Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2005. Том 46, № 1

УДК 514

К ВОПРОСУ О ПРИНЦИПЕ МАКСИМУМА ДЛЯ МНОГООБРАЗИЙ НАД ЛОКАЛЬНЫМИ АЛГЕБРАМИ

Т. И. Гайсин

Аннотация: Рассматриваются многообразия над локальной алгеброй A. Изучаются базовые функции канонического слоения, являющиеся вещественными частями A-дифференцируемых функций. Доказано, что такие функции постоянны. Найден вид A-дифференцируемых функций на некоторых многообразиях над локальными алгебрами, в том числе компактных. Получены оценка на размерность некоторых пространств 1-форм и аналоги указанных выше результатов для проектируемых отображений слоений.

Ключевые слова: многообразия над алгебрами, слоения, проектируемые отображения, базовые формы.

Мы используем результаты теории многообразий над алгебрами, изложенные в [1–3]. Все многообразия и отображения предполагаются класса C^∞.

Кратко опишем известные объекты [1], с которыми будем работать. Пусть A — локальная алгебра над полем вещественных чисел [1]. Примером локальной алгебры над полем вещественных чисел может служить $R[n,S]$ — алгебра полиномов от n переменных с вещественными коэффициентами. Целое положительное число S называют *высотой алгебры* $R[n,S]$. Алгебра $R[n,S]$ наделяется стандартной операцией сложения. Операция умножения в $R[n,S]$ от стандартной отличается только одним условием: мономы степени выше S равны нулю, т. е. $x_1^{s_1}\cdot\dots\cdot x_n^{s_1}=0$ $(s_1+s_2+\dots+s_n>S)$. Линейные комбинации всевозможных произведений элементов $x_1,\dots,x_n$ образуют $Rd(R[n,S])$ — максимальный идеал алгебры $R[n,S]$, называемый *радикалом* алгебры. Число n называется *шириной* алгебры $R[n,S]$. Элементы $x_1,\dots,x_n$ образуют псевдобазис радикала алгебры $R[n,S]$. *Псевдобазисом* в радикале $Rd(A)$ локальной алгебры A называется набор элементов $a_k\in Rd(A)$ такой, что он порождает $Rd(A)$ как идеал в A, но любой его поднабор уже не порождает $Rd(A)$. Условие $A\cong R\oplus Rd(A)$ существенно. Известно, что если I — идеал в $R[n,S]$, то фактор-алгебра $R[n,S]/I$ будет локальной алгеброй. Верно и обратное: любая локальная алгебра A изоморфна некой алгебре вида $R[n,S]/I$ [1].

Гладкой над A или A*-дифференцируемой* функцией $G:A\to A$ называют гладкую функцию $G:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n\cong A$, для которой касательное отображение $dG|_x: T_x\mathbb{R}^n\to T_{G(x)}A$, где $T_x\mathbb{R}^n\cong T_xA\cong A$, в любой точке $x\in\mathbb{R}^n$ будет A-линейно.

После выбора вещественного базиса $\{e_i\}$ в алгебре A можем записать разложение: $x\in\mathbb{A}$, $x=x^i\cdot e_i$, $e_i\cdot e_j=\lambda_{ij}^k e_k$, где $\lambda_{ij}^k\in\mathbb{R}$, $G(x)=g^i(x)\cdot e_i$. Функция $G:A\to A$ будет A-дифференцируемой тогда и только тогда, когда выполняются условия Шефферса: $\partial_j g^s\cdot\lambda_{sk}^i=\lambda_{jk}^s\cdot\partial_s g^i$ [1]. Гладкая функция $G:A^m\to A$

многих переменных со значениями в A называется *A-дифференцируемой*, если она A-дифференцируема по каждому аргументу в отдельности [1].

Пусть M — гладкое многообразие, $\dim_R M = n \cdot m$, $\dim_R A = n$, $\{(U_\alpha, h_\alpha : U_\alpha \to R^{n\cdot m})_{\alpha\in\Delta}\}$ — максимальный атлас на M.

Введем на $\mathbb{R}^{n\cdot m}$ структуру свободного модуля A^m. Если функции склейки двух пересекающихся карт

$$h_{\beta\alpha} = h_\beta \circ h_\alpha^{-1} : h_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to h_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

A-дифференцируемы, то назовем их *согласованными.* Непересекающиеся карты также будем называть *согласованными.* Совокупность, состоящая из согласованных друг с другом карт, образующая покрытие M, называется A-*атласом.* Атлас называется *максимальным*, если он не лежит ни в каком большем атласе. Таким образом, мы получим некую совокупность максимальных A-атласов на M, возможно, пустую. Данные A-атласы, если они существуют, определяют на M (неизоморфные при тождественном отображении на M) структуры многообразия над алгеброй A.

