

В консервативном случае $\alpha = 0$, $\beta_0 = \dots = \beta_N = 1$ все отображения $\pi_0, \dots, \pi_N$ инволютивны. Они называются *отражениями.*

Система уравнений (1.2) не меняет своего вида при произвольном аффинном преобразовании координат (это утверждение верно и при $\alpha > 0$). Луч l с началом $x^0 \in D$ представляет собой ориентированную ломаную линию с вершинами на гранях симплекса D. Звенья этой ломаной обозначим через $l_1, l_2, \dots$, и пусть вершина $l_1 \cap l_2$ лежит на Γ_i, следующая вершина — на Γ_j, и т. д. Симплексы D и $\pi_i D$ пересекаются по общей грани Γ_i и расположены по разные стороны от нее. Продолжив звено l_1 прямолинейно (с той же скоростью v) в симплекс $\pi_i D$ до пересечения с его гранью $\pi_i \Gamma_j$, получим направленный отрезок l_2'. В силу $\pi_i^{-1} = \pi_i$ имеет место равенство $l_2 = \pi_i^{-1} l_2'$. Тем самым два звена луча $l_1 \cup l_2$ мы отобразили в один отрезок $l_1 \cup l_2'$. Аналогично продолжим l_2' через грань $\pi_i \Gamma_j$ с помощью отображения $\pi_j' = \pi_i \pi_j \pi_i^{-1}$ в симплекс $\pi_j' \pi_i D = \pi_i \pi_j D$. В результате получим отрезок l_3', соответствующий звену l_3 луча l, и т. д. Таким способом распрямим весь луч l. Итак, вместо ломаных лучей $l \subset D$ можно рассматривать прямые лучи $l' = l_1 \cup l_2' \cup \dots \subset \mathbb{R}^N$, если отождествить точки пространства $\mathbb{R}^N$, получающиеся друг из друга отображениями вида $\pi_{i_1} \dots \pi_{i_k}$. Эта процедура возможна, если группа, порожденная отражениями $\pi_0, \dots, \pi_N$, дискретна и имеет фундаментальную область D.

Определение. Динамическую систему (1.1)–(1.3) назовем *вырожденной*, если группа $\Delta = gr\langle \pi_0, \dots, \pi_N \rangle$ дискретна и имеет фундаментальную область D.

Чтобы сформулировать условия дискретности группы Δ, выполним преобразование координат $x_i \to x_i' = \sqrt{m_i} x_i$. Тогда симплекс D примет вид (штрихи опустим)

$$0 \le \frac{x_1}{\sqrt{m_1}} \le \dots \le \frac{x_N}{\sqrt{m_N}} \le 1. \tag{2.1}$$

При этом матрицы $\dot{\pi}_0, \dots, \dot{\pi}_N$ симметризуются и их собственными векторами, соответствующими собственному числу -1, становятся внутренние нормали $n_0, \dots, n_N$ к граням симплекса (2.1) относительно скалярного произведения

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \dots + x_N y_N.$$

Согласно теореме 7.1.3 из [5] группа $\Delta = \mathrm{gr}\langle \pi_0, \dots, \pi_N \rangle$ дискретна и имеет фундаментальную область D, если и только если углы $\varphi_{i,j}$ между гранями Γ_i и Γ_j симплекса D являются целыми долями от π:

$$\varphi_{i,j} = \pi - \arccos(n_i \cdot n_j) = \frac{\pi}{p_{i,j}}, \quad 2 \le p_{i,j} \in \mathbb{Z} \quad (0 \le i \ne j \le N). \tag{2.2}$$

Пусть выполнены условия (2.2). Тогда Δ является кристаллографической группой с фундаментальной областью D. Симплексы gD при $g \in \Delta$ покрывают все координатное пространство $\mathbb{R}^N$, причем любые два из них не имеют общих внутренних точек. Через $[Z]$ обозначим множество трансляций (Z — множество их векторов), принадлежащих группе Δ, а через Γ — множество матриц $\dot{g}$ элементов $g \in \Delta$. Так как трансляция взаимно однозначно определяется вектором, будем обозначать ее, заключая вектор в квадратные скобки. В кристаллографии множества Z и Γ называются *решеткой* и *группой поворотов* соответственно. Группа поворотов $\Gamma \subset O(N)$ конечна. Решетка Z имеет базис — невырожденную матрицу E такую, что $Z = E\mathbb{Z}^N$, и инвариантна относительно группы поворотов, т. е. $AZ = Z$ для любой матрицы $A \in \Gamma$ (см. [6]). Так как порождающие $\pi_0, \dots, \pi_N$ являются отражениями, группа Δ симморфна: $\Delta = [Z]\Gamma$ (см. [7, гл. V, § 3, п. 10, предложение 10]).

Отождествим точки (x, v) и (y, w) пространства $\mathbb{R}^{2N}$, если $g(x, v) = (y, w)$ для некоторого $g \in \Delta$. Полученное фактор-пространство $\mathbb{R}^{2N}/\Delta$ гомеоморфно исходному фазовому пространству Φ. Одной траектории динамической системы на Φ соответствует класс эквивалентных в смысле принятого отождествления траекторий на $\mathbb{R}^{2N}$, причем в каждом классе имеется прямая траектория. Для плотности вероятности $u(t, x, v)$, удовлетворяющей уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^{N} v_k \frac{\partial}{\partial x_k} = 0,$$

граничное условие можно заменить требованием инвариантности относительно группы Δ. Другими словами, оператор Лиувилля

$$L = \sum v_k \frac{\partial u}{\partial x_k}$$

можно считать действующим в гильбертовом пространстве функций, заданных на $\mathbb{R}^{2N}/\Delta$.

