Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2005. Том 46, № 2

УДК 515.12:517.54

МЁБИУСОВО–ИНВАРИАНТНЫЕ МЕТРИКИ И ОБОБЩЕННЫЕ УГЛЫ В ПТОЛЕМЕЕВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. В. Асеев, А. В. Сычёв, А. В. Тетенов

Аннотация: Изучаются мёбиусовы и квазимёбиусовы отображения в пространствах с полуметрикой, удовлетворяющей неравенству Птолемея. Построена биметризация птолемеева пространства, позволяющая в дополнениях к неодноточечным множествам ввести мёбиусово-инвариантную метрику (угловое расстояние), совпадающую с гиперболической метрикой в канонических случаях. В птолемеевых пространствах вводится понятие обобщенного угла, имеющего пару множеств в качестве вершин, определяется его величина в терминах углового расстояния и исследуется искажение обобщенных углов при квазимёбиусовых вложениях. В приложении к неоднолистным отображениям рассмотрено поведение обобщенного угла при проекциях и получена оценка обратного искажения обобщенных углов при квазимероморфных отображениях (отображениях с ограниченным искажением).

Ключевые слова: полуметрическое пространство, птолемеево пространство, биметрическое пространство, мёбиусово отображение, квазимёбиусово отображение, абсолютное двойное отношение, квазимероморфное отображение, отображение с ограниченным искажением.

Введение

В основной части статьи (§ 1–4) рассматриваются мёбиусовы и квазимёбиусовы отображения в пространствах с полуметрикой, удовлетворяющей неравенству Птолемея. В § 1 показано, что птолемеево пространство $\mathscr{X}$ естественным образом биметризуемо (теорема 1.5) и возникающая в нем биметрика (угловая характеристика тетрады) позволяет ввести в дополнении к любому неодноточечному множеству $A \subset \mathscr{X}$ метрику (угловое расстояние), которая в канонических ситуациях совпадает с гиперболическим расстоянием (примеры 1.7) и может рассматриваться как мёбиусово-инвариантный аналог квазигиперболической метрики, введенной Герингом в совместных работах с Палка [1] и Осгудом [2] для использования в теории квазиконформных отображений (см. также [3, 4]). В § 2 рассмотрены мёбиусовы отображения полуметрических пространств, описаны угловые характеристики полуметрических тетрад и мёбиусово вложение полуметрической тетрады в комплексную плоскость, дающее комплексификацию абсолютного двойного отношения в птолемеевых пространствах. В § 3 описано искажение угловых характеристик при квазимёбиусовых вложениях птолемеевых пространств. Показано (теоремы 3.6, 3.7), что понятие квазимёбиусовости является естественным аналогом свойства двусторонней равномерной непрерывности инъективных отображений метрических пространств, перенесенным в категорию биметрических пространств. В § 4 вводится обобщенный угол (с множествами в качестве вершин), определяется его величина в терминах углового расстояния в птолемеевых пространствах и исследуется искажение обобщенных углов при квазимёбиусовых вложениях (теорема 4.2). Эта конструкция, обобщающая понятие топологического угла и топологического конуса в работах [5–7], позволяет получить в § 5 оценку обратного искажения углов при квазимероморфных отображениях в $\mathbb{R}^n$ (теорема 5.8). Результаты данной работы частично анонсированы в [8, 9].

§ 1. Птолемеевы пространства

Следуя [10, гл. 1, § 7, с. 12], мы называем *полуметрикой* (semimetric) на множестве $\mathscr{X}$ вещественную неотрицательную функцию $\rho : \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to \mathbb{R}^+$, удовлетворяющую *аксиоме тождества* $(\rho(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$ и *аксиоме симметрии* $\rho(x, y) = \rho(y, x)$. Множество $\mathscr{X}$ вместе с заданной на нем полуметрикой будем называть *полуметрическим* пространством (semimetric space) [10, с. 79].

Для множества $\mathscr{X}$, содержащего не менее четырех различных точек, символом $\tau\mathscr{X}$ будем обозначать множество всех упорядоченных четверок точек $T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ в $\mathscr{X}$, по меньшей мере три из которых попарно различны. Символом $\tau_0\mathscr{X}$ обозначаем множество всех упорядоченных четверок попарно различных точек $T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Элементы множества $\tau\Phi$ называем *тетрадами* в $\mathscr{X}$, причем тетрады из $\tau_0\mathscr{X}$ будем называть *невырожденными*.

Так как в дальнейшем нам придется часто использовать парные произведения расстояний, вводим следующее обозначение: для тетрады $T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ в полуметрическом пространстве (с заданной полуметрикой ρ) символом T_{ijkl}, где $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$, условимся обозначать число $T_{ijkl} = \rho(x_i, x_j)\rho(x_k, x_l)$. Хотя полуметрика ρ не присутствует явно в этом обозначении, она однозначно определена принадлежностью точек тетрады T конкретному полуметрическому пространству.

Определение 1.1 [10, 32.1, с. 79]. Полуметрика $\rho : \mathscr{X} \times \mathscr{X} \to [0, +\infty)$ на множестве $\mathscr{X}$ называется *птолемеевой*, если она удовлетворяет *неравенству Птолемея*

$$\rho(x_1, x_2)\rho(x_3, x_4) + \rho(x_2, x_3)\rho(x_1, x_4) \geq \rho(x_1, x_3)\rho(x_2, x_4) \tag{1.1.1}$$

при любых $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \Phi$. С использованием вышепринятых обозначений это неравенство можно записать в виде $T_{1234} + T_{2314} \geq T_{1324}$ для любой тетрады $T \in \tau\Phi$. Множество $\mathscr{X}$, содержащее по меньшей мере четыре различные точки и наделенное птолемеевой полуметрикой ρ, называется *птолемеевым пространством*. Заметим (см. [10, с. 79]), что в общем случае «метрическое пространство не обязано быть птолемеевым, а птолемеево пространство не обязано быть метрическим».

Определение 1.2 (см. [8]). Вещественная неотрицательная функция $\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданная на множестве всех тетрад $T \in \tau\mathscr{X}$, называется *биметрикой* на $\mathscr{X}$, если

(i) $\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \sigma(x_2, x_1, x_4, x_3)$;

(ii) для любой пары различных точек $a, b \in \mathscr{X}$ функция $\sigma(x, a, y, b)$ является метрикой в $\mathscr{X} \setminus \{a, b\}$.

Определение 1.3. В произвольном полуметрическом пространстве $\mathscr{X}$ с полуметрикой ρ на множестве $\tau\mathscr{X}$ всех тетрад определена функция

$$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\rho(x_1, x_3)\rho(x_2, x_4)}{\rho(x_1, x_2)\rho(x_3, x_4) + \rho(x_1, x_4)\rho(x_2, x_3)}, \tag{1.3.1}$$

которую мы будем называть *угловой характеристикой* тетрады. С использованием принятых сокращений формула (1.3.1) принимает более удобный вид:

$$\sigma(T) = \frac{T_{1324}}{T_{1234} + T_{1423}}, \quad T \in \tau\mathscr{X}.$$

1.4. В (1.3.1) усматривается, что угловая характеристика $\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4)$ инвариантна относительно следующих перестановок элементов тетрады:

(i) $x_1 \leftrightarrow x_3$; (ii) $x_2 \leftrightarrow x_4$; (iii) $x_1 \leftrightarrow x_2$ и $x_3 \leftrightarrow x_4$; (iv) $x_2 \leftrightarrow x_3$ и $x_1 \leftrightarrow x_4$.

Точнее, подгруппа $\mathbf{L} \subset \mathbf{S}_4$ всех перестановок элементов тетрады (x_1, x_2, x_3, x_4), не меняющих значение угловой характеристики, состоит из 8 перестановок и порождена двумя циклическими перестановками: (1234) и (13). Кроме того, отметим, что для любой тройки a, b, c попарно различных точек в $\mathscr{X}$ выполнены соотношения (v) $\sigma(a, a, b, c) = \sigma(a, b, c, a) = \sigma(b, a, a, c) = \sigma(b, c, a, a) = 1$ и (vi) $\sigma(a, b, a, c) = \sigma(b, a, c, a) = 0$. Полуметрическое пространство $\mathscr{X}$ является птолемеевым тогда и только тогда, когда угловая характеристика σ удовлетворяет неравенству $0 \leq \sigma(T) \leq 1$ для всех тетрад $T \in \tau\mathscr{X}$.

Не углубляясь в теорию биметрических пространств, остановим внимание на пространствах Птолемея. Следующая теорема о биметризации анонсирована в [8] для частного случая пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$, наделенного хордовой метрикой.

Теорема 1.5. *В любом птолемеевом пространстве $\mathscr{X}$ угловая характеристика σ (заданная формулой (1.3.1)) является биметрикой, т. е. птолемеево пространство канонически биметризуемо.*

Доказательство. При любой фиксированной паре различных точек $a, b \in \mathscr{X}$ функция

$$r_{ab}(x, y) = \sigma(x, a, y, b) = \frac{\rho(x, y)\rho(a, b)}{\rho(x, a)\rho(y, b) + \rho(a, y)\rho(x, b)} \tag{1.5.1}$$

является полуметрикой на $\mathscr{X}$, ибо аксиома тождества следует из утверждения 1.4(vi), а аксиома симметрии — из 1.4(i). Остается проверить выполнение неравенства треугольника $r_{ab}(x, z) + r_{ab}(y, z) \geq r_{ab}(x, y)$ для произвольной тройки точек $x, y, z \in \mathscr{X} \setminus \{a, b\}$. Доказательство, очевидно, достаточно провести лишь для случая $x \neq y$. Рассмотрим тетрады $T^1 = (x, a, y, b)$, $T^2 = (x, a, z, b)$, $T^3 = (z, a, y, b)$ и $Q = (x, z, y, b)$.

