Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2005. Том 46, № 2

УДК 517.956.25

НЕКОТОРЫЕ ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОБЛАСТЯХ С НЕГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Т. С. Гаджиев

Аннотация: Получены точные оценки скорости убывания, а также оценки модуля градиента решения в окрестности конической точки границы.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, поведение решений, негладкие области.

В работе рассматривается смешанная краевая задача в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$:

$$\frac{d}{dx_i} a_i(x, u, u_x) - a(x, u, u_x) = 0, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \quad a_i(x, u, u_x) \cos(n, x_i)|_{\Gamma_2} = 0, \tag{2}$$

где $\partial\Omega$ — граница области Ω и $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Относительно области Ω требуем выполнения изопериметрических условий [1].

Обозначим через $\Omega_a^b = \Omega \cap \{(r, \omega) \mid 0 \leq a < r < b,\ \omega \in G\}$ слой в $\mathbb{R}^n$; $\Omega_b = \Omega \setminus \Omega_0^b$ для любого $b > 0$, $\Gamma_a^b = \partial\Omega \cap \{(r, \omega) \mid 0 \leq a < r < b;\ \omega \in \partial G\}$ — боковая поверхность слоя Ω_a^b; $G_\rho = \Omega_0^d \cap \{|x| = \rho\}$; $0 < \rho \leq d$. Здесь (r, ω) — сферические координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$ с полюсом в 0. Через $\nabla_\omega \psi$ обозначаем проекцию вектора $\nabla\psi$ на касательную плоскость к сфере S^{n-1} в точке ω;

$$\operatorname{div}_\omega \psi = \frac{1}{J(\omega)} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \omega_i} \left(\frac{J(\omega)}{q_i} \psi \right),$$

где

$$J(\omega) = \sin^{n-2}\omega_1 \sin^{n-3}\omega_2 \dots \sin\omega_{n-2}; \quad |\nabla_\omega \psi|^2 = \sum_{i=1}^{n-1} q_i^{-1} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\omega_i} \right)^2,$$

$q_1 = 1$, $q_i = (\sin\omega_1 \dots \sin\omega_{i-1})^2$, $i \geq 2$.

Предполагаем, что коэффициенты $a_i(x, u, p)$ непрерывно дифференцируемы, $a(x, u, p)$ непрерывна по совокупности аргументов и выполнены условия:

$$\nu|p|^{m-2}\xi^2 \leq \frac{\partial a_i(x, u, p)}{\partial p} \xi_i \xi_j \leq \mu|p|^{m-2}\xi^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{3}$$

с положительными постоянными $\nu, \mu > 0$,

$$a_i(0, 0, p) = |p|^{m-2} p_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad \forall p \in \mathbb{R}^n, \tag{4}$$

существуют неотрицательные постоянные C_0, C_1, C_2 и функции $g(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x) \in L_{q/(m-1)}$, $f(x) \in L_{q/m}$, $q > n$, такие, что

$$\left(\sum_{i,j=1}^{n}\left|\frac{\partial\left(a_i(x,u,p)-a_i(0,0,p)\right)}{\partial p_j}\right|^2\right)^{1/2} \le C_0|x|^{\alpha}|z|^{m-2}+\varphi_1(x) \quad \forall\alpha\in(0,1), \tag{5}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i(x,0,0)|^2\right)^{1/2} \le g(x), \tag{6}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial a_i(x,u,p)}{\partial u}\right|^2\right)^{1/2} \le C_1\,|p|^{m-2}+\varphi_2(x), \tag{7}$$

$$|a(x,u,p)| + \left|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i(x,u,p)}{\partial x_i}\right| \le C_2|p|^{m-1}+f(x), \tag{8}$$

$$a(x,u,p)\operatorname{sgn} u \ge -(C_2|p|^{m-1}+f(x)). \tag{9}$$

Рассмотрим нелинейную задачу на собственные значения:

$$\begin{gathered}\operatorname{div}_\omega((\lambda^2\psi^2+|\nabla_\omega\psi|^2)^{(m-2)/2}+\nabla_\omega\psi)\\ +\lambda(\lambda(m-1)+n-m)(\lambda^2\psi^2+|\nabla_\omega\psi|^2)^{(m-2)/2}\psi=0, \quad \omega\in G, \qquad (10)\\ \psi(\omega)|_{\gamma_0}=0, \quad \left.\frac{\partial\psi(\omega)}{\partial N}\right|_{\gamma_1}=0, \quad \omega\in\partial G,\end{gathered}$$

где $\partial G = \gamma_0 \cup \gamma_1$, N — внешняя нормаль к ∂G.