Предложение. *В консервативном вырожденном случае для каждого сечения $V \subset \mathbb{R}^{2N}/\Delta$ с конечным набором скоростей вида $\{A\hat{v} \mid A \in \Gamma\}$ оператор Лиувилля L отображает гильбертово пространство $L_2(V)$ в себя и имеет полную систему собственных функций*

$$u_n(x, v) = \sum_{A \in \Gamma} \exp(2\pi i n \cdot E^{-1} A^{-1} x)\theta(v - A\hat{v}) \quad (n \in \mathbb{Z}^N), \tag{2.3}$$

соответствующие собственные числа $\lambda_n = 2\pi i n \cdot E^{-1}\hat{v}$ составляют его точечный спектр. Функция $\theta(v)$ определена равенствами $\theta(0) = 1$, $\theta(v) = 0$ при $v \neq 0$.

Доказательство. Докажем, что функции (2.3) определены в фактор-пространстве $\mathbb{R}^{2N}/\Delta$, т. е. $u_n(g^{-1}x, \dot{g}^{-1}v) = u_n(x, v)$ $\forall g \in \Delta$ ($\dot{g}$ — линейная часть аффинного отображения g). Так как группа Δ симморфна, то достаточно проверить это равенство для трансляций и поворотов. Имеем

$$u_n(x - \tau, v) = u_n(x, v) \quad \forall \tau \in Z,$$

потому что $\exp(-2\pi i n \cdot E^{-1} A^{-1} \tau) = 1$. Действительно, в силу инвариантности решетки Z относительно группы поворотов Γ вектор $A^{-1}\tau = \tau'$ принадлежит решетке и поэтому найдется $n' \in \mathbb{Z}^N$, $\tau' = En'$. Равенство

$$u_n(B^{-1}x, B^{-1}v) = u_n(x, v) \quad \forall B \in \Gamma$$

справедливо ввиду соотношения $\theta(B^{-1}v - A\hat{v}) = \theta(v - BA\hat{v})$ и получается заменой индекса суммирования $A \to BA$ в левой части.

Докажем полноту. Сечение $V \subset \mathbb{R}^{2N}/\Delta$ получается из многослойного множества $V' = \mathbb{R}^N \times \{A\hat{v} | A \in \Gamma\}$ отождествлением точек с помощью группы Δ. Эквивалентны точки (x, v) и $(x - \tau, v)$ $(\tau \in Z)$, следовательно, функция $u(x, v) \in L_2(V)$ периодична по x с периодом E для каждого значения v. Далее, эквивалентны точки (x, v) и $(A^{-1}x, A^{-1}v)$ $(A \in \Gamma)$, значит, точка $(x, A\hat{v})$ эквивалентна $(A^{-1}x, \hat{v})$, поэтому функция $u(x, v)$ определяется единственным образом своими значениями на первом слое $V_1 = \mathbb{R}^N \times \{\hat{v}\}$. Сужение функции $u(x, v)$ на слой V_1 разложим в ряд Фурье и продолжим нулем вне V_1:

$$u_1(x, v) = u(x, \hat{v})\theta(v - \hat{v}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} c_n \exp(2\pi i n \cdot E^{-1}x)\theta(v - \hat{v}).$$

Обозначим через $u_2(x, v)$ сумму функций $u_1(A^{-1}x, A^{-1}v)$ по всем $A \in \Gamma$. Очевидно, $u_2(x, v)$ принадлежит $L_2(V)$ и разлагается в ряд по функциям $u_n(x, v)$. Кроме того, $u_2(x, \hat{v}) = pu(x, \hat{v})$, где p — число матриц $A \in \Gamma$ таких, что $A\hat{v} = \hat{v}$. Отсюда $u(x, v) = \frac{1}{p}u_2(x, v)$, следовательно, $u(x, v)$ тоже разлагается в ряд по $u_n(x, v)$. Этим доказана полнота системы функций $\{u_n\}$ в $L_2(V)$.

Вычислим значение оператора L на функции u_n:

$$Lu_n = \sum_{A \in \Gamma} (2\pi i n \cdot E^{-1}A^{-1}v) \exp(2\pi i n \cdot E^{-1}A^{-1}x)\theta(v - A\hat{v}).$$

Здесь в каждом ненулевом слагаемом имеет место равенство $v = A\hat{v}$, поэтому $Lu_n = \lambda_n u_n$, $\lambda_n = 2\pi i n \cdot E^{-1}\hat{v}$. Следовательно, u_n — собственная функция оператора Лиувилля, а λ_n —соответствующее собственное число. $\square$

Собственные функции (2.3) позволяют явно вычислить средние по времени моментов координат и скоростей шаров.

Теорема 2.1. *Консервативная динамическая система* (1.1)–(1.3) *вырожденна только в следующих случаях:*

(A) $m_1 = m_2 = \dots = m_N$;

(B) $m_1 : m_2 = 1 : 3$ (*или* $3 : 1$);

(C) $m_1 : m_2 : m_3 : m_4 = 3 : 1 : 2 : 6$ (*или* $6 : 2 : 1 : 3$).