Ситуация 1. Пусть

$$T^2_{2314} \leq T^2_{1234} \quad \text{и} \quad T^3_{1234} \leq T^3_{2314}. \tag{1.5.2}$$

Используя второе неравенство в (1.5.2), получаем соотношение

$$\begin{aligned} r_{ab}(x, z) &= \frac{T^2_{1324}}{T^2_{1234} + T^2_{2314}} = \frac{\rho(y, b)T^2_{1324}}{\rho(y, b)T^2_{1234} + \rho(x, b)T^3_{1234}} \\ &\geq \frac{\rho(y, b)T^2_{1324}}{\rho(y, b)T^2_{1234} + \rho(x, b)T^3_{2314}} = \frac{Q_{1234}}{Q_{1324}} \cdot \frac{T^1_{1324}}{T^1_{1234} + T^1_{2314}} = \frac{Q_{1234}}{Q_{1324}} r_{ab}(x, y). \end{aligned}$$

Учитывая первое неравенство в (1.5.2), приходим к соотношению

$$\begin{aligned} r_{ab}(y, z) &= \frac{T^3_{1324}}{T^3_{1234} + T^3_{2314}} = \frac{\rho(x, b)T^3_{1324}}{\rho(y, b)T^2_{2314} + \rho(x, b)T^3_{2314}} \\ &\geq \frac{\rho(x, b)T^3_{1324}}{\rho(y, b)T^2_{1234} + \rho(x, b)T^3_{2314}} = \frac{Q_{2314}}{Q_{1324}} \cdot \frac{T^1_{1324}}{T^1_{1234} + T^1_{2314}} = \frac{Q_{2314}}{Q_{1324}} r_{ab}(x, y). \end{aligned}$$

Сложив оба неравенства и использовав неравенство Птолемея $Q_{1234}+Q_{2314}\geq Q_{1324}$, получим требуемое неравенство треугольника:

$$r_{ab}(x,z)+r_{ab}(y,z)\geq r_{ab}(x,y).$$

Ситуация 2. Пусть

$$T^2_{2314}\geq T^2_{1234} \quad \text{и} \quad T^3_{1234}\geq T^3_{2314}. \tag{1.5.3}$$

Положив $a'=b$, $b'=a$ и учтя 1.4(ii), получим тождество $r_{ab}=r_{a'b'}$ на $\mathscr{X}\setminus\{a,b\}$. Неравенства (1.5.3) равносильны оценкам

$$\rho(z,a')\rho(x,b')\leq\rho(x,a')\rho(z,b') \quad \text{и} \quad \rho(z,a')\rho(y,b')\leq\rho(y,a')\rho(z,b'),$$

означающим выполнение ситуации 1 для $r_{a'b'}$. В силу доказанного

$$r_{a'b'}(x,z)+r_{a'b'}(y,z)\geq r_{a'b'}(x,y).$$

С учетом тождества $r_{a'b'}=r_{a,b}$ это есть требуемое неравенство треугольника для r_{ab} в рассматриваемой ситуации.

Ситуация 3. Пусть (1.5.2) и (1.5.3) не верны, т. е. $\big(T^2_{2314}-T^2_{1234}\big)\big(T^3_{1234}-T^3_{2314}\big)<0$. Тогда

$$T^2_{1234}T^3_{2314}+T^2_{2314}T^3_{1234}<T^2_{1234}T^3_{1234}+T^3_{2314}T^2_{2314}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\big(T^2_{1234}+T^2_{2314}\big)\big(T^3_{2314}+T^3_{1234}\big)&<2\big(T^2_{1234}T^3_{1234}+T^3_{2314}T^2_{2314}\big)\\&=2\rho(a,z)\rho(z,b)\big(T^1_{1234}+T^1_{2314}\big).\end{aligned}$$

Используя это неравенство, получаем соотношение

$$\begin{aligned}r_{ab}(x,z)+r_{ab}(y,z)&=\frac{T^2_{1324}}{T^2_{1234}+T^2_{2314}}+\frac{T^3_{1324}}{T^3_{2314}+T^3_{1234}}\\&>\frac{\big(T^2_{1324}T^3_{1234}+T^3_{1324}T^2_{2314}\big)+\big(T^2_{1324}T^3_{2314}+T^3_{1324}T^2_{1234}\big)}{2\rho(a,z)\rho(z,b)\big(T^1_{1234}+T^1_{2314}\big)}\geq\dots.\end{aligned}$$

Так как

$$\begin{aligned}T^2_{1324}T^3_{1234}+T^3_{1324}T^2_{2314}&=\rho(a,b)\rho(z,a)(Q_{1234}+Q_{2314})\\&\geq\rho(a,b)\rho(z,a)Q_{1324}=\rho(a,z)\rho(z,b)T^1_{1324}\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}T^2_{1324}T^3_{2314}+T^3_{1324}T^2_{1234}&=\rho(a,b)\rho(z,b)(Q'_{1234}+Q'_{2314})\\&\geq\rho(a,b)\rho(z,b)Q'_{1324}=\rho(a,z)\rho(z,b)T^1_{1324}\end{aligned}$$

(здесь $Q'=(x,z,y,a)$), неравенство продолжается следующим образом:

$$\dots\geq\frac{2\rho(a,z)\rho(z,b)T^1_{1324}}{2\rho(a,z)\rho(z,b)(T^1_{1234}+T^1_{2314})}=r_{ab}(x,y),$$

и дает требуемое неравенство треугольника. Теорема доказана.

Лемма 1.6. *Пусть $\mathscr{X}$ — птолемеево пространство и $\sigma : \tau\mathscr{X} \to [0,1]$ — угловая характеристика. Тогда для любой пары непустых множеств $A, B \subset \mathscr{X}$, объединение которых содержит более одной точки (т. е. не является синглтоном) и не совпадает с $\mathscr{X}$, функция*

$$r_{AB}(x,y) = \sup_{a\in A, b\in B, a\neq b} \sigma(a,x,b,y) \tag{1.6.1}$$

является метрикой на множестве $\mathscr{X} \setminus (A \cup B)$ (мы назовем ее угловой метрикой). В частности, для любого собственного непустого неодноточечного подмножества $A \subset \mathscr{X}$ функция

$$r_A(x,y) = \sup_{u,v\in A, u\neq v} \sigma(u,x,v,y) \tag{1.6.2}$$

является метрикой на $\mathscr{X} \setminus A$.

Доказательство. В силу теоремы 1.5 имеем равностепенно ограниченное семейство $\{r_{ab} : a \in A,\, b \in B,\, a \neq b\}$ метрик на множестве $\mathscr{X} \setminus (A \cup B)$, поэтому его верхняя огибающая r_{AB} конечна и также является метрикой (см. [11, гл. 9, §1, с. 12]). Лемма доказана.

Примеры 1.7. Рассмотрим в качестве $\mathscr{X}$ замыкание единичного круга $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, в качестве полуметрики ρ на $\overline{B}$ возьмем обычное евклидово расстояние на плоскости. Если в качестве множества A взять окружность $\partial B = \{z : |z| = 1\}$, то формула (1.6.2) приводит к мёбиусово-инвариантной метрике в круге

$$r_{\partial B}(z_1,z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{|1 - z_1\bar{z}_2|}, \tag{1.7.1}$$

которая связана с гиперболической метрикой $h(z_1,z_2)$ в круге B равенствами (см. [12, (7.5.2), с. 123])

$$r_{\partial B}(z_1,z_2) = \operatorname{th}\left(\frac{h(z_1,z_2)}{2}\right); \quad h(z_1,z_2) = \operatorname{Ln}\left(\frac{1 + r_{\partial B}(z_1,z_2)}{1 - r_{\partial B}(z_1,z_2)}\right)$$

и которая также иногда называется *гиперболическим расстоянием в круге* (см. например, [13, гл. 3, §12, с. 94]). В случае верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$, взяв в качестве полуметрики ρ хордовое расстояние, а в качестве множества A действительную ось, мы получаем по формуле (1.6.2) метрику

$$r_A(z_1,z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 - \bar{z}_2|} \tag{1.7.2}$$

в $\mathbb{C}_+$ (см. [12, упражнение 3, с. 125]), используемую в теории потенциала (см., например, [13, с. 79]). Метрики (1.7.1) и (1.7.2) получаются друг из друга с помощью мёбиусова (дробно-линейного) преобразования круга на верхнюю полуплоскость.

В наиболее простом случае пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$, положив $A_1 = \{0\}$, $A_2 = \{\infty\}$, получаем метрику $r_{A_1A_2}(x,y) = |x-y|/(|x|+|y|)$ в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Нам не удалось найти в литературе упоминание о том, что эта функция является метрикой.

§ 2. Мёбиусовы отображения

В полуметрическом пространстве $\mathscr{X}$ с полуметрикой ρ функция

$$R(T) = R(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{\rho(x_1, x_3)\rho(x_2, x_4)}{\rho(x_1, x_2)\rho(x_3, x_4)} = \frac{T_{1324}}{T_{1234}},$$

заданная на множестве $\tau_0\mathscr{X}$ всех невырожденных тетрад, известна как *абсолютное* (*двойное*) *отношение* (четверки точек) (см., например, [14, 1.26, с. 9]). Для краткости мы будем называть ее в этой статье *абсолютной характеристикой* тетрады T.

2.1. Абсолютная характеристика $R(T)$ инвариантна относительно следующих перестановок элементов тетрады T:

(i) $(x_1 \leftrightarrow x_2$ и $x_3 \leftrightarrow x_4)$,
(ii) $(x_1 \leftrightarrow x_3$ и $x_2 \leftrightarrow x_4)$,
(iii) $(x_1 \leftrightarrow x_4$ и $x_2 \leftrightarrow x_3)$.

Эти перестановки образуют в симметрической группе $\mathbf{S}_4$ ее подгруппу $\mathbf{N}$ — *четверную группу Клейна* (см., например, [15, 6.3.2, с. 158]).

Определение 2.2. Пусть $\mathscr{X}_1$, $\mathscr{X}_2$ — полуметрические пространства с полуметриками ρ_1 и ρ_2 соответственно. Инъективное отображение $f : \mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_2$ называется *мёбиусовым*, если оно сохраняет абсолютную характеристику невырожденных тетрад, т. е. $R(fT) = R(T)$ для любой тетрады $T = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \tau_0\mathscr{X}_1$ и ее образа $fT = (f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)) \in \tau_0\mathscr{X}_2$.

Теорема 2.3. *Инъективное отображение $f : \mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_2$ полуметрических пространств является мёбиусовым тогда и только тогда, когда оно сохраняет угловую характеристику любой тетрады $T \in \tau\mathscr{X}_1$.*

Доказательство. Если отображение f является мёбиусовым, то сохранение угловой характеристики невырожденной тетрады $T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ следует из ее выражения через абсолютные характеристики тетрад:

$$\sigma(T) = \left(\frac{T_{1234}}{T_{1324}} + \frac{T_{1423}}{T_{1324}}\right)^{-1} = (R(T^1) + R(T^2))^{-1}, \tag{2.3.1}$$

где $T^1 = (x_1, x_3, x_2, x_4)$ и $T^2 = (x_1, x_3, x_4, x_2)$. В случае вырожденной тетрады $T \in \tau\mathscr{X} \backslash \tau_0\mathscr{X}$ сохранение угловой характеристики (это 0 или 1) вытекает из 1.4(v),(vi) и инъективности f.