Предположим, что существуют числа $d > 0$, $k_0 \ge 0$, $k_1 \ge 0$, $k_2 \ge 0$ и $\beta \ge \lambda(m-1)+\alpha/2-m$, $\delta \ge \alpha m/\left(2(m-1)+(m-2)(\lambda-1)\right)$, где λ — собственное значение задачи (10), такие, что в области Ω_0^d

$$f(x) \le k_0|x|^{\beta}, \quad \varphi_1(x) \le k_1|x|^{\delta}, \quad \varphi_2(x) \le k_2|x|^{\delta-1}. \tag{11}$$

Из условий (5)–(9), применяя неравенства Гёльдера и Коши, имеем

$$a_i(x,u,p)p_i \ge \left(\frac{\nu}{2(m-1)}\right)|p|^m - C(\nu,m)g^{m'}(x), \tag{12}$$

где $\frac{1}{m}+\frac{1}{m'}=1$.

В гладкой области хорошо известны [2, 3] регулярность обобщенных решений для уравнений (1) и различных краевых задач для них, а также разрешимость этих задач. В данной работе наша цель — получить некоторые точные оценки поведения решения и его производной вблизи конических точек решений смешанной краевой задачи (1), (2). В случае задачи Дирихле для разных классов уравнений типа (1) такие оценки получены в работах Миерземана [4], Толксдорфа [5], Борсука [6]. Для линейных уравнений точные оценки получены в работе В. А. Кондратьева и О. А. Олейник [7]. В случае задачи Дирихле для одного класса уравнений типа (1) в плоских областях при $m = 2$ точные оценки даны в работе [8].

В работе [9] при условиях (3), (6) и (9) получены ограниченность решения задачи (1), (2) и априорная оценка

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)| \le C_3(\|f\|_{q/m,\Omega}+\|\varphi_2\|_{q/(m-1),\Omega}),$$

где C_3 зависит от n, m, q, C_2, $\operatorname{mes}\Omega$. Кроме того, в работе [9] при условиях (3), (6) и (8) получены гёльдеровость решения в $\overline{\Omega}$ ограниченных обобщенных решений задачи (1), (2) и априорная оценка

$$|u(x)| \leq C_4|x|^{\gamma}, \quad x \in \overline{\Omega},\ \gamma \in (0,1), \tag{13}$$

где C_4, γ зависят от $\max\limits_{\Omega}|u(x)|$, n, m, q, ν, μ, $\operatorname{mes}\Omega$, $\|f\|_{q/m,\Omega}$, $\|\varphi_2\|_{q/(m-1),\Omega}$.

Через $W^1_{m,0}(\Omega)$ обозначим банахово пространство, полученное замыканием пространства функций из $C^1(\Omega)$, равных нулю на Γ_1, в норме $W^1_m(\Omega)$.

Функцию $u(x) \in W^1_{m,0}(\Omega)$ будем называть *обобщенным решением задачи* (1), (2), если она удовлетворяет следующему интегральному тождеству:

$$J(u,\eta) = \int\limits_{\Omega} [a_i(x,u,u_x)\eta_{x_i} + a(x,u,u_x)\eta]\,dx = 0 \tag{14}$$

для любой неотрицательной функции $\eta(x) \in W^1_{m,0}(\Omega)$.