Доказательство. Для доказательства теоремы надо решить уравнения (2.2) относительно масс шаров. Так как $n_i \cdot n_j = 0$ для $j > i + 1$, а значит, $\varphi_{i,j} = \pi/2$, $p_{i,j} = 2$, то достаточно рассмотреть углы $\varphi_{i,i+1}$. Имеем

$$\cos\varphi_{i,i+1} = \left(\frac{m_i m_{i+2}}{(m_i + m_{i+1})(m_{i+1} + m_{i+2})}\right)^{1/2} \quad (i = 0, \dots, N - 1), \tag{2.4}$$

здесь надо положить $m_0 = m_{N+1} = \infty$, чтобы охватить также крайние углы $\varphi_{0,1}$ и $\varphi_{N-1,N}$. Произведение $\pi_i\pi_{i+1}$ есть поворот на угол $2\varphi_{i,i+1}$ вокруг ребра $\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1}$. Наличие решетки в группе Δ делает эти углы кристаллографическими, т. е. равными $60°$, $90°$, $120°$ или $180°$. Так как $0 < \cos\varphi_{i,i+1} < 1$ согласно (2.4), последнее значение исключается. Итак, $\varphi_{i,i+1}$ может быть $30°$, $45°$ или $60°$.

При $N = 2$ после исключения отношения m_1/m_2 из (2.4) получим

$$\cos^2\varphi_{0,1} + \cos^2\varphi_{1,2} = 1,$$

откуда $\varphi_{0,1} + \varphi_{1,2} = 90°$. Подставив сюда возможные значения углов, находим $m_1/m_2 = 1, 1/3$ или 3. Получили решения (A) при $N = 2$ и (B).

Далее пусть $N \geq 3$. Введем величины

$$k_i = \frac{m_{i+1}}{m_i + m_{i+1}}, \quad k_i' = 1 - k_i \quad (i = 1, \dots, N-1).$$

Тогда первое и последнее из равенств (2.4) примут вид

$$k_1 = \cos^2 \varphi_{0,1}, \quad k_{N-1}' = \cos^2 \varphi_{N-1,N}, \tag{2.5}$$

а остальные сведутся к рекуррентным соотношениям

$$k_{i+1} = \frac{\cos^2 \varphi_{i,i+1}}{1 - k_i}, \quad k_i' = \frac{\cos^2 \varphi_{i,i+1}}{1 - k_{i+1}'} \quad (i = 1, \dots, N-2). \tag{2.6}$$

Так как $\cos^2 \varphi_{i,i+1} \geq 1/4$ для возможных значений углов $\varphi_{i,i+1}$ и k_i, $k_i' \in (0,1)$ по определению, из уравнений (2.5), (2.6) вытекают неравенства

$$k_i \geq 1/4, \quad k_i' \geq 1/4 \quad (i = 1, \dots, N-1). \tag{2.7}$$

Значение $\varphi_{i,i+1} = 30^\circ$ невозможно. Действительно, если $\varphi_{i,i+1} = 30^\circ$ и $1 \leq i < N-1$, то из (2.6) и (2.7) сразу вытекает противоречие: $k_{i+1} \geq 1$. Если $i = 0$, то из (2.5) и (2.6) имеем $k_1 = 3/4$, $k_2 \geq (1/4)/(1-k_1) = 1$. Если $i = N-1$, то получим аналогичное противоречие: $k_{N-1}' = 3/4$, $k_{N-2}' \geq 1$. Утверждение доказано.

Пусть $\varphi_{0,1} = 45^\circ$. Из (2.5), (2.6) получим $k_1 = 1/2$, $k_2 = 2\cos^2 \varphi_{1,2}$. Возможное значение $\varphi_{1,2} = 45^\circ$ дает $k_2 = 1$, поэтому исключается. Остается $\varphi_{1,2} = 60^\circ$, $k_2 = 1/2$. На следующем шаге рекурсии аналогично получим $\varphi_{2,3} = 60^\circ$, $k_3 = 1/2$ и т. д. вплоть до $\varphi_{N-2,N-1} = 60^\circ$, $k_{N-1} = 1/2$. Наконец, $k_{N-1}' = 1 - k_{N-1} = 1/2$, и из (2.5) найдем последний угол $\varphi_{N-1,N} = 45^\circ$. Отношения масс шаров равны

$$\frac{m_i}{m_{i+1}} = k_i^{-1} - 1 = 1 \quad (i = 1, \dots, N-1).$$

Получили решение (A). Если $\varphi_{N-1,N} = 45^\circ$, то, решая рекуррентные уравнения (2.5), (2.6) на k_i', получим тот же результат. Следовательно, другие решения имеют крайние углы

$$\varphi_{0,1} = \varphi_{N-1,N} = 60^\circ. \tag{2.8}$$

Нет решения $\varphi_{0,1} = \dots = \varphi_{N-1,N} = 60^\circ$. Действительно, система уравнений (2.5), (2.6) на k_i для этих углов легко решается:

$$k_i = \frac{i}{2i+2}. \tag{2.9}$$

Отсюда $k_{N-1} = (N-1)/(2N) < 1/2$, в то же время из (2.5) имеем $k_{N-1}' = 1/4$, и тогда $k_{N-1} + k_{N-1}' \neq 1$ в противоречие с определением.