Пусть f сохраняет угловую характеристику тетрад. Для заданной невырожденной тетрады $T = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \tau_0\mathscr{X}_1$ рассмотрим тетраду $Q = (x_2, x_1, x_3, x_4)$ и введем обозначения

$$C = \frac{T_{1324}}{T_{1234}}; \quad D = \frac{T_{2314}}{T_{1234}}; \quad C' = \frac{fT_{1324}}{fT_{1234}}; \quad D' = \frac{fT_{2314}}{fT_{1234}}.$$

Имеем равенства

$$\sigma(T) = \frac{T_{1324}}{T_{1234} + T_{1423}} = \frac{C}{1 + D} = \sigma(fT) = \frac{C'}{1 + D'};$$

$$\frac{Q_{1324}}{Q_{1234} + Q_{1423}} = \sigma(Q) = \frac{T_{2314}}{T_{1234} + T_{2413}} = \frac{D}{1 + C} = \sigma(fQ) = \frac{D'}{1 + C'}.$$

Положив $C' = pC$ и $D' = qD$, получим соотношения $(q-p)D = p-1$ и $(p-q)C = q-1$, возможные лишь при $p = q = 1$. Следовательно, $R(T) = C = C' = R(fT)$, и f является мёбиусовым. Теорема доказана.

Теорема 2.4. *Пусть $\mathscr{X}$ — птолемеево пространство и $\sigma : \tau\mathscr{X} \to [0,1]$ — угловая характеристика. Тогда для любой пары непустых множеств $A, B \subset \mathscr{X}$, объединение которых является собственным неодноточечным подмножеством в $\mathscr{X}$, угловая метрика*

$$r_{AB}(x,y) = \sup_{a\in A, b\in B, a\neq b} \sigma(a,x,b,y)$$

на множестве $\mathscr{X} \setminus (A\cup B)$ мёбиусово инвариантна, т. е. для любого мёбиусова преобразования $\mu : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, $\mu(A) = A'$, $\mu(B) = B'$, выполняется равенство $r_{A'B'}(\mu(x), \mu(y)) = r_{AB}(x,y)$.

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из леммы 1.6 и теоремы 2.3. Теорема доказана.

2.5. Рассмотрим более детально четырехточечное полуметрическое пространство $\mathscr{X}$ и фиксируем тетраду $T = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \tau_0\mathscr{X}$. Семейство $\tau_0\mathscr{X}$ состоит из 24 невырожденных тетрад, получаемых из тетрады T действием на ее элементы симметрической группой перестановок $\mathbf{S}_4$. Подгруппа $\mathbf{L} \subset \mathbf{S}_4$ перестановок, сохраняющих угловую характеристику $\sigma(T)$, состоит из 8 перестановок и порождена двумя циклами $(13), (1234)$. Используя циклы $s_1 = (12)$ и $s_2 = (23)$, заметим, что угловая характеристика σ принимает на $\tau_0\mathscr{X}$ только три значения:

$$\sigma(T) = \frac{T_{1324}}{T_{1234} + T_{1423}}, \quad \sigma(s_1T) = \frac{T_{1423}}{T_{1234} + T_{1324}}, \quad \sigma(s_2T) = \frac{T_{1234}}{T_{1324} + T_{1423}},$$

которые, как легко увидеть, связаны равенством

$$\sigma(s_2T) = \frac{1 - \sigma(T)\sigma(s_1T)}{\sigma(T) + \sigma(s_1T) + 2\sigma(T)\sigma(s_1T)}, \tag{2.5.1}$$

справедливым при любом задании полуметрики ρ на $\mathscr{X}$. Поэтому наряду с *основной* угловой характеристикой тетрады $\sigma(T)$ нам достаточно рассмотреть *смежную* (к ней) угловую характеристику $\sigma^*(T) = \sigma(s_1T)$.

Заметим, что в обозначениях $\alpha_0 = 1/\sigma(T)$, $\alpha_1 = 1/\sigma(s_1T)$ и $\alpha_2 = 1/\sigma(s_2T)$ соотношение (2.5.1) записывается в виде равенства

$$\alpha_0\alpha_1\alpha_2 - (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2) = 2. \tag{2.5.2}$$

Таким образом, тетрады в полуметрическом пространстве можно интерпретировать как «треугольники», а равенство (2.5.2) — как основное свойство углов в таких «треугольниках».

Теорема 2.6. *Биективное отображение $f : T \to Q$ полуметрических тетрад $T = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ и $Q = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $f(x_j) = y_j$ $(j = 1,2,3,4)$, является мёбиусовым тогда и только тогда, когда $\sigma(Q) = \sigma(T)$ и $\sigma^*(Q) = \sigma^*(T)$, т. е. когда оно сохраняет основную и смежную угловые характеристики тетрады.*

Доказательство. Любая невырожденная тетрада на четырехточечном множестве $\mathscr{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ имеет вид sT, где $s \in \mathbf{S}_4$, при этом $f(sT) = sQ$. В силу формулы (2.5.1) условие $\sigma(T) = \sigma(Q)$ и $\sigma(s_1T) = \sigma(s_1Q)$ обеспечивает равенство $\sigma(s_2T) = \sigma(s_2Q)$. Следовательно, выполняется равенство $\sigma(sT) = \sigma(sQ)$ для любой перестановки $s \in \mathbf{S}_4$. Так как $sQ = f(sT)$, для любой тетрады $T' \in \tau_0\mathscr{X}$ справедливо равенство $\sigma(T') = \sigma(fT')$, т. е. f сохраняет основную угловую характеристику любой невырожденной тетрады в $\mathscr{X}$ и по теореме 2.3 оно является мёбиусовым отображением. Обратное утверждение очевидно вытекает из формулы (2.3.1), выражающей угловую характеристику через абсолютные характеристики тетрад. Теорема доказана.

Следствие 2.7. *Задание невырожденной тетрады T^0 на четырехточечном полуметрическом пространстве $\mathscr{X}$ (т. е. упорядочение множества $\mathscr{X}$) определяет изоморфизм между четверной группой Клейна $\mathbf{N} \subset \mathbf{S}_4$ и группой всех мёбиусовых преобразований $\mu : \mathscr{X} \to \mathscr{X}$, действующий по формуле $s \mapsto \mu_s$, где $\mu_s(T^0) = sT^0$.*

Теорема 2.8. *Четырехточечное полуметрическое пространство $\mathscr{X}$ мёбиусово вложимо в расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ (с хордовой метрикой) тогда и только тогда, когда оно является птолемеевым.*

Доказательство. Необходимость следует из того, что неравенство Птолемея сохраняется при мёбиусовых отображениях, а расширенная комплексная плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ с хордовым расстоянием изометрически вложима в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ и, следовательно, является птолемеевым пространством. Для доказательства достаточности возьмем в пространстве $\mathscr{X}$ невырожденную тетраду $T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ с абсолютной характеристикой $r = R(T) = T_{1324}/T_{1234}$ и положим $r_1 = T_{1423}/T_{1234}$. Неравенство Птолемея дает соотношения

$$r + r_1 = \frac{T_{1324} + T_{1423}}{T_{1234}} = \frac{1}{\sigma(s_2 T)} \geq 1; \quad \frac{r_1}{1+r} = \frac{T_{1423}}{T_{1234} + T_{1324}} = \sigma(s_1 T) \leq 1;$$

$$\frac{r}{1+r_1} = \frac{T_{1324}}{T_{1234} + T_{1423}} = \sigma(T) \leq 1,$$

из которых следует, что $r + r_1 \geq 1$ и $\left|r^2 + 1 - r_1^2\right| \leq 2r$. Следовательно, существует единственная точка $t \in \{z \in \mathbb{C} \backslash \{0,1\} : \operatorname{Im}\ z \geq 0\}$ такая, что $|t| = r$ и $|1-t| = r_1$, и эта точка есть

$$t = r \exp\left(i \cdot \arccos \frac{r^2 - r_1^2 + 1}{2r}\right). \tag{2.8.1}$$

Положив $Q = (q_1, q_2, q_3, q_4) = (0, 1, t, \infty)$, построим отображение $\mu : T \to Q$, $\mu(x_j) = q_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$. Так как

$$\sigma(Q) = |t|/(1 + |1-t|) = r/(1 + r_1) = \sigma(T),$$

$$\sigma^*(Q) = \sigma(s_1 Q) = |1-t|/(1+|t|) = r_1/(1+r) = \sigma(s_1 T) = \sigma^*(T),$$

отображение μ сохраняет основную и смежную угловые характеристики тетрады T и в силу теоремы 2.6 является мёбиусовым отображением. Теорема доказана.

Из теоремы 2.8 непосредственно вытекает следующий критерий птолемеевости полуметрического пространства.

Следствие 2.9. *Полуметрическое пространство является птолемеевым тогда и только тогда, когда любую четверку попарно различных точек в этом пространстве можно вложить мёбиусовым преобразованием в расширенную комплексную плоскость.*

2.10. Рассматривая отображение $\mu : T \to Q$, построенное в доказательстве теоремы 2.8, в качестве *канонического вложения* птолемеевой тетрады в комплексную плоскость, мы можем сопоставить каждой невырожденной птолемеевой тетраде $T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ ее *комплексную характеристику* $Z(T)$, определяемую в соответствии с (2.8.1) формулой

$$Z(T) = R(T) \exp^{i \cdot \arg(T)}, \quad \text{где } R(T) = \frac{\rho(x_1, x_3)\rho(x_2, x_4)}{\rho(x_1, x_2)\rho(x_3, x_4)};$$

$$\cos(\arg(T)) = \frac{\rho(x_1,x_3)^2\rho(x_2,x_4)^2 - \rho(x_2,x_3)^2\rho(x_1,x_4)^2 + \rho(x_1,x_2)^2\rho(x_3,x_4)^2}{2\rho(x_1,x_3)\rho(x_2,x_4)\rho(x_1,x_2)\rho(x_3,x_4)}. \tag{2.10.1}$$

При этом $R(T) = |Z(T)|$ и для любого мёбиусова преобразования f выполняется равенство $R(fT) = R(T)$. Приписав для вырожденных тетрад $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \tau\mathscr{X}$ с типом вырождения $x_3 = x_1$, $x_3 = x_2$ или $x_3 = x_4$ значение их комплексной характеристики $R(T)$, равное соответственно 0, 1 или ∞, мы получаем тем самым корректно заданное на множестве $\tau\mathscr{X}/\mathscr{M}$ всех невырожденных тетрад птолемеева пространства, факторизованном по отношению мёбиусовой эквивалентности, инъективное отображение в замкнутую верхнюю полуплоскость в $\overline{\mathbb{C}}$.

Отметим, что имеются и другие способы комплексификации абсолютного двойного отношения в пространстве $\mathbb{R}^n$ с использованием алгебры Клиффорда (см. [16]).