Обозначим $L_m u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{m-2}\nabla u)$, $m>1$. Приведем некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Существует положительная функция ψ, являющаяся решением задачи* (10) *и соответствующая $\lambda > \max(0; \frac{m-n}{m-1})$, и $\psi^2 + |\nabla_\omega\psi|^2 > 0$ в $\overline{G}$.*

Лемма 2. *Если $\lambda > 1$, то $\Omega_0 \subset \{x_n \geq 0\}$.*

Лемма 3. *Для любого $\varepsilon > 0$ существуют функция $\psi_\varepsilon(\omega)$ и числа $\delta_\varepsilon > 0$, $\lambda_\varepsilon \in [\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon]$ такие, что барьерная функция $\omega_\varepsilon(x) = r^{\lambda_\varepsilon}\cdot\psi_\varepsilon(\omega)$ удовлетворяет неравенствам*

1) $-L_m\omega_\varepsilon(x) \geq \delta_\varepsilon r^{(\lambda+\varepsilon-1)(m-1)-1}$, $x \in \Omega^1_0$,
2) $\delta_\varepsilon \cdot r^{\lambda+\varepsilon} \leq \omega_\varepsilon(x) \leq \delta_\varepsilon^{-1} r^{\lambda-\varepsilon}$, $x \in \overline{\Omega^1_0}$,
3) $\delta_\varepsilon \cdot r^{\lambda+\varepsilon-1} \leq |\nabla\omega_\varepsilon(x)| \leq \delta_\varepsilon^{-1} r^{\lambda-\varepsilon-1}$, $x \in \overline{\Omega^1_0}$,
4) $|\nabla^2\omega_\varepsilon(x)| \leq \delta_\varepsilon^{-1} r^{\lambda-\varepsilon-2}$, $x \in \Omega^1_0$.

Доказательства этих лемм проводятся аналогично соответствующим леммам из [10] с естественными изменениями. В случае $m=2$ лемма 1 доказана также А. Ф. Филипповым [11].

Пусть $\eta(x) \in W^1_{m,0}(\Omega^d_0)$ — произвольная неотрицательная функция и $\eta(x) = 0$ $\forall x \in \Omega_d$. Для любого $A > 0$ $\quad\omega_\varepsilon(x)$ — барьерная функция из леммы 3. Имеем

$$J(A\omega_\varepsilon,\eta) = \int\limits_{\Omega^d_0} [a_i(x, A\omega_\varepsilon(x), A\nabla\omega_\varepsilon(x))\eta_{x_i}(x) + a(x, A\omega_\varepsilon(x), A\nabla\omega_\varepsilon(x))\eta(x)]\,dx.$$

Отсюда, учитывая условия на $a_i(x,u,p), a(x,u,p)$ и условие (4), получаем

$$J(A\omega_\varepsilon,\eta) = \int\limits_{\Omega^d_0} \eta(x)\left[a(x, A\omega_\varepsilon(x), A\nabla\omega_\varepsilon(x)) - \frac{da_i(x, A\omega_\varepsilon(x), A\nabla\omega_\varepsilon(x))}{dx_i}\right]dx$$

$$= -\int\limits_{\Omega^d_0} \eta(x)\Bigg[A\omega_{\varepsilon_{x_i,x_j}} \frac{\partial(a_i(x, A\omega_\varepsilon(x),\ A\nabla\omega_\varepsilon) - a_i(0,0,A\nabla\omega_\varepsilon))}{\partial A\omega_{\varepsilon_{x_j}}} + A^{m-1}L_m\omega_\varepsilon(x)$$

$$+ A\omega_{\varepsilon_{x_j}} \frac{\partial a_i(x, A\omega_\varepsilon, A\nabla\omega_\varepsilon)}{\partial(A\omega_\varepsilon)} - a(x, A\omega_\varepsilon, A\nabla\omega_\varepsilon) + \frac{\partial a_i(x, A\omega_\varepsilon,\ A\nabla\omega_\varepsilon)}{\partial x_i}\Bigg]\,dx.$$

Учитывая условия (5), (7), (8), приходим к равенству

$$J(A\omega_\varepsilon,\eta)\ge-\int\limits_{\Omega_0^d}\eta(x)[A^{m-1}L_m\omega_\varepsilon(x)+C_0A^{m-1}r^\alpha|\nabla\omega_\varepsilon|^{m-2}|\omega_{\varepsilon_{xx}}|$$
$$+A\varphi_1(x)|\omega_{\varepsilon_{xx}}|+(C_1+C_2)A^{m-1}|\nabla\omega_\varepsilon|^{m-1}+A\varphi_2(x)|\nabla\omega_\varepsilon(x)|+f(x)]\,dx.$$