Многообразие M с максимальным A-атласом называется *дифференцируемым над алгеброй A* многообразием.

Для каждой точки $x \in M$ касательное пространство T_xM дифференцируемого над алгеброй A многообразия M наделено естественной структурой A-модуля $T_aA^m \cong A^m$. Структура A-модуля в слоях касательного расслоения T_xM индуцируется структурами $T_{h(x)}A^m \cong A^m$ из карт A-атласа, которые в силу определения (A-дифференцируемость функций склейки карт A-атласа) инвариантны.

Поскольку $A \cong Rd(A) \oplus R$, имеем $Rd(A) \oplus \cdots \oplus Rd(A) \subset A \oplus \cdots \oplus A$. Если $F : A \oplus \cdots \oplus A \to A \oplus \cdots \oplus A$ есть A-дифференцируемое отображение, то из определения следует, что

$$dF : Rd(A) \oplus \cdots \oplus Rd(A) \to Rd(A) \oplus \cdots \oplus Rd(A)$$

(см., например, [2, 3]). Поэтому на M есть распределение, соответствующее $Rd(A) \oplus \cdots \oplus Rd(A)$. Оно интегрируемо, тем самым на M определено слоение, называемое *каноническим*, или *естественным.*

Как известно [1], A-дифференцируемые функции $G : A^m \to A$, $\dim_R A = n$, имеют вид $G = e_i \cdot G^i$, $i = 0, \ldots, n-1$, где e_i — вещественный базис локальной алгебры A, G^i в некотором специальном вещественном базисе (который мы будем называть стандартным) имеют вид

$$G_C(X^1, \ldots, X^m) = g(x^1, \ldots, x^m) + \sum_{|p|=1}^{S} \frac{1}{p!} \cdot \frac{D^p g}{dx^p} \cdot (X - x)^p, \qquad (1)$$

где $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, $p! = p_1! \cdot p_2! \cdot \ldots \cdot p_m!$, $|p| = p_1 + p_2 + \cdots + p_m$,

$$(X - x)^p = (X^1 - x^1)^{p_1} \cdot (X^2 - x^2)^{p_2} \cdot \ldots \cdot (X^m - x^m)^{p_m},$$

$$\frac{D^p g}{dx^p} = \frac{\partial^{|p|} g}{(\partial x^1)^{p_1} (\partial x^2)^{p_2}, \ldots, (\partial x^m)^{p_m}},$$

$$X^j - x^j = e_i \cdot x^{j,i},\ i = 1, \ldots, n-1, \quad x^j = x^{j,0},$$

$$e_0 = 1 \in A, \quad (e_k)^{(S+1)} = 0,\ k = 1, \ldots, n-1,\ S \in \mathbb{N},$$

т. е. все e_k принадлежат радикалу $Rd(A)$, $Rd(A)^S \neq 0$, $Rd(A)^{S+1} = 0$, S — высота A, и существует псевдобазис e_l, $l = 1, \ldots, r$, $r \leq n-1$, $e_k = e_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot e_r^{s_r}$, r — ширина A [1–3] (здесь и далее все степени, в которые возводятся элементы из A, — целые неотрицательные числа).

Замечание 1. Необходимо отметить, что стандартный базис выбирается согласованно со структурой радикала $Rd(A)$, а именно [1]

$$i_2 = r+1, \ldots, k_2; \quad k_2 \leq n-1; \quad e_{i_2} \in Rd(A)^2; \quad k_0 = 0;$$

$$i_j = k_{j-1}+1, \ldots, k_j; \quad k_j \leq n-1; \quad e_{i_j} \in Rd(A)^j, \ j = 1, \ldots, S; \quad k_1 = r;$$

$$i_1 = 1, \ldots, k_1; \quad k_S = n-1; \quad k_j - k_{j-1} = \dim_R\{Rd(A)^j / Rd(A)^{j+1}\}.$$