Пусть выполнены равенства (2.8) и i_0 — наименьший номер, для которого $\varphi_{i_0,i_0+1} = 45^\circ$. В силу (2.8) $1 \leq i_0 \leq N-2$, поэтому справедливо уравнение (2.6) при $i = i_0$. Учитывая неравенства (2.7), имеем

$$k_{i_0+1} = \frac{1}{2(1 - k_{i_0})} \geq \frac{2}{3}.$$

Если $i_0 + 1 \leq N-2$, то сделаем еще шаг:

$$k_{i_0+2} = \frac{\cos^2 \varphi_{i_0+1,i_0+2}}{1 - k_{i_0+1}} \geq 3\cos^2 \varphi_{i_0+1,i_0+2}.$$

Отсюда следует, что $\varphi_{i_0+1,i_0+2} = 60^\circ$ и $k_{i_0+2} \geq 3/4$. Следующий шаг сделать нельзя, так как получится $k_{i_0+3} \geq 1$. Следовательно, $i_0 + 2 > N - 2$. Таким образом, возможны только два значения $i_0 = N - 3,\ N - 2$.

Вычислим значения k_{i_0} по формуле (2.9) и подставим в (2.6):

$$k_{i_0+1} = \frac{\cos^2 \varphi_{i_0,i_0+1}}{1 - k_{i_0}} = (i_0 + 1)(i_0 + 2)$$

($\varphi_{i_0,i_0+1} = 45^\circ$ по определению i_0). При $i_0 = N - 3$ сделаем еще один шаг:

$$k_{i_0+2} = \frac{\cos^2 \varphi_{i_0+1,i_0+2}}{1 - k_{i_0+1}} = \frac{i_0 + 2}{4}.$$

Так как должно быть $k_{i_0+2} < 1$, то $i_0 \leq 1$. Но по определению $i_0 \geq 1$, следовательно, $i_0 = 1$. Отсюда $N = 4$. При $i_0 = N - 2$ этот шаг сделать нельзя, и предыдущее выражение принимает вид $k_{N-1} = 1 - 1/N$. В силу (2.5) $k'_{N-1} = \cos^2 \varphi_{N-1,N} = 1/4$. Но должно быть $k_{N-1} + k'_{N-1} = 1$. Отсюда опять получается $N = 4$. Теперь, используя найденные углы $\varphi_{i,i+1}$, вычислим все k_i, k'_i из уравнений (2.5), (2.6) и убедимся, что $k_i + k'_i = 1$. Получили решение (C). □

Следствие. *В случае* (A) *группа* Δ *равна произведению* $[2\mathbb{Z}^N]RS$, *где подгруппа* S *состоит из перестановок координат вектора, а подгруппа* R *— из отражений в координатных плоскостях.*

Доказательство следует из того, что в этом случае D есть симплекс (1.1), а отражения имеют вид

$$\begin{gathered} \pi_0 x = (-x_1, \dots, x_N), \\ \pi_i x = (x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_N) \quad (i = 1, \dots, N-1), \\ \pi_N x = (x_1, \dots, -x_N + 2). \end{gathered} \tag{2.10}$$

3. Система, близкая к консервативной

Обозначим $\varepsilon_i = 1 - \beta_i$. Предположим

$$N \geq 2, \quad m_1 = \dots = m_N, \quad \alpha \sim \varepsilon_0 \sim \varepsilon_1 = \dots = \varepsilon_{N-1} \sim \varepsilon_N \sim 0.$$

Таким образом, в этом пункте рассматривается неконсервативная динамическая система. Отклонение от консервативности характеризуется малыми положительными константами α, ε_0, ε_1, ε_N, равными нулю в консервативном случае. Как увидим далее, эта малая неконсервативность существенно меняет поведение системы.

Отражения лучей от граней симплекса D, определенного неравенствами (1.1), тоже задается аффинными отображениями $\pi_0, \dots, \pi_N$, которые уже не инволютивны. Их предельные значения для консервативной системы обозначим через $\pi_0^\circ, \dots, \pi_N^\circ$. Они имеют вид (2.10) и согласно теореме 2.1(A) порождают кристаллографическую группу Δ° с фундаментальной областью D. Если обозначить через $v_\parallel$ и $v_\perp$ параллельную и перпендикулярную составляющие скорости v к грани Γ_i соответственно, то

$$\pi_i^\circ v = v_\parallel - v_\perp, \quad \pi_i v = v_\parallel - \beta_i v_\perp \quad (i = 0, \dots, N). \tag{3.1}$$

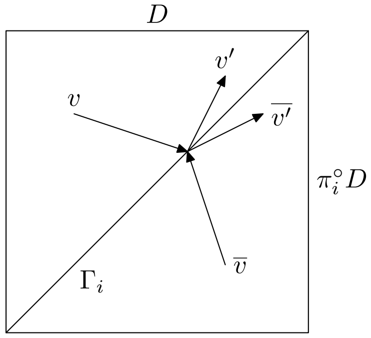

Рис. 2.

Отсюда следует, что линейные части отображений π_i° и π_i перестановочны.