По лемме 3 из свойств барьерной функции $\omega_\varepsilon(x)$ имеем

$$J(A\omega_\varepsilon,\eta)\ge\int\limits_{\Omega_0^d}\eta(x)r^{(\lambda+\varepsilon)(m-1)-m}[A^{m-1}(\delta_\varepsilon-(C_0+C_1+C_2))\delta_\varepsilon^{1-m}r^{\alpha-2\varepsilon(m-1)}$$
$$-A\delta_\varepsilon^{-1}r^{\lambda-\varepsilon-2}(\varphi_1(x)+r\varphi_2(x))-f(x)]\,dx.$$

Из условия (11) получаем

$$J(A\omega_\varepsilon,\eta)\ge[A^{m-1}(\delta_\varepsilon-(C_0+C_1+C_2))\delta_\varepsilon^{1-m}d^{\lambda-2\varepsilon(m-1)}-k_0d^{\alpha/2-\varepsilon(m-1)}$$
$$-A(k_1+k_2)\delta_\varepsilon^{-1}d^{m(\alpha-2\varepsilon(m-1))/2(m-1)}]\int\limits_{\Omega_0^d}\eta(x)r^{(\lambda+\varepsilon)(m-1)-m}\,dx. \tag{15}$$

Далее, выберем A,d,ε таким образом, чтобы

$$J(A\omega_\varepsilon,\eta)\ge0\quad\forall\eta\ge0. \tag{16}$$

Итак, если выбрано $\varepsilon=\frac{\alpha}{4(m-1)}$ и выполняются неравенства

$$(C_0+C_1+C_2)\delta_\varepsilon^{1-m}d^{\alpha/2}\le\frac{\delta_\varepsilon}{2},$$
$$A(k_1+k_2)\delta_\varepsilon^{-1}d^{\frac{m\alpha}{4(m-1)}}\le\delta_\varepsilon\frac{A^{m-1}}{8},\quad k_0d^{\alpha/4}\le\frac{\delta_\varepsilon A^{m-1}}{8}, \tag{17}$$

то согласно лемме 3 найдутся δ_ε и барьерная функция $\omega_\varepsilon(x)$ со свойствами 1–4. Легко видеть, что неравенства (17) будут выполнены, если $d>0$ достаточно мало, а $A>0$ достаточно велико, например, если

$$0<d\le\delta_\varepsilon^{\frac{2m}{\alpha}}(2(C_0+C_1+C_2))^{-2/\alpha},$$

$$A\ge\max\big[(8k_0)^{1/(m-1)}\delta_\varepsilon^{\frac{(m-2)}{2(m-1)}}(2(C_0+C_1+C_2))^{\frac{1}{2(1-m)}},$$
$$(8(k_1+k_2))^{\frac{1}{(m-2)}}\delta_\varepsilon^{\frac{(m-2)}{2(m-1)}}(2(C_0+C_1+C_2))^{\frac{m}{2(1-m)(m-2)}}\big].$$

Такой выбор параметров обеспечивает выполнение неравенства (16), а именно

$$J(A\omega_\varepsilon,\eta)\ge\frac14\delta_\varepsilon A^{m-1}\int\limits_{\Omega_0^d}\eta(x)r^{(\lambda+\varepsilon)(m-1)-m}\,dx\ge0\quad\forall\eta(x)\ge0.$$

Теорема 1. *Пусть $u(x)\in W^1_{m,0}(\Omega)$ — обобщенное решение задачи* (1), (2), *выполнены условия* (3)–(11) *относительно коэффициентов и условие изопериметричности относительно области. Кроме того, предположим, что функция $a(x,u,p)$ непрерывно дифференцируема по u, p, а при фиксированных x, p не возрастает по u и выполнено одно из следующих условий:*