Теорема 2.11. *Пусть в полуметрическом пространстве $(\mathscr{X}, \rho)$ с полуметрикой ρ задана положительная вещественная функция $g(x)$. Вводя на множестве $\mathscr{X}$ новую полуметрику $\rho'(x,y) = \rho(x,y)/(g(x)g(y))$, получим новое полуметрическое пространство $(\mathscr{X}, \rho')$. Тогда тождественное отображение*

$$j : (\mathscr{X}, \rho) \to (\mathscr{X}, \rho'), \quad j(x) = x,$$

является мёбиусовым преобразованием полуметрических пространств. В частности, если пространство $(\mathscr{X}, \rho)$ птолемеево, то и пространство $(\mathscr{X}, \rho')$ также является птолемеевым.

Доказательство. Для любой тетрады $T = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \tau_0\mathscr{X}$ и ее образа jT имеем равенство

$$R(T) = \frac{T_{1324}}{T_{1234}} = \frac{g(x_1)g(x_2)g(x_3)g(x_4)T_{1324}}{g(x_1)g(x_2)g(x_3)g(x_4)T_{1234}} = \frac{jT_{1324}}{jT_{1234}} = R(jT).$$

Теорема доказана.

В этой теореме обобщено часто используемое свойство абсолютного двойного отношения в пространстве $\mathbb{R}^n$, вычисление которого как в евклидовой, так и в хордовой метриках приводит к одному и тому же результату (см., например, [12, § 3.2, с. 34]). Таким образом, умножение полуметрики на положительную функцию не выводит из класса мёбиусово эквивалентных полуметрических пространств, и с точки зрения мёбиусовой геометрии новое пространство ничем не отличается от исходного.

§ 3. Квазимёбиусовы отображения

Определение квазимёбиусова вложения, введенное в [17] (для подмножеств в $\mathbb{R}^n$) и в [18] (для метрических пространств), дословно переносится и на случай полуметрических пространств.

Определение 3.1. Любой гомеоморфизм $\eta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ числовой полуоси, удовлетворяющий условию $\eta(1) \geq 1$, называется *функцией искажения* (или *оценкой* искажения). При этом *сопряженной функцией искажения* к η называется функция $\tilde{\eta}(t) = 1/\eta(1/t)$, доопределенная равенством $\tilde{\eta}(0) = 0$. Инъективное отображение полуметрического пространства $\mathscr{X}$ в полуметрическое пространство $\mathscr{Y}$ называется *η-квазимёбиусовым*, если для любой невырожденной тетрады $T \in \tau_0\mathscr{X}$ выполняется неравенство $R(fT) \leq \eta(R(T))$, где R — абсолютная характеристика тетрады.

3.2. Отметим, что из выполнения неравенства $R(fT) \le \eta(R(T))$ для всех тетрад $T \in \tau_0\mathscr{X}$ следует выполнение обратного неравенства $R(fT) \ge \tilde\eta(R(T))$. Если $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ есть η-квазимёбиусово отображение на, то обратное к нему отображение также является квазимёбиусовым с функцией искажения $\eta^*(t) = 1/\eta^{-1}(1/t)$, $\eta^*(0) = 0$ (см. [18, с. 219]).

Утверждение 3.3. *Пусть $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ есть η-квазимёбиусово вложение полуметрических пространств. Тогда для любой тетрады $T = (a_1, b_1, a_2, b_2) \in \tau\mathscr{X}$ выполняется оценка*

$$(1/2)\tilde\eta(\sigma(T)) \le \sigma(fT) \le \eta(2\sigma(T)), \tag{3.3.1}$$

где $\tilde\eta(t) = 1/\eta(1/t)$, $\tilde\eta(0) = 0$.

Доказательство. Если $T \in \tau_0\mathscr{X}$, то, положив $T^1 = (a_1, a_2, b_1, b_2)$ и $T^2 = (a_1, a_2, b_2, b_1)$, получаем оценку

$$R(fT^1) + R(fT^2) \le \eta(R(T^1)) + \eta(R(T^2)) \le 2\eta(R(T^1) + R(T^2)) = 2\eta(1/\sigma(T)),$$

из которой вытекает левая половина требуемого неравенства:

$$\sigma(fT) = (R(fT^1) + R(fT^2))^{-1} \ge 1/2\eta(1/\sigma(T)) = (1/2)\tilde\eta(\sigma(T)).$$

В случае вырожденной тетрады $T \in \tau\mathscr{X} \setminus \tau_0\mathscr{X}$ ее угловая характеристика $\sigma(T)$ (принимающая значения 0 или 1) сохраняется при любом инъективном отображении. Правое неравенство в (3.3.1) получается применением доказанной оценки к обратному отображению $f^{-1} : f(\mathscr{X}) \to \mathscr{X}$, являющемуся η^*-квазимёбиусовым, с учетом равенства $\widetilde{\eta^*} = \eta^{-1}$. Утверждение доказано.

Утверждение 3.4. *Пусть инъективное отображение $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ птолемеевых пространств таково, что для любой тетрады $T \in \tau\mathscr{X}$ выполняется оценка*

$$\omega_1(\sigma(T)) \le \sigma(fT) \le \omega_2(\sigma(T)), \tag{3.4.1}$$

где $\omega_1, \omega_2 : [0, 1] \to [0, +\infty)$ — непрерывные монотонно возрастающие функции, $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$. Тогда f является η-квазимёбиусовым вложением с функцией искажения η, зависящей лишь от ω_1 и ω_2.

Доказательство. Так как оценка (3.4.1) должна выполняться и для вырожденных тетрад $T \in \tau\mathscr{X}\setminus\tau_0\mathscr{X}$, у которых $\sigma(T) = \sigma(fT) = 1$, функции ω_1 и ω_2 удовлетворяют неравенству $\omega_1(1) \le 1 \le \omega_2(1)$. Продолжив функцию $\omega_2(t)$ на всю полупрямую $[0, +\infty)$ по формуле $\omega_2(t) = \omega_2(1) + t - 1$ при $t \ge 1$, мы можем рассматривать ω_2 в качестве функции искажения.

Рассмотрим произвольную тетраду $T = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \tau_0\mathscr{X}$ и ее образ $fT \in \tau_0\mathscr{Y}$. Поскольку $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — птолемеевы пространства, по следствию 2.9 имеются мёбиусовы вложения $\mu : T \to \overline{\mathbb{C}}$ и $\nu : fT \to \overline{\mathbb{C}}$ такие, что

$$\mu(x_1) = \nu(f(x_1)) = 0, \quad \mu(x_2) = \nu(f(x_2)) = 1,$$

$$\mu(x_3) = z, \quad \nu(f(x_3)) = w, \quad \mu(x_4) = \nu(f(x_4)) = \infty.$$

Так как мёбиусовы преобразования не меняют угловой характеристики тетрады, для тетрад $Q = \mu(T) = (0, 1, z, \infty)$ и $Q' = \nu(fT) = (0, 1, w, \infty)$ с угловыми характеристиками

$$\sigma(T) = \sigma(Q) = \frac{|z|}{1 + |1 - z|}, \quad \sigma(fT) = \sigma(Q') = |w|/(1 + |1 - w|)$$

выполняется двойное неравенство

$$\omega_1\left(\frac{|z|}{1+|1-z|}\right) \le \frac{|w|}{1+|1-w|} \le \omega_2\left(\frac{|z|}{1+|1-z|}\right). \tag{3.4.2}$$

Рассмотрев аналогичным образом вторую смежную угловую характеристику $\sigma(s_2Q)$ тетрады Q, получим соотношение

$$\omega_1\left(\frac{1}{|z|+|1-z|}\right) \le \frac{1}{|w|+|1-w|} = \sigma(s_2Q) \le \omega_2\left(\frac{1}{|z|+|1-z|}\right). \tag{3.4.3}$$

Если $|1-w| \le 2$, то из правой части неравенства (3.4.2) получаем оценку $|w| \le (1+|1-w|)\omega_2(|z|) \le 3\omega_2(|z|)$. Если $|1-w| \ge 2$, то $|w| \ge |1-w|-1 \ge 1$; из левой половины неравенства (3.4.2) следует, что

$$1+|1-w| \le |w|+|1-w| \le \frac{1}{\omega_1(1/(|z|+|1-z|))} \le \frac{1}{\omega_1(1/(2|z|+1))},$$

и правая часть неравенства (3.4.2) дает оценку

$$|w| \le \frac{\omega_2(|z|)}{\omega_1(1/(2|z|+1))}.$$

Объединив оба рассмотренных случая и положив

$$\eta(t) = \omega_2(t)\cdot\max\left[3, \left(\omega_1\left(\frac{1}{2t+1}\right)\right)^{-1}\right],$$

мы получим непрерывную монотонно возрастающую функцию $\eta : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$, $\eta(0) = 0$, такую, что $\eta(1) \ge 3\omega_2(1) > 1$, для которой выполняется требуемая оценка искажения абсолютной характеристики тетрады T:

$$R(fT) = R(Q') = |w| \le \eta(|z|) = \eta(R(Q)) = \eta(R(T)).$$

Утверждение доказано.

Возникает естественный вопрос: можно ли в условиях утверждения 3.4 обойтись односторонней оценкой, отбросив левую половину неравенства (3.4.1)? Следующий пример показывает, что даже для множеств на плоскости односторонняя оценка искажения угловой характеристики не гарантирует существования оценки квазимёбиусовости отображения f, зависящей лишь от ω_2.

Пример 3.5. Рассмотрим в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ четырехточечное пространство $\mathscr{X} = \{0,1,i,\infty\}$ и семейство $\mathscr{F}$ отображений $f_N : \mathscr{X} \to \overline{\mathbb{C}}$, $N = 1,2,\ldots$, заданных равенствами $f_N(0) = 0$, $f_N(1) = 1$, $f_N(\infty) = \infty$, $f_N(i) = Ni$. На множестве $\tau\mathscr{X}$ всех тетрад в $\mathscr{X}$ угловая характеристика σ может принимать лишь значения $0, (1+\sqrt{2})^{-1}, (\sqrt{2})^{-1}$ и 1. Соответствующее множество значений угловой характеристики образов этих тетрад есть

$$\{0, N(1+\sqrt{1+N^2})^{-1}, \sqrt{1+N^2}(1+N)^{-1}, (N+\sqrt{1+N^2})^{-1}, 1\}.$$

При этом в силу инъективности отображения в случае вырожденных тетрад в $\mathscr{X}$ выполняется равенство $\sigma(T) = \sigma(f_NT)$ ($= 0$ или 1). Для любой невырожденной тетрады $T \in \tau_0\mathscr{X}$ имеем оценку $\sigma(T) \ge (1+\sqrt{2})^{-1}$, тогда как $\sigma(f_NT) \le 1$. Следовательно, для любого отображения $f_N \in \mathscr{F}$ и для любой тетрады $T \in \tau\mathscr{X}$ верна оценка

$$\sigma(f_NT) \le (1+\sqrt{2})\sigma(T) = \omega_2(\sigma(T))$$

с функцией искажения $\omega_2(t) = (1+\sqrt{2})t$. Так как для тетрады $Q = (0,1,i,\infty)$ выполняются равенства $R(Q) = 1$, $R(f_NQ) = N$, не может существовать зависящей только от ω_2 (но не от N) оценки искажения абсолютной характеристики тетрады для всего семейства отображений $\mathscr{F}$ (хотя каждое из отображений f_N является квазимёбиусовым с функцией искажения, зависящей от N).