От симплекса D перейдем к фактор-пространству $\mathbb{R}^N/\Delta^\circ$. Пусть луч падает на грань Γ_i симплекса D со скоростью v, тогда отраженный луч имеет скорость $v' = \pi_i v$. Им соответствуют в симплексе $\pi_i^\circ D$ лучи со скоростями $\bar{v} = \pi_i^\circ v$ и $\overline{v'} = \pi_i^\circ v'$ (рис. 2). Имеем

$$\overline{v'} = \pi_i^\circ v' = \pi_i^\circ \pi_i v, \quad v' = \pi_i v = \pi_i \pi_i^{\circ -1} \bar{v}.$$

В силу указанной перестановочности π_i° и π_i и инволютивности π_i° справедливо равенство

$$\pi_i^\circ \pi_i = \pi_i \pi_i^{\circ -1} \stackrel{\text{опр}}{=} \pi_i'.$$

Теперь вместо отражения луча от грани Γ_i можно рассмотреть его преломление в этой грани:

$$v \to \overline{v'} = \pi_i' v, \quad \bar{v} \to v' = \pi_i' \bar{v}.$$

При пересечении лучом грани Γ_i его скорость умножается на линейную часть отображения π_i' независимо от того, с какой стороны луч подошел к ней. Учитывая (3.1), закон преломления в грани Γ_i можно записать так:

$$v \to \pi_i' v = v - \varepsilon_i v_\perp, \quad v_\perp = (v \cdot n_i) n_i \quad (i = 0, \dots, N), \tag{3.2}$$

где n_i — нормаль к Γ_i. Симплексы gD, $g \in \Delta^\circ$, покрывают без перекрытий пространство так, что соседние симплексы соприкасаются по целой грани. В силу ортогональности матрицы $\dot{g}$ закон преломления в грани $g\Gamma_i$ имеет тот же вид (3.2), где в качестве n_i надо брать нормаль к $g\Gamma_i$.

Теорема 3.1. *Образы граней $g\Gamma_i$ при $g \in \Delta^\circ$ покрывают следующие семейства $N-1$-мерных плоскостей:*

$$\begin{aligned} i = 0) &\qquad x_k = a_k \in 2\mathbb{Z}, \quad 1 \le k \le N; \\ i = 1, \dots, N-1) &\qquad x_k \pm x_l = b_{kl}^{\pm} \in 2\mathbb{Z}, \quad 1 \le k < l \le N; \\ i = N) &\qquad x_k = c_k \in 2\mathbb{Z} + 1, \quad 1 \le k \le N, \end{aligned}$$

где a_k, $b_{kl}^{\pm}$, c_k — произвольные целые числа указанной четности.

Доказательство. Грань Γ_0 лежит на плоскости $\Pi_1 = \{x_1 = 0\}$. Образы $\sigma\Gamma_0$, $\sigma \in S$, $\sigma(1) = 1$, очевидно, покрывают грань $\Pi_1 \cap Q_+$ координатного куба $Q_+ = [0,1]^N$ (см. следствие теоремы 2.1). Применяя отражения $\rho \in R$, сохраняющие Π_1, к этому множеству, покроем грань $\Pi_1 \cap Q$ большего куба $Q = [-1,1]^N$. Сдвигая $\Pi_1 \cap Q$ на векторы $\tau \in 2\mathbb{Z}^N$, $\tau_1 = 0$, покроем всю плоскость Π_1. Наконец, применяя к Π_1 все $g \in \Delta^\circ = [2\mathbb{Z}^N]RS$, получим первое семейство плоскостей теоремы. Это семейство инвариантно относительно Δ°, поэтому включает в себя все образы $g\Gamma_0$ ($g \in \Delta^\circ$).

Пусть $x \in Q_+$ и $x_i = x_{i+1}$. Тогда найдется перестановка $\sigma \in S$ такая, что $x \in \sigma D$ и в системе неравенств, определяющей симплекс σD, имеется равенство, следовательно, точка x принадлежит некоторой грани $\sigma\Gamma_j$. Тем самым образы граней $\sigma\Gamma_j$ ($\sigma \in S$, $j = 1, \dots, N$) покрывают сечение куба Q_+ плоскостью $\Pi_{i,i+1} = \{x_i = x_{i+1}\}$. Применяя к этому сечению отражения $\rho \in R$, сохраняющие $\Pi_{i,i+1}$, покроем $\Pi_{i,i+1} \cap Q$. Сдвигая последнее множество на векторы $\tau \in 2\mathbb{Z}^N$, $\tau_i = \tau_{i+1}$, покроем всю плоскость $\Pi_{i,i+1}$. Отображая ее с помощью $g \in \Delta^\circ$, получим второе семейство плоскостей. Это семейство инвариантно относительно группы Δ°, следовательно, включает в себя все образы $g\Gamma_i$ ($g \in \Delta^\circ$, $i = 1, \dots, N$).

Аналогично докажем, что образы $g\Gamma_N$ при $g \in \Delta^\circ$ покрывают третье семейство плоскостей. $\square$

Рассмотрим луч, проходящий в момент времени t через точку $x \in \mathbb{R}^N$ со скоростью v. Найдем изменение скорости этого луча в течение промежутка времени $[t, t + \Delta t]$. Величину Δt выберем настолько большой, чтобы за это время произошло много столкновений шаров, т. е. было много пересечений луча с плоскостями семейств, указанных в теореме 3.1. С другой стороны, Δt должно быть настолько малым, чтобы скорость к моменту времени $t + \Delta t$ изменилась незначительно. Эти противоречивые требования удовлетворяются за счет малости констант системы α, ε_0, ε_1, ε_N.