1) *$a_i(x,u,p)$, $i=\overline{1,n}$, не зависят от u;*

2) $a(x,u,p)$ *не зависит от* p;

3) *матрица* $\begin{pmatrix} D_{p_j}a_i(x,u,p) & D_{p_j}a(x,u,p) \\ D_u a_i(x,u,p) & D_u a(x,u,p) \end{pmatrix}$ *неположительно определенная.*

Тогда существуют числа $d>0$, $k_0>0$ *такие, что*

$$|u(x)| \le k_0|x|^{\lambda-\varepsilon}, \quad x \in \Omega_0^d, \tag{18}$$

для любого $\varepsilon>0$, *где* k_0 *определяется лишь параметрами задачи, а число* d — *первым из неравенств* (17).

Доказательство. Положим $\omega(x)=\omega_\varepsilon(x)$, $\varepsilon=\frac{\alpha}{4(m-1)}$, где $\omega_\varepsilon(x)$ — барьерная функция, δ_ε — число, существующее в соответствии с леммой 3, $d>0$ — число из неравенств (17). Тогда из (16) следует, что

$$J(A\omega,\eta) \ge 0 = J(u,\eta) \quad \text{в } \Omega_0^d. \tag{19}$$

Учитывая лемму 3, имеем

$$0 = u(x) \le A\omega(x) \quad \forall\, x \in \Gamma_0^d. \tag{20}$$

Опять же из леммы 3 в силу условия 2 вытекает, что

$$A\omega(x) \ge A\delta_\varepsilon d^{\lambda+\varepsilon} \quad \forall\, x \in G_d. \tag{21}$$

Тогда из (13) и (21) получаем, что

$$u(x) \le C_4 d^\gamma \le A\delta_\varepsilon d^{\lambda+\varepsilon} \le A\omega(x) \quad \forall\, x \in G_d \tag{22}$$

для любого $x \in G_d$, если выполняется неравенство

$$A \ge C_4 d^{\gamma-\lambda-\varepsilon}\delta_\varepsilon^{-1}. \tag{23}$$

Используя неравенства (19)–(21) и предположения 1–3 теоремы для выполнения принципа сравнения [3], имеем

$$u(x) \le A\omega(x), \quad x \in \overline{\Omega}_0^d. \tag{24}$$

Аналогичным образом доказывается неравенство

$$u(x) \ge -A\omega(x), \quad x \in \overline{\Omega}_0^d.$$

Таким образом, если A удовлетворяет неравенствам (17), (23), то по лемме 3 в силу условия 2 получаем требуемую оценку (18).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Предположим, что выполняются все условия теоремы* 1, *кроме того, существуют числа* $C_5, C_6 \ge 0$ *такие, что*

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i(x,u,p)-a_i(y,v,p)|^2\right)^{1/2} \le C_5(1+|p|)^{m-1}(|x-y|^\alpha + |u-v|^\alpha), \tag{25}$$

$$|a(x,u,p)| \le C_6(1+|p|)^m \tag{26}$$

для любых $\alpha \in (0,1)$, $(x,u,p) \in \partial\Omega \times [-k_0,k_0] \times \mathbb{R}^n$ *и* $(u,v) \in \Omega \times [-k_0,k_0]$, *где* $k_0 = \mathrm{const}$ — *постоянная из оценки* (18).

Тогда существуют постоянные k_1, $d>0$, *не зависящие от* $u(x)$ *и определяемые лишь известными параметрами задачи и областью* Ω, *такие, что*

$$|\nabla u(x)| \le k_1|x|^{\lambda-1-\varepsilon}, \quad x \in \Omega_0^d, \tag{27}$$

для любого $\varepsilon \in (0, \lambda - 1)$.

Доказательство. Для доказательства используем некоторые оценки для гладких областей.