Теорема 3.6. *При любом η-квазимёбиусовом вложении $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ полуметрических пространств для любой пары непустых множеств $B_1, B_2 \subset \mathscr{X}$ таких, что $B_1 \cup B_2$ содержит более одной точки, неравенство*

$$(1/2)\tilde{\eta}(r_{B_1B_2}(x,y)) \le r_{fB_1fB_2}(f(x),f(y)) \le \eta(2r_{B_1B_2}(x,y)) \tag{3.6.1}$$

выполняется для всех точек $x, y \in \mathscr{X}\backslash(B_1 \cup B_2)$. (Заметим, что если $\mathscr{X}$ не птолемеево, то функция $r_{B_1B_2}(x,y)$ является в общем случае полуметрикой.)

Доказательство. Для любой пары различных точек $x, y \in \mathscr{X}\backslash(B_1 \cup B_2)$ рассмотрим произвольную тетраду $T = (x, b_1, y, b_2)$, где $b_1 \in B_1$, $b_2 \in B_2$ и $b_1 \ne b_2$. В силу оценки (3.3.1) выполняется неравенство

$$r_{fB_1fB_2}(f(x),f(y)) \ge \sigma(fT) \ge (1/2)\tilde{\eta}(\sigma(x,b_1,y,b_2)).$$

Взяв в правой части этого неравенства супремум по всем $b_1 \in B_1$ и $b_2 \in B_2$ таким, что $b_1 \ne b_2$, и использовав монотонность функции искажения, получаем левую половину оценки (3.6.1). Правое неравенство выводится применением уже доказанной левой оценки к обратному отображению $f^{-1} : f(\mathscr{X}) \to \mathscr{X}$. Теорема доказана.

Теорема 3.7. *Пусть инъективное отображение $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ птолемеевых пространств таково, что для любой пары непустых множеств $B_1, B_2 \subset \mathscr{X}$, объединение которых $B_1 \cup B_2$ не является одноточечным множеством, при всех $x, y \in \mathscr{X}\backslash(B_1 \cup B_2)$ выполняется двойное неравенство*

$$\omega_1(r_{B_1B_2}(x,y)) \le r_{fB_1fB_2}(f(x),f(y)) \le \omega_2(r_{B_1B_2}(x,y)) \tag{3.7.1}$$

с заданными непрерывными монотонно возрастающими функциями $\omega_1, \omega_2 : [0,1] \to [0,\infty)$, $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$, не зависящими от выбора множеств B_1, B_2. Тогда отображение f является η-квазимёбиусовым с функцией искажения η, зависящей лишь от ω_1, ω_2.

Доказательство. Для произвольно заданной тетрады $T = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \tau_0(\mathscr{X})$ положим $B_1 = \{x_2\}$ и $B_2 = \{x_4\}$. Так как

$$r_{B_1B_2}(x_1,x_3) = \max\{\sigma(x_1,x_2,x_3,x_4), \sigma(x_1,x_4,x_3,x_2)\} = \sigma(T)$$

и аналогично $r_{fB_1fB_2}(f(x_1),f(x_3)) = \sigma(fT)$, соотношение (3.7.1) дает для любой тетрады $T \in \tau_0\mathscr{X}$ выполнение двойного неравенства $\omega_1(\sigma(T)) \le \sigma(fT) \le \omega_2(\sigma(T)$ и требуемое свойство квазимёбиусовости отображения f следует из утверждения 3.4. Теорема доказана.

3.8. В полугруппе всех функций искажения естественно выделить подполугруппу линейных функций искажения, т. е. функций искажения вида $\eta(t) = Kt$ с $K \ge 1$. Это приводит к выделению в классе всех квазимёбиусовых вложений полуметрических пространств подкласса инъективных отображений $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, для которых оценка $R(fT) \le K \cdot R(T)$ выполняется для всех тетрад $T \in \tau_0\mathscr{X}$. Следуя [19, § 4, с. 103], мы можем назвать такие отображения *мёбиусово-билипшицевыми*, а коэффициент K линейной функции искажения абсолютной характеристики тетрад естественно назвать *коэффициентом мёбиусовой билипшицевости*. В отличие от традиционного определения коэффициента билипшицевости коэффициент мёбиусовой билипшицевости инвариантен относительно мёбиусовых преобразований.

Замечание 3.9. Теоремы 3.6 и 3.7 подсказывают, что понятие квазимёбиусовости можно ввести естественным образом, модифицируя понятие равномерной непрерывности для отображений в биметрических пространствах. Напомним, что отображение $f : \mathscr{M}_1 \to \mathscr{M}_2$ метрического пространства $(\mathscr{M}_1, \rho_1)$ в метрическое пространство $(\mathscr{M}_2, \rho_2)$ называется равномерно непрерывным, если существует монотонно возрастающая непрерывная функция $\omega : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $\omega(0) = 0$, $\omega(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$ такая, что для любой пары точек $x, y \in \mathscr{M}_1$ выполняется оценка $\rho_2(f(x), f(y)) \le \omega(\rho_1(x, y))$. В случае инъективного отображения f требование равномерной непрерывности как для f, так и для f^{-1} равносильно наличию двусторонней оценки

$$\omega_1(\rho_1(x, y)) \le \rho_2(f(x), f(y)) \le \omega_2(\rho_1(x, y)).$$

Прямая модификация этого свойства для инъективного отображения $f : \mathscr{X}_1 \to \mathscr{X}_2$ биметрического пространства $(\mathscr{X}_1, \sigma)$ в биметрическое пространство $(\mathscr{X}_2, \sigma^*)$ состоит в выполнении для всех невырожденных тетрад $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathscr{X}_1$ двойного неравенства

$$\omega_1(\sigma(x_1, y_1, x_2, y_2)) \le \sigma^*(f(x_1), f(y_1), f(x_2), f(y_2)) \le \omega_2(\sigma(x_1, y_1, x_2, y_2)),$$

где $\omega_1(t), \omega_2(t)$ — вещественные непрерывные монотонно возрастающие функции, заданные при $t \ge 0$, $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$, и не зависящие от выбора тетрады в $\mathscr{X}_1$. В частном случае, когда биметрики σ и σ^* порождены полуметриками по формуле (1.3.1), получаем в силу теорем 3.6 и 3.7 в точности класс квазимёбиусовых вложений.

§ 4. Обобщенные углы

Рассмотрим теперь вопросы, связанные с искажением углов при квазимёбиусовых вложениях.

Определение 4.1. *Обобщенным углом* в полуметрическом пространстве $\mathscr{X}$ будем называть четверку непустых множеств $\Phi = (A_1, B_1, A_2, B_2)$. Множества B_1, B_2 называются *вершинами*, а множества A_1, A_2 — *сторонами* обобщенного угла Φ. Мы называем обобщенный угол *невырожденным*, если множество $B_1 \cup B_2$ содержит более одной точки и не пересекается с множеством $A_1 \cup A_2$. *Величиной* $\alpha(\Phi)$ невырожденного обобщенного угла Φ мы называем число

$$\alpha(\Phi) = \inf_{a_1 \in A_1, a_2 \in A_2} \sup_{b_1 \in B_1, b_2 \in B_2} \frac{\rho(a_1, a_2)\rho(b_1, b_2)}{\rho(a_1, b_1)\rho(a_2, b_2) + \rho(a_1, b_2)\rho(a_2, b_1)}. \tag{4.1.1}$$

Если пространство $\mathscr{X}$ птолемеево, то величина обобщенного угла $\alpha(\Phi)$ удовлетворяет неравенству $0 \le \alpha(\Phi) \le 1$ и может быть в общем случае определена формулой

$$\alpha(\Phi) = \inf_{x \in A_1, y \in A_2} r_{B_1 B_2}(x, y), \tag{4.1.2}$$

которая показывает, что это есть обычная *дистанция* между его сторонами A_1, A_2 в угловой (полу)метрике, определяемой вершинами этого угла.

Теорема 4.2. *При любом η-квазимёбиусовом вложении $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ полуметрических пространств для всех невырожденных обобщенных углов $\Phi = (A_1, B_1, A_2, B_2)$ в $\mathscr{X}$ выполняется оценка*

$$(1/2)\tilde{\eta}(\alpha(\Phi)) \le \alpha(f\Phi) \le \eta(2\alpha(\Phi)). \tag{4.2.1}$$

Доказательство. Так как для любой пары точек $x \in A_1$, $y \in A_2$ имеем (в силу теоремы 3.5) неравенство $\alpha(f\Phi) \le r_{fB_1fB_2}(f(x), f(y)) \le \eta(2r_{B_1B_2}(x,y))$, взяв в его правой части инфимум по всем $x \in A_1, y \in A_2$, получим (с учетом монотонности функции η) правую половину требуемой оценки (4.2.1). Аналогично, используя левую часть в соотношении (3.6.1), приходим к неравенству

$$(1/2)\tilde{\eta}(\alpha(\Phi)) \le (1/2)\tilde{\eta}(r_{B_1B_2}(x,y)) \le r_{fB_1fB_2}(f(x), f(y)).$$

Взяв инфимум по всем $x \in A_1, y \in A_2$, получим левую часть оценки (4.2.1). Теорема доказана.

Понятие обобщенного угла позволяет рассмотреть вопрос об оценке *обратного искажения углов* при неинъективных отображениях полуметрических пространств. В качестве примера рассмотрим частный случай задачи искажения обобщенного угла при ортогональных проекциях пространства $\mathbb{R}^n$.