Тогда можно считать, что за время Δt луч пройдет отрезок $\Delta x = v\Delta t$. Сложив приращения скорости в ускоренном движении шаров между столкновениями согласно формуле (1.2′), получим $\alpha\Delta x$. Уменьшение скорости из-за столкновений найдем, просуммировав потери $-\varepsilon_i v_\perp$ в формуле (3.2) по всем пересечениям отрезка Δx с указанными плоскостями. Эта сумма по множеству параллельных равноудаленных друг от друга плоскостей будет равна произведению величины $-\varepsilon_i v_\perp$ на число пересечений $|n\cdot\Delta x|/d + O(1)$, где n — нормаль, d — расстояние между соседними плоскостями. В результате получим

$$\begin{aligned}\Delta v = \alpha\Delta x - \varepsilon_0 \sum_{k=1}^{N} (v_k e_k)|\Delta x_k|/2 \\ - \varepsilon_1 \sum_{k<l} (((v_k + v_l)(e_k + e_l)/2)|\Delta x_k + \Delta x_l|/2 \\ + ((v_k - v_l)(e_k - e_l)/2)|\Delta x_k - \Delta x_l|/2) - \varepsilon_N \sum_{k=1}^{N} (v_k e_k)|\Delta x_k|/2 + O(\varepsilon),\end{aligned}$$

где $e_1, \dots, e_N$ — координатные орты, $\varepsilon = \max\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_N\}$. Подставив сюда $\Delta x = v\Delta t$ и заменив отношение $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ производной, придем к приближенному уравнению

$$\begin{aligned}\frac{dv_k}{dt} = \alpha v_k - \bar{\varepsilon}_0 |v_k| v_k - \varepsilon_1 \sum_{l\neq k} (|v_k + v_l|(v_k + v_l) \\ + |v_k - v_l|(v_k - v_l))/4 \quad (k = 1, \dots, N), \qquad (3.3)\end{aligned}$$

здесь и далее $\bar{\varepsilon}_0 = (\varepsilon_0 + \varepsilon_N)/2$.

Правая часть $f(v)$ системы уравнений (3.3) имеет непрерывные производные и инвариантна относительно перестановок координат и отражений в координатных плоскостях: $f(gv) = gf(v)$ для любого $g \in RS$. Поэтому уравнение (3.3) достаточно рассмотреть в конусе

$$K : 0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \cdots \leq v_N. \tag{3.4}$$

В этом конусе векторная функция $f(v)$ является полиномом 2-й степени и разности ее координат $f_k(v) - f_{k-1}(v)$ делятся на $v_k - v_{k-1}$.

Система дифференциальных уравнений (3.3) выведена эвристическими рассуждениями, как это принято делать в теории вероятностей. Далее строго докажем, что любое решение $v(t)$, $v(0) \in \operatorname{int} K$, этой системы в конусе K стремится к постоянному решению $\bar{v} \neq 0$ при $t \to \infty$. В конусе gK ($g \in RS$) решение сходится к $g\bar{v}$. Скорости $\bar{v}$ и $g\bar{v}$ эквивалентны в фактор-пространстве $\mathbb{R}^N/\Delta^\circ$, так как $RS \subset \Delta^\circ$. Поясним, какой смысл имеет решение $\bar{v}$ для исходной динамической системы. В классах эквивалентности фактор-пространства $\mathbb{R}^N/\Delta^\circ$ не существует прямых лучей, потому что при движении внутри симплекса gD ($g \in \Delta^\circ$) скорость луча получает приращение порядка α, а при пересечении его грани $g\Gamma_i$ скачком уменьшается на величину порядка ε. Но имеются представители с малой средней кривизной в каждом классе, их и будем рассматривать в качестве лучей динамической системы. Скорость такого луча по истечении большого времени флуктуирует с амплитудой порядка $\alpha + \varepsilon$ вокруг среднего значения $\bar{v}$.

Теорема 3.2. *Любое решение $v(t)$ системы уравнений* (3.3) *с началом $v(0)$ во внутренней точке конуса* (3.4) *стремится к постоянному решению $\bar{v}$ при $t \to \infty$:*

(а) *если $\bar{\varepsilon}_0 \geq \varepsilon_1$, то $\bar{v}_1 = \cdots = \bar{v}_N = \alpha/d_1$;*

(б) *если $\varepsilon_1/2 \leq \bar{\varepsilon}_0 < \varepsilon_1$, то $\bar{v}_1 = (\bar{\varepsilon}_0 - \varepsilon_1/2)\alpha/d_2$, $\bar{v}_2 = \cdots = \bar{v}_N = \varepsilon_1\alpha/(2d_2)$;*