Стандартный базис обладает следующим свойством (которым мы в дальнейшем пользуемся). Произведение любых двух элементов стандартного базиса $e_{i_{j_1}} \neq e_0$ и $e_{i'_{j_2}} \neq e_0$ (в наших обозначениях $e_{i_{j_1}} \cdot e_{i'_{j_2}} \in Rd(A)^{j_1+j_2}$) разлагается по стандартному базису $e_{i_{j_1}} \cdot e_{i'_{j_2}} = \lambda^l_{i_{j_1} i'_{j_2}} e_l$ (где $\lambda^l_{i_{j_1} i'_{j_2}} \in \mathbb{R}$ и $l = 1, \ldots, n-1$), и если $k_{j_1-1} < i_{j_1} \leq k_{j_1}$, а $k_{j_2-1} < i'_{j_2} \leq k_{j_2}$, то для $l \leq k_{j_1+j_2-1}$ всегда выполняется

$$\lambda^l_{i_{j_1} i'_{j_2}} = 0.$$

Далее проводим стандартное известное рассуждение, чтобы доказать указанное свойство. По определению $Rd(A)^S$ есть совокупность линейных над R комбинаций элементов из $Rd(A)$ вида $a_1 \cdot \ldots \cdot a_S = a$. Любой элемент a_l (здесь $l = 1, \ldots, S$) из радикала представим в виде $a_l = \mu_{s_1,\ldots,s_r} e_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot e_r^{s_r}$, $\mu_{s_1,\ldots,s_r} \in \mathbb{R}$ (см. [1, с. 20]). Тогда из определений получаем, что любое $a = a_1 \cdot \ldots \cdot a_S$ разлагается с вещественными коэффициентами по элементам вида $e_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot e_r^{s_r}$, у которых $s_1 + s_2 + \cdots + s_r = S$. Значит, мы можем выбрать базис пространства $Rd(A)^S$ из элементов вида $e_{i_S} = e_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot e_r^{s_r}$, у которых $s_1 + s_2 + \cdots + s_r = S$, занумеровав их в обратном порядке начиная с $n-1$. Далее, $Rd(A)^S \subset Rd(A)^{S-1}$. Рассуждая, как раньше, получим, что любой элемент из $Rd(A)^{S-1}$ разлагается с вещественными коэффициентами по произведениям элементов псевдобазиса степеней $S-1$ и S. Ясно, что мы можем дополнить базис $\{e_{i_S}\}$ подпространства $Rd(A)^S$ до базиса пространства $Rd(A)^{S-1}$ элементами вида $e_{i_{S-1}} = e_1^{s_1} \cdot \ldots \cdot e_r^{s_r}$, у которых $s_1 + s_2 + \cdots + s_r = S-1$. Таким образом, мы можем подняться до базиса пространства $Rd(A)^2$. Теперь нам нужно учесть, что фиксированный вектор псевдобазиса e_{i_1} не может быть выражен через элементы уже выбранного базиса пространства $Rd(A)^2$, объединенного с оставшимися отличными от e_{i_1} векторами псевдобазиса. Иначе получаем противоречие с $Rd(A)^{S+1} = 0$ или противоречие с определением псевдобазиса [1]. Имеет место следующее очевидное утверждение [1].

Предложение. *Пусть размерность локальной алгебры* $\dim_R A$ *равна* n, *тогда стандартный базис алгебры* A *обладает следующими свойствами:* $e_0 = 1 \in A$, $(e_1)^{(S+1)} = 0$, $(e_k)^{(S+1)} = 0$ *и* $k = 2, \ldots, n-1$; e_k *— вещественный базис идеала.*

Теорема 1. *Пусть* M *— многообразие над локальной алгеброй* A, $\dim_R A = n$, $\dim_A M = m$, $G : M \mapsto A$ *—* A*-дифференцируемая функция (в алгебре* A *выбран стандартный базис). Пусть* L *— слой естественного слоения на* M, *порожденного структурой алгебры* A, *такой, что* $\overline{L}$ *компактно, где* $\overline{L}$ *— замыкание слоя* L.

Тогда для такого слоя L естественного слоения на M, порожденного структурой алгебры A, существует слой K такой, что $K \subset \overline{L}$ и g — вещественная часть G — имеет нулевой дифференциал $d(g)|_K = 0$ на слое K.