Утверждение 4.3 [12, § 3.3, с. 35]. *Пусть задана k-мерная плоскость $\mathscr{L} \subset \mathbb{R}^n$, $1 \le k \le n-1$. Тогда для любого мёбиусова преобразования $\mu : \overline{\mathscr{L}} \to \overline{\mathscr{L}} = \mathscr{L} \cup \{\infty\}$ существует и единственно мёбиусово преобразование $\hat{\mu} : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^n$ пространства $\overline{\mathbb{R}}^n$ такое, что*

(i) *$\hat{\mu}(x) = \mu(x)$ для всех $x \in \overline{\mathscr{L}}$;*

(ii) *для любого ненулевого вектора $\vec{j}$, ортогонального плоскости $\mathscr{L}$, преобразование $\hat{\mu}$ оставляет инвариантной $(k+1)$-мерную полуплоскость $\mathscr{P}_{\vec{j}} = \{u + t\vec{j} :\ u \in \mathscr{L}, t > 0\}$.*

Преобразование $\hat{\mu}$, обладающее свойствами (i) и (ii), называется *продолжением Пуанкаре* преобразования μ.

Утверждение 4.4. *Пусть заданы k-мерная плоскость $\mathscr{L} \subset \mathbb{R}^n$ ($1 \le k \le n-1$) и орт $\vec{e}$, ортогональный $\mathscr{L}$. Пусть преобразование τ сопоставляет каждой точке $x \in \overline{\mathbb{R}}^n$ ее ортогональную проекцию $\tau(x) \in \overline{\mathscr{L}}$ на плоскость $\overline{\mathscr{L}}$ (т. е. $|\tau(x) - x| = \min\{|x - v| :\ v \in \mathscr{L}\}$ при $x \in \mathbb{R}^n$ и $\tau(\infty) = \infty$). Наконец, пусть преобразования $\lambda_\pm$ заданы формулой $\lambda_\pm(x) = \tau(x) \pm |x - \tau(x)|\vec{e}$ при $x \in \mathbb{R}^n$ и $\lambda_\pm(\infty) = \infty$. Тогда для любого мёбиусова преобразования $\mu : \overline{\mathscr{L}} \to \overline{\mathscr{L}}$ выполняются равенства*

$$\lambda_+ \circ \hat{\mu} = \hat{\mu} \circ \lambda_+; \quad \lambda_- \circ \hat{\mu} = \hat{\mu} \circ \lambda_-. \tag{4.4.1}$$

При этом для любых $a, b \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{|\hat{\mu}(a) - \hat{\mu}(b)|}{|\lambda_+(\hat{\mu}(a)) - \lambda_-(\hat{\mu}(b))|} = \frac{|a-b|}{|\lambda_+(a) - \lambda_-(b)|}. \tag{4.4.2}$$

Доказательство. Так как $\lambda_+ = \mathrm{id} = \lambda_-$ на $\overline{\mathscr{L}}$, то $\hat{\mu} \circ \lambda_+ = \hat{\mu} = \mu = \hat{\mu} \circ \lambda_-$ и $\lambda_+ \circ \hat{\mu} = \lambda_+ \circ \mu = \mu = \lambda_- \circ \hat{\mu}$ на $\overline{\mathscr{L}}$. Следовательно, на $\overline{\mathscr{L}}$ равенства (4.4.1) выполняются. Пусть $x_0 \ne \overline{\mathscr{L}}$. Тогда $x_0 \in \mathscr{P}_{\vec{n}}$ с некоторым ортом $\vec{n}$, ортогональным $\mathscr{L}$. Построим мёбиусовы преобразования (евклидовы изометрии) $V_\pm : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^n$, тождественные на $\overline{\mathscr{L}}$ и переводящие $\mathscr{P}_{\vec{n}}$ соответственно в $\mathscr{P}_{\pm\vec{e}}$. Так как преобразование $V_\pm^{-1} \circ \hat{\mu} \circ V_\pm$ удовлетворяет условиям (i), (ii) в утверждении 4.3, оно является продолжением Пуанкаре для μ и, следовательно, совпадает с $\hat{\mu}$, т. е. $V_\pm \circ \hat{\mu} = \hat{\mu} \circ V_\pm$. Поскольку $\lambda_\pm(x_0) = V_\pm(x_0)$, то

$$\hat{\mu}(\lambda_\pm(x_0)) = \hat{\mu}(V_\pm(x_0)) = V_\pm(\hat{\mu}(x_0)) = \lambda_\pm(\hat{\mu}(x_0))$$

(последнее равенство вытекает из того, что $V_\pm = \lambda_\pm$ на $\mathscr{P}_{\vec{n}}$, а $\hat{\mu}(x_0) \in \mathscr{P}_{\vec{n}}$). В силу произвольности $x_0 \ne \overline{\mathscr{L}}$ это и доказывает равенства (4.4.1).

Если $\mu(\infty)=\infty$, то $\hat\mu$ есть евклидово подобие с некоторым коэффициентом $L>0$. Поэтому $|\hat\mu(a)-\hat\mu(b)|=L|a-b|$ и в силу (4.4.1)

$$|\lambda_+(\hat\mu(a))-\lambda_-(\hat\mu(b))|=|\hat\mu(\lambda_+(a))-\hat\mu(\lambda_-(b))|=L|\lambda_+(a)-\lambda_-(b)|,$$

что и дает нам равенство (4.4.2). Пусть теперь $w=\hat\mu(\infty)\in\mathscr{L}$. Если $a\in\mathscr{L}$ и $b\in\mathscr{L}$, то обе части равенства (4.4.2) равны 1, и (4.4.2) тривиально верно. Тем самым, не ограничивая общности, можно считать, что $a\neq\mathscr{L}$. Положив $x_0=a$, рассмотрим евклидовы изометрии $V_\pm$, построенные в первой части доказательства. Так как $V_\pm(w)=w$, то $|\lambda_-(\hat\mu(b))-w|=|V_+(\hat\mu(b))-w|$. Поэтому

$$\frac{|\hat\mu(a)-\hat\mu(b)|}{|\lambda_+(\hat\mu(a))-\lambda_-(\hat\mu(b))|}=\frac{|V_+(\hat\mu(a))-V_+(\hat\mu(b))|\cdot|\lambda_-(\hat\mu(b))-w|}{|\lambda_+(\hat\mu(a))-\lambda_-(\hat\mu(b))|\cdot|V_+(\hat\mu(b))-w|}$$

$$=\frac{|\lambda_+(\hat\mu(a))-V_+(\hat\mu(b))|\cdot|\lambda_-(\hat\mu(b))-w|}{|\lambda_+(\hat\mu(a))-\lambda_-(\hat\mu(b))|\cdot|V_+(\hat\mu(b))-w|}=R(\lambda_+(\hat\mu(a)),\lambda_-(\hat\mu(b)),V_+(\hat\mu(b)),w).$$

В силу (4.4.1) $\hat\mu$ коммутирует с λ_+, λ_- и V, так что мёбиусова инвариантность абсолютной характеристики дает равенство

$$R(\lambda_+(\hat\mu(a)),\lambda_-(\hat\mu(b)),V_+(\hat\mu(b)),w)=R(\hat\mu(\lambda_+(a)),\hat\mu(\lambda_-(b)),\hat\mu(V_+(b)),\hat\mu(\infty))$$

$$=R(\lambda_+(a),\lambda_-(b),V_+(b),\infty)=\frac{|V_+(a)-V_+(b)|}{|\lambda_+(a)-\lambda_-(b)|}=\frac{|a-b|}{|\lambda_+(a)-\lambda_-(b)|}.$$

Тем самым равенство (4.4.2) и утверждение 4.4 доказаны.

Следующая теорема дает обобщение формулы (1.7.2) на случай пространств большей размерности.

Теорема 4.5. *Пусть $\mathscr{L}$ есть k-мерная плоскость в пространстве $\mathbb{R}^n$, $1\le k\le n-1$. Тогда для любой пары точек $x,y\in\mathbb{R}^n\setminus\mathscr{L}$*

$$r_{\mathscr{L}}(x,y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{d^2+(h_x+h_y)^2}},\tag{4.5.1}$$

где h_x, h_y — евклидовы расстояния от точек x,y до плоскости $\mathscr{L}$ и d — евклидово расстояние между их ортогональными проекциями на эту плоскость.

Доказательство. Для пары точек $a,b\in\mathbb{R}^n\setminus\mathscr{L}$ используем обозначения, введенные при доказательстве утверждения 4.4. Для любой точки $w\in\mathscr{L}$ справедливо соотношение

$$\sigma(a,w,b,\infty)=\frac{|a-b|}{|a-w|+|w-b|}=\frac{|a-b|}{|\lambda_+(a)-w|+|w-\lambda_-(b)|}\le\frac{|a-b|}{|\lambda_+(a)-\lambda_-(b)|},$$

при этом равенство реализуется, если в качестве точки w взять точку пересечения отрезка $[\lambda_+(a),\lambda_-(b)]$ с плоскостью $\mathscr{L}$. Следовательно,

$$\sup_{w\in\mathscr{L}}\sigma(a,w,b,\infty)=\frac{|a-b|}{|\lambda_+(a)-\lambda_-(b)|}.\tag{4.5.2}$$

Для произвольной пары точек $u,v\in\mathscr{L}$ построим мёбиусово преобразование $\mu:\overline{\mathscr{L}}\to\overline{\mathscr{L}}$, переводящее точку v в ∞. Применяя (4.5.2) к точкам $\hat\mu(a)$, $\hat\mu(b)$ и используя (4.4.2), получим соотношение

$$\sigma(a,u,b,v)=\sigma(\hat\mu(a),\hat\mu(u),\hat\mu(b),\infty)\le\frac{|\hat\mu(a)-\hat\mu(b)|}{|\lambda_+(\hat\mu(a))-\lambda_-(\hat\mu(b))|}=\frac{|a-b|}{|\lambda_+(a)-\lambda_-(b)|}.$$

Следовательно,

$$\frac{|a-b|}{|\lambda_+(a)-\lambda_-(b)|}=\sup_{w\in\mathscr{L}}\sigma(a,w,b,\infty)\le r_{\mathscr{L}}(a,b)\le\frac{|a-b|}{|\lambda_+(a)-\lambda_-(b)|},$$

и с учетом (4.5.2) мы приходим к требуемому равенству. Теорема доказана.