(в) *если $\bar{\varepsilon}_0 < \varepsilon_1/2$, то $\bar{v}_1 = 0$, $\bar{v}_2 = \bar{\varepsilon}_0\alpha/d_3$, $\bar{v}_3 = \cdots = \bar{v}_N = \varepsilon_1\alpha/(2d_3)$, где*

$$d_1 = \bar{\varepsilon}_0 + (N-1)\varepsilon_1, \quad d_2 = \bar{\varepsilon}_0^2 - \bar{\varepsilon}_0\varepsilon_1/2 + (N-1)\varepsilon_1^2/2, \quad d_3 = \bar{\varepsilon}_0^2 + \bar{\varepsilon}_0\varepsilon_1/2 + (N-2)\varepsilon_1^2/2.$$

В случае (в) *при $N = 2$ надо брать только координаты $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$.*

Доказательство. В конусе (3.4) имеем

$$f_k(v) = \alpha v_k - \left(\bar{\varepsilon}_0 + \frac{k-1}{2}\varepsilon_1\right) v_k^2 - \varepsilon_1 \left(\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{k-1} v_l^2 + v_k \sum_{l=k+1}^{N} v_l\right) \quad (k = 1, \ldots, N).$$

Этот конус, усеченный плоскостями $v_N = a$ и $v_N = b$ снизу и сверху соответственно, обозначим через $K_{a,b}$. Если $a > 0$ достаточно мало, то на нижнем основании $v_N = a$ усеченного конуса $K_{a,b}$ справедливо неравенство

$$f_N(v) = \alpha v_N - \left(\bar{\varepsilon}_0 + \frac{N-1}{2}\varepsilon_1\right) v_N^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_1 \sum_{l=1}^{N-1} v_l^2 > 0.$$

Следовательно, траектории векторного уравнения (3.3) входят в множество $K_{a,b}$ через это основание. Если $b > a$ достаточно велико, то $f_N(v) < 0$ на верхнем основании $v_N = b$, поэтому траектории тоже входят через него в $K_{a,b}$. Тогда траектории уравнения (3.3) не выходят из объединения множеств $gK_{a,b}$ по всем $g \in RS$, гомеоморфного сферическому слою вокруг точки $v = 0$. Отсюда следует, что любое решение уравнения (3.3) ограничено.

Сделаем замену переменных $v \to z$:

$$z_1 = v_1, \quad z_k = v_k - v_{k-1} \quad (k = 2, \dots, N).$$

В новых переменных множество (3.4) перейдет в координатный конус K': $z_1 \geq 0, \dots, z_N \geq 0$, а система уравнений (3.3) примет вид

$$\dot{z}_k = z_k W_k(z) \quad (k = 1, \dots, N), \tag{3.5}$$

где

$$W_k(z) = \alpha - (2\bar{\varepsilon}_0 + (N-2)\varepsilon_1)(z_1 + \dots + z_{k-1}) \\ - (\bar{\varepsilon}_0 + (N-(k+1)/2)\varepsilon_1)z_k - \varepsilon_1 \sum_{l=k+1}^{N} (N+1-l)z_l.$$

Грани $z_k = 0$ конуса K' являются инвариантными многообразиями системы (3.5). Рассмотрим траектории $z(t)$, начинающиеся внутри K': $z_1(0) > 0, \dots, z_N(0) > 0$. Тогда справедливы неравенства $z_1(t) > 0, \dots, z_N(t) > 0$ во все моменты времени $t \geq 0$. Из уравнений (3.5) вытекают соотношения

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{z_k}{z_{k-1}} = W_k(z) - W_{k-1}(z) = -\left(\bar{\varepsilon}_0 + \frac{k-4}{2}\varepsilon_1\right) z_{k-1} \\ - \left(\bar{\varepsilon}_0 + \frac{k-3}{2}\varepsilon_1\right) z_k \quad (k = 2, \dots, N). \tag{3.6}$$

Случай $\bar{\varepsilon}_0 \geq \varepsilon_1$. Если $k \geq 2$, то в равенствах (3.6) коэффициент при z_{k-1} неотрицателен, а коэффициент при z_k не меньше, чем $\varepsilon_1/2$, поэтому

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{z_k}{z_{k-1}} \leq -\frac{1}{2}\varepsilon_1 z_k \quad (k = 2, \dots, N). \tag{3.7}$$

Из этого неравенства следует, что $z_k(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Действительно, предположим противное: найдется последовательность чисел $t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ такая, что $z_k(t_n) \geq c_1 > 0$. Как доказано выше, функции $z_k(t)$ ограничены, отсюда в силу уравнений (3.5) вытекает ограниченность их производных $|\dot{z}_k(t)| \leq c_2$. Тогда $z_k(t) \geq c_1 - c_2|t - t_n|$ для каждой точки t_n, следовательно,

$$\mu_k(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_1 \int_0^t z_k(\tau)\, d\tau \to \infty \quad \text{при } t \to \infty.$$

Проинтегрировав неравенство (3.7) от 0 до t, получим

$$\frac{z_k(t)}{z_{k-1}(t)} \leq \frac{z_k(0)}{z_{k-1}(0)} e^{-\mu_k(t)} \to 0 \quad \text{при } t \to \infty.$$

Так как функция $z_{k-1}(t)$ ограничена, отсюда следует сходимость $z_k(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, что противоречит предположению. Утверждение доказано.