Доказательство. По определению идеала имеем $e_1 \cdot e_k = e_i \cdot v_k^i$, где $i, k = 2, \ldots, n-1$; $v_k^i \in R$. Очевидно, что из $(e_1)^{S+1} = 0$ следует $e_1 \cdot e_1 = e_i \cdot v^i$, $i = 2, \ldots, n-1$. Тогда из локального вида A-дифференцируемых функций (1) получаем

$$G(X^1, \ldots, X^m) = G^0(X^1, \ldots, X^m) + e_i \cdot G^i = g + e_i \cdot g^i,$$

здесь имеется в виду, что G^0 и все G^i локально имеют вид (1), $i = 1, \ldots, n-1$, g — вещественная часть G^0, а g^i и g — разложение G по базису. В общем случае локально в карте U из A-дифференцируемого атласа

$$g^1 = \frac{\partial g}{\partial x^j} \cdot x^{j,1} + b(x^1, \ldots, x^m), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Ясно, что для $i_1 = 1, \ldots, k_1$ (см. замечание 1)

$$g^{i_1} = \frac{\partial g}{\partial x^j} \cdot x^{j,i_1} + b(x^1, \ldots, x^m), \quad j = 1, \ldots, m.$$

Необходимо отметить (это существенно для доказательства), что g — базовая функция канонического слоения на M, слагаемое $b(x^1, \ldots, x^m)$ зависит от системы координат, но так же, как и g, зависит только от трансверсальных координат $\{x^1, \ldots, x^m\}$ канонического слоения на M [1–4]. В индуцированной топологии $\overline{L}$ — компактное множество. Ясно, что g^1 на $\overline{L}$ достигает минимума в точке x. Точку x содержит некоторый слой K. Из теории слоений известно, что $x \in K \subset \overline{L}$ [4]. В карте из A-дифференцируемого атласа, содержащей x, точка x имеет координаты $\{x^1, \ldots, x^m, 0, \ldots, 0\}$. Если $d(g)|_K \neq 0$, то найдется набор $x^{j,1}$ такой, что

$$\{x^1, \ldots, x^m, x^{1,1}, \ldots, x^{m,1}, 0, \ldots, 0\}$$

задает координаты некоторой точки $\tilde{x}$ из U, $\tilde{x} \in K$ и $g^1(x) > g^1(\tilde{x})$, что невозможно, значит, $d(g)|_K = 0$. $\square$

Из теоремы 1 следует, что $g^1|_{\overline{L}}$ достигает минимума и максимума на $\overline{L}/L$.

Определение 1. Пусть B — многообразие со слоением Φ. Будем говорить, что слоение Φ *замыкаемо*, если $\overline{L}$ компактно для каждого слоя L слоения Φ, где $\overline{L}$ — замыкание слоя L.

Замечание 2. Если слоение компактно, то оно замыкаемо, если многообразие компактно, то любое слоение на нем замыкаемо.

Замечание 3. (1) Компактное многообразие над локальной алгеброй A, удовлетворяет условиям нижеследующих теорем.

(2) Если M — многообразие над локальной алгеброй A и естественное слоение (называемое каноническим) на M, порожденное структурой алгебры A, компактно (или каноническое слоение на M компактно), то M удовлетворяет условиям нижеследующих теорем.

Теорема 2. *Пусть M — связное многообразие над локальной алгеброй A, $\dim_R A = n$, $\dim_A M = m$, и каноническое слоение на M замыкаемо, $G : M \mapsto A$ — A-дифференцируемая функция, где в алгебре A выбран стандартный базис. Тогда*

1) *на M вещественная часть g A-дифференцируемой функции G постоянна,*

2) *компонента A-дифференцируемой функции при e_1 постоянна на слоях канонического слоения.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что все значения базовой функции g критические. Из теоремы Сарда (множество критических значений имеет меру нуль) получаем наше утверждение. $\square$

Определение 2. Назовем *крайним элементом* стандартного базиса алгебры A элемент $\tilde{e}_k = e_{i_0}$ такой, что $\tilde{e}_k \cdot e_l = 0$, где $l = 1, \dots, n-1$ или $\tilde{e}_k \cdot Rd(A) = 0$. Другие, т. е. не крайние элементы, обозначим через $\breve{e}_j$.

Для любых двух элементов e_j и e_i базиса алгебры A определены числа $\lambda^k_{ji} \in R$ такие, что $e_j \cdot e_i = \lambda^k_{ji} e_k$ [1].

Определение 3. Назовем стандартный базис $\{e_i\}$ локальной алгебры A *V-базисом*, если он удовлетворяет следующему условию.