Рассмотрим функцию $v(x') = \rho^{-\lambda+\varepsilon} u(\rho x')$ в слое $\Omega^1_{1/2}$. Она является обобщенным решением в $\Omega^1_{1/2}$ уравнения

$$\frac{\partial \tilde{a}_i(x', v, v_{x'})}{\partial x'_i} - \tilde{a}(x', v, v_{x'}) = 0, \quad x \in \Omega^1_{1/2}, \tag{28}$$

где

$$\tilde{a}_i(x', v, v_{x'}) = a_i(\rho x', \rho^{\lambda-\varepsilon} v, \rho^{\lambda-\varepsilon-1} v_{x'}), \quad \tilde{a}(x', v, v_{x'}) = \rho a(\rho x', \rho^{\lambda-\varepsilon} v, \rho^{\lambda-\varepsilon-1} v_{x'}).$$

При условиях теоремы выполняется условие теоремы 1 из [12] об ограниченности модуля градиента решения внутри области и вблизи гладкого куска границы:

$$\sup_{\Omega^1_{1/2}} |\nabla' v| \leq M'_1. \tag{29}$$

Здесь $M'_1 > 0$ определяется лишь величинами m, k_0, n, λ, α, μv^{-1} и областью Ω, где k_0 — постоянная из оценки (18). Возвращаясь к функции $u(x)$, из (29) получаем

$$|\nabla u(x)| \leq M_1 \rho^{\lambda-1-\varepsilon}, \quad x \in \Omega^\rho_{\rho/2}.$$

Полагая $|x| = 2\rho/3$, отсюда приходим к искомой оценке (27).

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. В случае $m = 2$, $n > 2$ некоторые предположения относительно коэффициентов можно ослабить и получить оценки (18), (27) для $|u(x)|$ и $\nabla u(x)$ в окрестности граничной точки с $\varepsilon = 0$.

Замечание 2. В случае $m = 2$, $n = 2$ в плоской области с величиной угла $0 < \omega < \pi$ при некоторых предположениях относительно коэффициентов можно получить оценки

$$|u(x)| \leq C_1 |x|^{\frac{\pi}{2\omega}}, \quad |x| < d,$$
$$|\nabla u(x)| \leq C_2 |x|^{\frac{\pi}{2\omega}-1}, \quad |x| < d.$$

Доказательства замечаний 1, 2 проводятся иными методами и занимают большой объем. Поэтому они будут приведены в дальнейших публикациях.

В заключение автор выражает глубокую признательность И. В. Скрыпнику.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. М.: Наука, 1987.
2. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973.
3. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.
4. *Miersemann E.* Zur Regularitat verallgemeinerter Losunden von quasilinearen elliptischen Differentialgleichungen zweiter Ordung in Gebieten mit Ecken // Z. Anal. Anwendungen. 1982. Bd 1, N 4. S. 59–71.
5. *Tolksdorf P.* On quasilinear boundary value problems in domains with corners // Nonlinear Anal. 1981. V. 5, N 7. P. 721–735.
6. *Борсук М. В.* Поведение обобщенных решений задачи Дирихле для квазилинейных эллиптических дивергентных уравнений второго порядка вблизи конической точки // Сиб. мат. журн. 1990. V. 31, N 6. P. 25–38.

7. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, № 2. С. 4–76.

8. *Гаджиев Т. С.* О поведении решений и их производных в областях с угловыми точками для квазилинейных уравнений // Изв. АН АзССР. Сер. физ.-тех. и мат. наук. 1989. Т. 10, № 2–3. С. 27–32.

9. *Гаджиев Т. С.* О решениях смешанных краевых задач для квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка в произвольных ограниченных областях // Математическая физика и нелинейная механика. Киев: Наук. думка, 1986. Вып. 5. С. 56–59.

10. *Tolksdorf P.* On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points // Comm. Partial Differential Equations. 1983. V. 8, N 7. P. 773–817.

11. *Филиппов А. Ф.* Гладкость обобщенных решений вблизи вершины многогранного угла // Дифференц. уравнения. 1973. Т. 9, № 10. С. 1889–1903.

12. *Lieberman G. M.* Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations // Nonlinear Anal. Methods Appl. 1988. V. 12, N 11. P. 1203–1219.

Статья поступила 30 мая 2002 г.

Гаджиев Таир Садиевич
Институт математики и механики НАН Азербайджана
ул. Ф. Агаева, 9, Баку 370141, Азербайджан
`tgadjiev@mail.az`