Таким образом, инвариантное многообразие $z_1 > 0$, $z_2 = \dots = z_N = 0$ притягивает все траектории внутри конуса K'. Так что для больших времен достаточно рассмотреть систему уравнений (3.5) на этом многообразии, на котором надо решить одно дифференциальное уравнение

$$\dot{z}_1 = z_1 W_1(z_1, 0, \dots, 0) = z_1(\alpha - (\bar{\varepsilon}_0 + (N-1)\varepsilon_1)z_1).$$

Это уравнение имеет устойчивое стационарное решение $z_1 = \bar{v}_1$, получающееся из равенства $W_1 = 0$. Значение $\bar{v}_1$ приведено в строке (а) теоремы. Так как $W_1 > 0$ при $z_1 < \bar{v}_1$ и $W_1 < 0$ при $z_1 > \bar{v}_1$, любое положительное решение $z_1(t)$ сходится к $\bar{v}_1$ при $t \to \infty$. Этим мы доказали утверждение теоремы в случае (а).

Случай $\frac{1}{2}\varepsilon_1 \leq \bar{\varepsilon}_0 < \varepsilon_1$. Коэффициент при z_{k-1} в равенствах (3.6) неотрицателен, а коэффициент при z_k положителен для значений индекса $k \geq 3$. Аналогично предыдущему случаю доказывается, что инвариантное многообразие $z_1 \geq 0$, $z_2 > 0$, $z_3 = \cdots = z_N = 0$ притягивает все траектории внутри конуса K'. Поэтому асимптотику функции $z(t)$ при $t \to \infty$ достаточно рассмотреть на этом многообразии, на котором надо решить систему из двух дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_1 = z_1 W_1(z_1, z_2, 0, \ldots, 0), \quad \dot{z}_2 = z_2 W_2(z_1, z_2, 0, \ldots, 0). \tag{3.8}$$

Эта система имеет устойчивое стационарное решение $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$, которое получается из равенств $W_1 = W_2 = 0$. Значения $\bar{v}_1 = \bar{z}_1$, $\bar{v}_2 = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ приведены в строке (б) теоремы. Анализ поля направлений системы (3.8) показывает, что любое решение внутри грани $z_1 > 0$, $z_2 > 0$ сходится к $(\bar{z}_1, \bar{z}_2)$ при $t \to \infty$. Таким образом, утверждение теоремы доказано в случае (б).

Случай $\bar{\varepsilon}_0 < \frac{1}{2}\varepsilon_1$. Так же доказывается, что $z_k(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $(k = 4, \ldots, N)$. Напишем уравнение (3.6) для $k = 2$ в виде

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{z_1}{z_2} = -\left(\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_0\right) z_1 - \left(\frac{1}{2}\varepsilon_1 - \bar{\varepsilon}_0\right) z_2 \leq -\frac{1}{2}\varepsilon_1 z_1.$$

Из этого неравенства вытекает, как и выше, что $z_1(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Таким образом, в этом случае притягивающим все внутренние траектории инвариантным многообразием является грань $z_1 = 0$, $z_2 > 0$, $z_3 > 0$, $z_4 = \cdots = z_N = 0$. На этой грани система (3.5) принимает вид

$$\dot{z}_2 = z_2 W_2(0, z_2, z_3, 0, \ldots, 0), \quad \dot{z}_3 = z_3 W_3(0, z_2, z_3, 0, \ldots, 0). \tag{3.9}$$

Устойчивое стационарное решение $(\bar{z}_2, \bar{z}_3)$ получается из равенств $W_2 = W_3 = 0$. Значения $\bar{v}_2 = \bar{z}_2$, $\bar{v}_3 = \bar{z}_2 + \bar{z}_3$ приведены в строке (в) теоремы. Как показывает анализ поля направлений системы (3.9), точка $(\bar{z}_2, \bar{z}_3)$ притягивает все траектории с началом во внутренних точках грани $z_2 > 0$, $z_3 > 0$. Итак, утверждение теоремы доказано и в случае (в). $\square$

Теорема 3.2 дает распределение скоростей шаров, а распределение их координат остается неизвестным. Только в случае двух шаров если стационарная скорость имеет рационально независимые координаты $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$, то распределение шаров по координате хаотично и в среднем по времени равномерно. Это вытекает из эргодичности в данном случае сдвига тора $\mathbb{R}^2/(2\mathbb{Z})^2$ по формуле $x \to x + \bar{v}t$.

Автор благодарит В. А. Чуркина за консультации по группам Кокстера.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гарипов Р. М.* Одномерное движение абсолютно жестких шаров // Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа. 1974. Т. 6. С. 181.
2. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

3. *Гарипов Р. М., Мамонтов Е. В.* Одномерное движение неупругих шаров. I: Преобразование к дискретному времени // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 6. С. 23–33.
4. *Гарипов Р. М., Мамонтов Е. В.* Одномерное движение неупругих шаров. II: 2-Связанные квазициклы // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 5. С. 1006–1025.
5. *Ratcliffe J. G.* Foundations of hyperbolic manifolds. New York; Berlin: Springer-Verl., 1994. (Graduate Texts in Math.; 149).
6. *Гарипов Р. М.* Алгебраический метод вычисления кристаллографических групп и рентгеноструктурный анализ кристаллов. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2003.
7. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. М.: Мир, 1972.

Статья поступила 26 мая 2004 г., окончательный вариант — 30 августа 2004 г.

Гарипов Равиль Мухамедзянович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
garipov@hydro.nsc.ru