Для любого не крайнего элемента $\breve{e}_{j_0}$ базиса $\{e_i\}$ алгебры A существует элемент $\breve{e}_{i_0} \neq e_0 = 1 \in A$ (i_0 здесь фиксировано) базиса такой, что $\lambda^{k_0}_{j_0 i_0} \neq 0$ для некоторого k_0 и для всех $j \neq j_0$ выполнено $\lambda^{k_0}_{j i_0} = 0$ (здесь k_0 и i_0 фиксированы).

Определение 4. Будем говорить, что локальная алгебра A есть *V-алгебра*, если она допускает V-базис.

Ясно, что V-алгебры существуют (см. [1, с. 20]).

Следствие 1. *Пусть M — многообразие над V-алгеброй A и каноническое слоение на M замыкаемо,* $\dim_R A = n$, $\dim_A M = m$, *где в алгебре A выбран V-базис.*

Тогда A-дифференцируемые функции $G : M \to A$ имеют вид

$$G = a + f^k \cdot \tilde{e}_k,$$

где $a \in A$, а f^k — базовые функции канонического слоения на M.

Доказательство. Произвольная A-дифференцируемая функция локально имеет вид

$$G(X^1, \dots, X^m) = G^0(X^1, \dots, X^m) + e_i \cdot G^i = \breve{e}_j \cdot G^j + \tilde{e}_k \cdot G^k = g + e_i \cdot g^i,$$

здесь подразумевается, что G^0 и все G^i локально имеют вид (1), $i = 1, \dots, n-1$, g — вещественная часть G^0, а g^i и g — разложение G по базису. Из теоремы 2 следует, что $G^0 = a \in A$, т. е. $g = \mathrm{const}$. Пусть теперь $\breve{e}_{i_1}$ — не крайний элемент псевдобазиса, $i_1 = 1, \dots, k_1$ (см. замечание 1). Покажем, что $g^{i_1} = \mathrm{const}$ (g^{i_1} — глобально определенная на M базовая функция канонического слоения). Существующая локально G^{i_1} имеет вид (1), и $G^{i_1} = g^{i_1} + e_i \cdot \hat{g}^i$, $i = 1, \dots, n-1$. Элемент $\breve{e}_{i_1}$ удовлетворяет условиям определения 3 (существует $\breve{e}_{i_0}$ из определения 3). Из формулы (1) следует, что

$$\hat{g}^{i_0} = \frac{\partial g^{i_1}}{\partial x^j} \cdot x^{j,i_0} + \dots + b(x^1, \dots, x^m), \quad j = 1, \dots, m,$$

и функция $\hat{g}^{i_0} - \frac{\partial g^{i_1}}{\partial x^j} \cdot x^{j,i_0}$ не зависит от переменных x^{j,i_0}, что вытекает из свойств базиса (замечание 1). Переменные x^{j,i_0} в первой степени, не умноженные на другие переменные, входят только в вещественнозначную функцию $\hat{g}^{i_0}$, определяемую A-дифференцируемой функцией вида (1). Теперь g^{k_0} из разложения G

по базису (номер k_0 из определения 3) локально имеет вид $g^{k_0} = \lambda^{k_0}_{i_1 i_0} \cdot \hat{g}^{i_0} + (\dots)$ (i_0 фиксировано), функция $g^{k_0} - \lambda^{k_0}_{i_1 i_0} \cdot \hat{g}^{i_0}$ (i_0 фиксировано) не зависит от переменных x^{j,i_0}. Иначе должны существовать элементы алгебры A вида $e_i \cdot e_{i_0}$ или $e_i \cdot e_{i_0} \cdot e_l$ (здесь $1 \le i$, $i \ne i_1$, $1 \le l$), имеющие после разложения по V-базису ненулевой вещественный коэффициент при e_{k_0}. Первое невозможно непосредственно по определению V-базиса. Второе невозможно, поскольку элемент $e_i \cdot e_l$ имеет после разложения по V-базису нулевой вещественный коэффициент при e_{i_1}, что следует из свойства стандартного базиса (см. замечание 1).