Теорема 4.6. *Пусть T_0,T_1,T_2 — k-мерные параллельные и попарно различные плоскости в пространстве $\mathbb{R}^n$, $1\le k\le n-1$. Тогда для обобщенных углов $\Phi=(T_1,\overline{T}_0,T_2,\overline{T}_0)$ и $\Phi'=(T_1,\overline{T}_0,T_2,\{\infty\})$ справедлива формула*

$$\alpha(\Phi)=\alpha(\Phi')=\frac{\operatorname{dist}(T_1,T_2)}{\operatorname{dist}(T_1,T_0)+\operatorname{dist}(T_2,T_0)},\tag{4.6.1}$$

где dist *обозначает евклидово расстояние между параллельными плоскостями.*

Доказательство. Фиксируем в пространстве $\mathbb{R}^n$ $(n-k)$-мерную плоскость T', ортогональную плоскостям T_0,T_1,T_2, и обозначим через t_0,t_1,t_2 точки в T', являющиеся проекциями соответствующих плоскостей T_0,T_1,T_2 на плоскость T'. Тогда

$$\operatorname{dist}(T_i,T_j)=|t_i-t_j|\quad(i,j=0,1,2).$$

По теореме 4.5 для любой пары точек $a_1\in T_1$ и $a_2\in T_2$ имеем оценку (здесь d — расстояние между проекциями точек a_1,a_2 на T_0)

$$r_{\overline{T}_0}(a_1,a_2)=\frac{|a_1-a_2|}{\sqrt{d^2+(|t_1-t_0|+|t_2-t_0|)^2}}\ge\frac{|t_1-t_2|}{\sqrt{d^2+(|t_1-t_0|+|t_2-t_0|)^2}}.$$

Так как

$$r_{\overline{T}_0}(t_1,t_2)\ge\alpha(\Phi)=\inf_{a_1\in T_1,a_2\in T_2}r_{\overline{T}_0}(a_1,a_2)$$

$$\ge\inf_{a_1\in T_1,a_2\in T_2}\frac{|t_1-t_2|}{\sqrt{d^2+(|t_1-t_0|+|t_2-t_0|)^2}}=\frac{|t_1-t_2|}{|t_1-t_0|+|t_2-t_0|}=r_{\overline{T}_0}(t_1,t_2),$$

то

$$\alpha(\Phi)=r_{\overline{T}_0}(t_1,t_2)=|t_1-t_2|/(|t_1-t_0|+|t_2-t_0|).$$

Поскольку при любых $a_1\in T_1,a_2\in T_2$ имеем равенство

$$r_{T_0\{\infty\}}(a_1,a_2)=\sup_{v\in T_0}\sigma(a_1,v,a_2,\{\infty\})=\sup_{v\in T_0}\frac{|a_1-a_2|}{|a_1-v|+|a_2-v|}=r_{\overline{T}_0}(a_1,a_2),$$

взяв инфимум по $a_1\in T_1,a_2\in T_2$, получим требуемое соотношение (4.6.1):

$$\alpha(\Phi')=\alpha(\Phi)=|t_1-t_2|/(|t_1-t_0|+|t_2-t_0|).$$

Теорема доказана.

Следствие 4.7. *Пусть* $\pi : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^k$ — *ортогональная проекция пространства* $\mathbb{R}^n$ *на его подпространство* $\mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^n$, $1 \le k \le n-1$, $\pi(\infty) = \infty$. *Тогда для любой точки* $t_0 \in \mathbb{R}^k$ *и любой пары множеств* $B_1, B_2 \in \mathbb{R}^k \backslash \{t_0\}$ *величи́ны обобщенных углов*

$$\Phi = (B_1, \{t_0\}, B_2, \{\infty\}) \quad и \quad \pi^{-1}\Phi = (\pi^{-1}(B_1), \pi^{-1}(\{t_0\}), \pi^{-1}(B_1), \pi^{-1}(\{\infty\}))$$

равны, т. е. $\alpha(\pi^{-1}\Phi) = \alpha(\Phi)$.

Доказательство. Положим $\pi^{-1}(\{t_0\}) = T_0$. Для произвольной пары точек $t_1 \in B_1$ и $t_2 \in B_2$ положим $T_1 = \pi^{-1}(\{t_1\})$, $T_2 = \pi^{-1}(\{t_2\})$. Тогда, используя теорему 4.6, получаем требуемое равенство:

$$\alpha(\pi^{-1}\Phi) = \inf_{t_1 \in B_1, t_2 \in B_2} \alpha(T_1, T_0, T_2, \{\infty\}) = \inf_{t_1 \in T_1, t_2 \in T_2} \frac{|t_1 - t_2|}{|t_1 - t_0| + |t_2 - t_0|} = \alpha(\Phi).$$

Следствие доказано.

Отметим, что чуть более общий случай угла $\Phi = (B_1, A_0, B_2, \{\infty\})$ с неодноточечной вершиной A_0 уже требует дополнительного исследования вопроса о равенстве $\alpha(\pi^{-1}\Phi) = \alpha(\Phi)$.

§ 5. Приложения к квазимероморфным отображениям

В этом параграфе мы используем понятие K-*квазимероморфного* ($K \ge 1$) отображения $f : G \to \overline{\mathbb{R}}^n$ области $G \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, введенного в [20, § 2, с. 3] (см. также [21, 22]). При этом мы ограничимся рассмотрением случая, когда $G = \overline{\mathbb{R}}^n \backslash F$, где F — компактное множество *нулевой емкости* (см. [20, 2.12, с. 6] или [14, 7.12, с. 85]). Пустое множество считается по определению множеством нулевой емкости. *Конденсатором* в $\overline{\mathbb{R}}^n$ мы называем пару (E_1, E_2) непустых непересекающихся компактных множеств $E_1, E_2 \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ и обозначаем символом $\mathrm{Cap}(E_1, E_2)$ *конформную емкость* конденсатора (E_1, E_2) (см. [20, 2.1, с. 4] или [14, 7.9, с. 84, 85]).

5.1. (i) Для любого конденсатора (E_1, E_2) верно равенство $\mathrm{Cap}(E_1, E_2) = \mathrm{Cap}(E_2, E_1)$.

(ii) Для любого компактного множества E нулевой емкости такого, что $E \cap E_1 = \varnothing$, выполняется равенство $\mathrm{Cap}(E_1, E_2 \cup E) = \mathrm{Cap}(E_1, E_2)$ (см. [20, лемма 2.14, с. 6]).

(iii) Для любого мёбиусова преобразования $\mu : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^n$ и любого конденсатора (E_1, E_2) справедливо равенство $\mathrm{Cap}(\mu E_1, \mu E_2) = \mathrm{Cap}(E_1, E_2)$.

5.2. Символом $\mathscr{T}_n(t)$ мы обозначаем *функцию Тейхмюллера* — положительную непрерывную монотонно убывающую функцию на $(0, +\infty)$, являющуюся конформной емкостью экстремальной кольцевой области Тейхмюллера в $\mathbb{R}^n$ с параметром $t > 0$ (см. [14, 7.18, с. 88]). Если в конденсаторе (E_1, E_2) имеются точки $a, b \in E_1$, соединенные континуумом в E_1, и точки $c, d \in E_2$, соединенные континуумом в E_2, то для конформной емкости этого конденсатора справедлива нижняя оценка (см. [14, лемма 7.35, с. 94])

$$\mathrm{Cap}(E_1, E_2) \ge \mathscr{T}_n(R(a, b, c, d)), \tag{5.2.1}$$

где $R(a, b, c, d)$ — абсолютная характеристика тетрады $T = (a, b, c, d)$, т. е. $R(T) = T_{1324}/T_{1234}$.

Лемма 5.3 (см. аналог в [14, лемма 7.41, с. 96]). *Пусть в конденсаторе (E_1, E_2) множество E_2 является невырожденным континуумом, а точки $a, b \in E_1$, $a \neq b$, можно соединить некоторым континуумом $\gamma \subset E_1$. Тогда*

$$\operatorname{Cap}(E_1, E_2) \geq \mathscr{T}_n(1/r_{E_2}(a, b)). \tag{5.3.1}$$

Доказательство. Символом $q(x, y)$ обозначаем хордовое расстояние в пространстве $\overline{\mathbb{R}}^n$. Так как $a \neq b$, то $r_{E_2}(a, b) = \delta > 0$. Для произвольно заданного $\delta' \in (0, \delta)$ найдутся точки $c, d \in E_2$, для которых

$$\frac{1}{R(a, b, c, d)} = \frac{q(c, d)q(a, b)}{q(a, c)q(b, d)} \geq \sigma(c, a, d, b) = \frac{q(c, d)q(a, b)}{q(a, c)q(b, d) + q(b, c)q(a, d)} \geq \delta'.$$

Используя включение $\gamma \subset E_1$, оценку (5.2.1), примененную к конденсатору (γ, E_2), и полученное выше неравенство с учетом монотонного убывания функции $\mathscr{T}_n$, приходим к оценке

$$\operatorname{Cap}(E_1, E_2) \geq \operatorname{Cap}(\gamma, E_2) \geq \mathscr{T}_n(R(a, b, c, d)) \geq \mathscr{T}_n(1/\delta').$$

В силу произвольности $\delta' < \delta$ отсюда вытекает требуемое неравенство (5.3.1). Лемма доказана.

Лемма 5.4 [20, 2.3, с. 4]. *Если $f : G \to \overline{\mathbb{R}}^n$ — непостоянное K-квазимероморфное отображение области $G \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, то для любого открытого множества $A \subset G$ и его компактного подмножества $E \subset A$ конформные емкости конденсатора $(E, \overline{\mathbb{R}}^n \backslash A)$ и его «образа» $(fE, \overline{\mathbb{R}}^n \backslash fA)$ связаны соотношением*

$$\operatorname{Cap}(fE, \mathbb{R}^n \backslash fA) \leq K \cdot \operatorname{Cap}(E, \mathbb{R}^n \backslash A). \tag{5.4.1}$$

5.5. В частности, если $\overline{\mathbb{R}}^n \backslash G$ есть множество нулевой емкости, то $\overline{\mathbb{R}}^n \backslash fG$ также является множеством нулевой емкости.