Теперь, рассуждая относительно g^{k_0} так же, как в теоремах 1 и 2, получим, что $g^{i_1} = \mathrm{const}$. Далее, рассуждая по индукции, а именно переходя к номерам i_2, $i_2 = k_1 + 1, \dots, k_2$ (см. замечание 1) и т. д., получим доказательство нашего утверждения. $\square$

Пусть M — многообразие над A [1], Ω — пространство дифференциальных форм на M, $\Omega_A \subset \Omega_{A\text{-lin}} \subset A \otimes \Omega$, $\Omega_{A\text{-lin}}$ — пространство A-линейных форм [2], Ω_A — пространство A-дифференцируемых форм [3], т. е. A-линейных и таких, что внешний дифференциал от любого представителя Ω_A снова A-линеен. Получаем следующую короткую точную последовательность комплексов:

$$0 \to \Omega_A \to A \otimes \Omega \to \frac{A \otimes \Omega}{\Omega_A} \to 0.$$

Назовем первый слева комплекс (Ω_A, d) *комплексом A-дифференцируемых форм*. Перейдем к длинной точной последовательности групп когомологий:

$$0 \to H^0_A \to A \otimes H^0 \to H^0_{/A} \to H^1_A \to A \otimes H^1 \to \dots,$$

где группы без индекса внизу суть группы комплекса де Рама, а H^*_A — группы когомологий комплекса (Ω_A, d), $H^*_{/A}$ — группы когомологий фактор-комплекса $(\Omega_{/A}, d)$.

Лемма 1. *Первая группа H^1_A комплекса (Ω_A, d) вкладывается в первую группу когомологий комплекса де Рама $A \otimes H^1$:*

$$\dots \to 0 \to H^1_A \to A \otimes H^1 \to \cdots.$$

Рассмотрим форму $\omega \in \Omega_A$, $\omega = e_i \cdot \omega^i = \breve{e}_j \cdot \breve{\omega}^j + \tilde{e}_k \cdot \tilde{\omega}^k$, где $\omega^i \in \Omega$ или, что то же самое, $\breve{\omega}^j \in \Omega$, $\tilde{\omega}^k \in \Omega$, $\ker\{d\}$ — ядро внешнего дифференциала, $\bigl(\ker\{d\} \cap \Omega^j_A\bigr)$ — пространство замкнутых A-дифференцируемых форм, Ω^s — пространство дифференциальных s-форм.

Обозначим (для каждого j_0) через $\breve{\Omega}^{s,j_0}_{A_R} \subset \Omega^s$ некоторое подпространство в пространстве Ω^s, удовлетворяющее следующему условию:

$$\breve{\Omega}^{s,j_0}_{A_R} = \{\breve{\omega}^{j_0} \in \Omega^s \mid \exists \omega \in \Omega_A, \omega = \breve{e}_{j_1} \cdot \breve{\omega}^{j_1} + \breve{e}_{j_0} \cdot \breve{\omega}^{j_0} + \breve{e}_{j_2} \cdot \breve{\omega}^{j_2} + \tilde{e}_k \cdot \tilde{\omega}^k\}.$$

Обозначим (для каждого j_0) через $Z\breve{\Omega}^{s,j_0}_{A_R} \subset \Omega^s$ некоторое подпространство в пространстве Ω^s, удовлетворяющее следующему условию:

$$Z\breve{\Omega}^{s,j_0}_{A_R} = \{\breve{\omega}^{j_0} \in \Omega^s \mid \exists \omega \in (\Omega_A \cap \ker\{d\}), \omega = \breve{e}_{j_1} \cdot \breve{\omega}^{j_1} + \breve{e}_{j_0} \cdot \breve{\omega}^{j_0} + \breve{e}_{j_2} \cdot \breve{\omega}^{j_2} + \tilde{e}_k \cdot \tilde{\omega}^k\}.$$

Обозначим через $Z\breve{\Omega}^s_{A_R} \subset \breve{e}_j \otimes Z\breve{\Omega}^{s,j}_{A_R}$ некоторое подпространство в пространстве $\breve{e}_j \otimes Z\breve{\Omega}^{s,j}_{A_R}$, удовлетворяющее следующему условию:

$$Z\breve{\Omega}^s_{A_R} = \bigl\{\breve{\omega} \in \breve{e}_j \otimes Z\breve{\Omega}^{s,j}_{A_R} \mid \exists \omega \in (\Omega_A \cap \ker\{d\}), \omega = \breve{\omega} + \tilde{e}_k \cdot \tilde{\omega}^k\bigr\}.$$

Теорема 3. *Пусть M — многообразие над локальной алгеброй A, $\dim_R A = n$, $\dim_A M = m$, и каноническое слоение на M замыкаемо. В алгебре A выбран стандартный базис. Тогда пространства $Z\breve{\Omega}^{1,0}_{A_R}$ вкладываются в пространство $A \otimes H^1(M)$:*

$$0 \to Z\breve{\Omega}^{1,0}_{A_R} \to A \otimes H^1 \to \cdots .$$

Мы не доказываем теорему 3 — ее доказательство аналогично обоснованию следствия 2, см. ниже.

Следствие 2. *Пусть M — многообразие над V-алгеброй A, $\dim_R A = n$, $\dim_A M = m$, и каноническое слоение на M замыкаемо. В алгебре A выбран V-базис. Тогда*

1) *пространство $Z\breve{\Omega}^{1}_{A_R}$ вкладывается в пространство $A \otimes H^1(M)$:*

$$0 \to Z\breve{\Omega}^{1}_{A_R} \to A \otimes H^1 \to \cdots ;$$

2) *пространства $Z\breve{\Omega}^{1,j}_{A_R}$ вкладываются в пространство $A \otimes H^1(M)$:*

$$0 \to Z\breve{\Omega}^{1,j}_{A_R} \to A \otimes H^1 \to \cdots ;$$

3) *пространства $Z\breve{\Omega}^{1,j}_{A_R}$ вкладываются в $Z\breve{\Omega}^{1}_{A_R}$:*

$$0 \to Z\breve{\Omega}^{1,j}_{A_R} \to Z\breve{\Omega}^{1}_{A_R} \to \cdots .$$

Доказательство. Возьмем 1-формы $\omega, \varsigma \in [\omega] \in H^1_A$ так, что $\omega \in \Omega_A$, $\omega = e_i \cdot \omega^i = \breve{e}_j \cdot \breve{\omega}^j + \tilde{e}_k \cdot \tilde{\omega}^k$; $\varsigma \in \Omega_A$, $\varsigma = e_i \cdot \varsigma^i = \breve{e}_j \cdot \breve{\varsigma}^j + \tilde{e}_k \cdot \tilde{\varsigma}^k$. Поскольку из следствия 1 известно, что $\breve{\Omega}^{0,j}_{A_R} \cong R \Rightarrow \breve{\omega}^j = \breve{\varsigma}^j$, доказательство завершается ссылкой на лемму 1. $\square$

Следствие 3. *Пусть M — многообразие над V-алгеброй A, $\dim_R A = n$, $\dim_A M = m$, каноническое слоение на M замыкаемо, в алгебре A выбран V-базис и $\dim\{H^1(M)\} < \infty$. Тогда пространство $Z\breve{\Omega}^1_{A_R}$ будет конечномерно и*

$$\dim_R\{Z\breve{\Omega}^{1,j}_{A_R}\} \le \dim_R\{Z\breve{\Omega}^{1}_{A_R}\} \le \dim_R\{A \otimes H^1(M)\}.$$

Доказательство вытекает из следствия 2. $\square$

В нижеприведенных следствиях каноническое слоение на N — расслоение, h — натуральное число.

Известно, что $A \cong Rd(A) \oplus R$, $A^h \cong Rd(A)^h \oplus R^h$ [1].

Следствие 4. *Пусть M — многообразие над локальной алгеброй A и каноническое слоение на M замыкаемо, $\dim_R A = n$, $\dim_A M = m$, и пусть $\pi : N \to B$ — локально тривиальное расслоение с типовым слоем $Rd(A)^h$, где $\dim_R B = h$. Предположим, что существует атлас этого расслоения $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times Rd(A)^h \subset R^h \oplus Rd(A)^h \cong A^h$, задающий на N структуру многообразия над алгеброй A. Тогда для любого дифференцируемого над A отображения $F : M \to N$ выполняется $\pi \circ F : M \mapsto \mathrm{pt} \in B$.*

Мы не проводим доказательство следствия 4, ибо оно аналогично доказательству следствия 5 (см. ниже).

Следствие 5. *Пусть M — многообразие над V-алгеброй A и каноническое слоение на M замыкаемо, $\dim_R A = n$, $\dim_A M = m$, и пусть $\pi : N \to B$ — локально тривиальное расслоение с типовым слоем $Rd(A)^h$, где $\dim_R B = h$. Предположим, что существует атлас этого расслоения $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times Rd(A)^h \subset R^h \oplus Rd(A)^h \cong A^h$, задающий на N структуру многообразия над алгеброй A. Тогда для любого дифференцируемого над A отображения $F : M \to N$ выполняется*

$$\pi \circ F : M \mapsto \mathrm{pt} \in B$$

и в локальных координатах F имеет вид

$$F = \bigoplus_{i=1}^{h} (a_i + f^{i,k} \cdot \tilde{e}_{i,k}),$$

где $a_i \in A$, а функции $f^{i,k}$ зависят только от трансверсальных координат канонического слоения на M.