5.6. Наконец, напомним формулу для конформной емкости правильного шарового слоя в $\mathbb{R}^n$: для любых $0 < R_1 < R_2 < +\infty$

$$\operatorname{Cap}(\{|x| \leq R_1\}, \{|x| \geq R_2\}) = \Omega_{n-1} \left[\operatorname{Ln} \frac{R_2}{R_1}\right]^{1-n}, \tag{5.6.1}$$

где Ω_{n-1} есть $(n-1)$-мерная мера единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 5.7. *Пусть область $G \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ такова, что $\overline{\mathbb{R}}^n \setminus G$ есть множество нулевой емкости. Пусть $f : G \to \overline{\mathbb{R}}^n$ — непостоянное K-квазимероморфное отображение. Тогда для любого невырожденного континуума $\Gamma \subset f(G)$ и любой пары точек $y_1, y_2 \in f(G) \backslash \Gamma$ выполняется оценка*

$$\alpha(f^{-1}(\{y_1\}), f^{-1}(\Gamma), f^{-1}(\{y_2\}), f^{-1}(\Gamma) \geq \omega(r_\Gamma(y_1, y_2)) \tag{5.7.1}$$

с функцией $\omega : [0, 1] \to [0, +\infty)$, $\omega(0) = 0$, заданной формулой

$$\omega(t) = \min\left\{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\exp\left(-\left[\frac{K \cdot \Omega_{n-1}}{\mathscr{T}_n(1/t)}\right]^{\frac{1}{n-1}}\right)\right\}. \tag{5.7.2}$$

Доказательство. Пусть $r_\Gamma(y_1, y_2) = \varepsilon > 0$. Положив $\Gamma' = f^{-1}(\Gamma)$ и $A_1 = f^{-1}(\{y_1\})$, $A_2 = f^{-1}(\{y_2\})$, получим невырожденный обобщенный угол

$\Psi = (A_1, \Gamma', A_2, \Gamma')$. Если $\alpha(\Psi) \geq 1/5$, то требуемое неравенство (5.7.1) тривиально верно. Рассмотрим ситуацию, когда $\alpha(\Psi) = \delta < 1/5$. В силу определения (4.1.1) величины $\alpha(\Psi)$ для любого $\delta' \in (\delta, 1/5)$ найдутся точки $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$ такие, что $r_{\Gamma'}(a_1, a_2) < \delta'$. Фиксируем произвольную точку $b_2 \in \Gamma'$ и построим мёбиусово преобразование $\mu : \overline{\mathbb{R}}^n \to \overline{\mathbb{R}}^n$, переводящее a_1, a_2, b_2 соответственно в точки $0, e, \infty$, где $|e| = 1$. По теореме 2.4 имеем равенство $r_{\mu(\Gamma')}(0, e) = r_{\Gamma'}(a_1, a_2) < \delta' < 1/5$, которое означает, что для любой точки $x \in \mu(\Gamma') \backslash \{\infty\}$ выполняется оценка

$$(|x| + |e - x|)^{-1} = \sigma(0, x, e, \infty) < \delta' < 1/5.$$

Так как

$$2|x| + 1 \geq |x| + |x - e| > 1/\delta' > 5,$$

то

$$|x| > (1 - \delta')/2\delta' > 2/5\delta' > 2$$

при любом $x \in \mu(\Gamma')$, т. е. $\mu(\Gamma') \subset \{|x| \geq 2/5\delta'\} \subset \{|x| \geq 2\}$. Поскольку множество $\overline{\mathbb{R}}^n \backslash \mu(G) = \mu(\overline{\mathbb{R}}^n \backslash G)$ имеет нулевую емкость и, следовательно (см., например, [14, лемма 7.14, с. 86]), является вполне несвязным, оно не разбивает шар $\{|x| \geq 1\}$. Поэтому существует континуум $\gamma' \subset \{|x| \leq 1\} \cap \mu(G)$, соединяющий точку 0 с точкой e. Открытое множество $U = \mu(G) \backslash \mu(\Gamma')$ и содержащийся в нем компакт γ' образуют конденсатор $(\gamma', \overline{\mathbb{R}}^n \backslash U) = (\gamma', \mu(\Gamma') \cup (\overline{\mathbb{R}}^n \backslash \mu(G)))$, конформная емкость которого в силу 5.3(ii) и 5.6 имеет оценку

$$\begin{aligned} &\operatorname{Cap}(\gamma', \overline{\mathbb{R}}^n \backslash U) = \operatorname{Cap}(\gamma', \mu(\Gamma') \cup (\overline{\mathbb{R}}^n \backslash \mu(G))) = \operatorname{Cap}(\gamma', \mu(\Gamma')) \\ &\qquad \leq \operatorname{Cap}(\{|x| \leq 1\}, \{|x| \geq 2/5\delta'\}) = \Omega_{n-1} \left[\operatorname{Ln} \frac{2}{5\delta'}\right]^{1-n}. \quad (5.7.3) \end{aligned}$$

«Образом» конденсатора $(\gamma', \overline{\mathbb{R}}^n \backslash U)$ при K-квазимероморфном отображении $g = f \circ \mu^{-1}$ является конденсатор

$$(g(\gamma'), \overline{\mathbb{R}}^n \backslash g(U)) = (g(\gamma'), \overline{\mathbb{R}}^n \backslash f(G \backslash \Gamma')) = (g(\gamma'), \Gamma \cup (\overline{\mathbb{R}}^n \backslash fG)).$$

Так как согласно 5.5 множество $\overline{\mathbb{R}}^n \backslash fG$ имеет нулевую емкость, применение леммы 5.3, утверждения 5.1(ii), леммы 5.4 и оценки (5.7.3) приводит к соотношению

$$\begin{aligned} &\mathscr{T}_n(1/\varepsilon)) \leq \operatorname{Cap}(g(\gamma'), \Gamma) = \operatorname{Cap}(g(\gamma'), \Gamma \cup (\overline{\mathbb{R}}^n \backslash fG)) \\ &\qquad = \operatorname{Cap}(g(\gamma'), \overline{\mathbb{R}}^n \backslash g(U)) \leq K \cdot \operatorname{Cap}(\gamma', \overline{\mathbb{R}}^n \backslash U) \leq K \cdot \Omega_{n-1} \left[\operatorname{Ln} \frac{2}{5\delta'}\right]^{1-n}, \end{aligned}$$

из которого следует неравенство

$$\delta' \geq \frac{2}{5} \exp\left(-\left[\frac{K \cdot \Omega_{n-1}}{\mathscr{T}_n(1/\varepsilon)}\right]^{\frac{1}{n-1}}\right) \geq \omega(\varepsilon).$$

В силу произвольности $\delta' > \delta$ получаем требуемую оценку $\delta \geq \omega(\varepsilon)$. Теорема доказана.

Теорема 5.8. *Пусть область $G \subset \overline{\mathbb{R}}^n$ такова, что $\overline{\mathbb{R}}^n \setminus G$ является множеством нулевой емкости. Пусть $f : G \to \overline{\mathbb{R}}^n$ — непостоянное K-квазимероморфное отображение. Тогда для любого невырожденного обобщенного угла $\Psi = (A_1, \Gamma, A_2, \Gamma)$, где $A_1, A_2, \Gamma \in fG$ и Γ — невырожденный континуум, и его прообраза*

$$f^{-1}\Psi = (f^{-1}(A_1), f^{-1}(\Gamma), f^{-1}(A_2), f^{-1}(\Gamma))$$

выполняется оценка

$$\alpha(f^{-1}\Psi) \geq \omega(\alpha(\Psi)) \tag{5.8.1}$$

с функцией $\omega(t)$, заданной формулой (5.7.2).

Доказательство. В силу теоремы 5.7 для любой пары точек $z_1 \in f^{-1}(A_1)$ и $z_2 \in f^{-1}(A_2)$ имеем оценку

$$r_{f^{-1}(\Gamma)}(z_1, z_2) \geq \omega(r_\Gamma(f(z_1), f(z_2))) \geq \omega(\alpha(\Psi)).$$

Ввиду произвольности выбора точек $z_1 \in f^{-1}(A_1)$, $z_2 \in f^{-1}(A_2)$ и формулы (4.1.2) получаем требуемое неравенство. Теорема доказана.

Авторы благодарны Д. Г. Кузину, выполнившему квалифицированную проверку рукописи данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gehring F. W., Palka B.* Quasiconformally homogeneous domains // J. Anal. Math. 1976. V. 30. P. 172–199.
2. *Gehring F. W., Osgood B. G.* Uniform domains and the quasi-hyperbolic metric // J. Anal. Math. 1979. V. 45. P. 50–74.
3. *Ferrand J.* A characterization of quasiconformal mappings by the behavior of a function of three points // Proc. 13th Rolf Nevanlinna Colloquium. Joensuu, 1987. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo: Springer-Verl., 1988. P. 110–123. (Lecture Notes in Math.; 1351).
4. *Seittenranta P.* Möbius-invariant metrics // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 1999. V. 125. P. 511–533.
5. *Agard S., Gehring F. W.* Angles and quasiconformal mappings // Proc. London Math. Soc. (3). 1965. V. 14A. P. 1–21.
6. *Agard S. B.* Angles and quasiconformal mappings in space // J. Anal. Math. 1969. V. 22. P. 177–200.
7. *Taari O.* Characterisierung der Quasikonformität mit Hilfe der Winkelverzerrung // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. 1965. V. 362. P. 1–11.
8. *Асеев В. В.* Мёбиусово-инвариантные метрики в пространственных областях // 4-й Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике, посвященный памяти М. А. Лаврентьева: Тез. докл. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2000. Т. 1. С. 148–149.
9. *Асеев В. В., Тетенов А. В.* Угловые характеристики пар множеств и задача о квазисимметрической склейке // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы: Материалы / 6-я Казанск. междунар. летняя шк.-конф. Казань: Изд-во Казанского мат. о-ва, 2003. Т. 19. С. 16–17. (Тр. мат. центра им. Н. И. Лобачевского).
10. *Blumenthal M. L.* Theory and applications of distance geometry. Oxford: Clarendon Press, 1953.
11. *Бурбаки Н.* Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии. Функциональные пространства. Сводка результатов. Словарь. М.: Наука, 1975.
12. *Бердон А.* Геометрия дискретных групп. М.: Наука, 1986.
13. *Wermer J.* Potential theory. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo: Springer-Verl., 1974. (Lecture Notes in Math.; 408).
14. *Vuorinen M.* Conformal geometry and quasiregular mappings. Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo: Springer-Verl., 1988. (Lecture Notes in Math.; 1319).
15. *Берже М.* Геометрия. М.: Мир, 1984. Т. 1.

16. *Jiang Yueping.* On Clifford cross-ratio and its application // J. Hunan Univ. (in China). 1993. V. 20, N 2. P. 21–25.

17. *Асеев В. В.* Квазисимметрические вложения и отображения, ограниченно искажающие модули / Ред. «Сиб. мат. журн.». Новосибирск, 1984. 30 с. Деп. в ВИНИТИ 06.11.84, № 7190.

18. *Väisälä J.* Quasimöbius maps // J. Anal. Math. 1984/85. V. 44. P. 218–234.

19. *Асеев В. В.* О метризации пространства областей с помощью коэффициентов искажения // Групповые и метрические свойства отображений. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1995. Т. 1. С. 97–105.

20. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Distortion and singularities of quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. 1970. V. 465. P. 1–13.

21. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. Новосибирск: Наука, 1982.

22. *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math. 1969. V. 448. P. 1–40.

Статья поступила 7 октября 2003 г.

Асеев Владислав Васильевич, *Сычев Анатолий Викторович*
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
`btp@math.nsc.ru`, `sychev@math.nsc.ru`

Тетенов Андрей Викторович
Горно-Алтайский гос. университет, ул. Ленкина, 1, Горно-Алтайск 649000
`atet@mail.gasu.ru`