Доказательство. Пусть $y \in \mathrm{Im}(F) \subset N$ и $y \in \pi^{-1}(U_\beta) \subset N$, $\phi_\beta : \pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times Rd(A)^h \subset R^h \oplus Rd(A)^h \cong A^h$.

Существуют $U_\gamma \subset U_\delta \subset U_\beta$, $g : U_\beta \to R^h$ такие, что $y \in U_\gamma$, $g : |_{U_\gamma} \to R^h$ — диффеоморфизм по равенству координат, $g : |_{U_\beta \setminus U_\delta} \to R^h$ — отображение, переводящее все точки в нулевой вектор из R^h. Тогда из формулы (1) следует существование A-дифференцируемого отображения $G : U_\beta \times Rd(A)^h \to A^h$ такого, что g является вещественной частью G, $G|_{U_\gamma \times Rd(A)^h}$ — A-диффеоморфизм по равенству координат, $G|_{U_\beta \times Rd(A)^h \setminus U_\delta \times Rd(A)^h}$ — A-дифференцируемое отображение, переводящее все точки в нулевой вектор из A^h. Ясно, что G продолжается на все N нулем. Теперь $G \circ F : M \to A^h$. Используя следствие 1, получаем наше утверждение.

Замечание 4. Пусть $\langle \tilde{e}_{i,k} \rangle$ — линейная оболочка базисных векторов $\tilde{e}_{i,k}$, $\langle \tilde{e}_{i,k} \rangle$ — подпространство в $Rd(A)^h$. В обозначениях следствия 5 в $\pi : N \to B$ существует векторное подрасслоение $\pi|_{N_1} : N_1 \to B$ со слоем $\langle \tilde{e}_{i,k} \rangle$, $\mathrm{i} : N_1 \to N$ — вложение, F — A-дифференцируемое отображение из следствия 5, F — морфизм слоений. Существует $F_1 : M \to N_1$ такое, что в локальных координатах выполняется следующее равенство: $\mathrm{i} \circ F_1 = \bigoplus_{i=1}^{h} (0_i + f^{i,k} \cdot \tilde{e}_{i,k})$.

Пример. Пусть (в обозначениях следствия 5) $N \cong TB$ — касательное расслоение многообразия B, TB рассматривается как многообразие над алгеброй дуальных чисел $R(\epsilon)$ [1], $M \cong T^2$ — двумерный тор, наделенный структурой многообразия над алгеброй дуальных чисел $R(\epsilon)$ [5, 6]. Тогда мы находимся в условиях следствия 5.

Далее рассматриваются проектируемые отображения на некоторых слоениях.

Пусть M — многообразие со структурой слоения произвольной коразмерности [4], (Ω, d) — комплекс дифференциальных форм на M. Отображение называется *проектируемым*, если оно постоянно на слоях слоения. Форма $\omega \in \Omega$ называется *базовой*, если для любого слоя L слоения имеют место равенства

$$\forall v \in T_x L \quad i_v \omega(x) = 0,\ i_v(d(\omega))(x) = 0.$$

В карте, адаптированной к структуре слоения, базовая форма имеет следующий вид:

$$\omega_{i_1,\ldots,i_k}(x^1, \ldots, x^q) \cdot dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k},$$

где q — коразмерность слоения, $i_1, \ldots, i_k = 1, \ldots, q$, $x^{i_1}, \ldots, x^{i_k}$ — трансверсальные координаты.

Пусть $\Omega_B \subset \Omega$ — подкомплекс базовых форм [1]. Получаем следующую короткую точную последовательность комплексов:

$$0 \to \Omega_B \to \Omega \to \frac{\Omega}{\Omega_B} \to 0.$$

Перейдем к длинной точной последовательности групп когомологий:

$$0 \to H^0_B \to H^0 \to H^0_{/B} \to H^1_B \xrightarrow{i} H^1 \to \cdots, \tag{2}$$

где группы без индекса внизу суть группы когомологий комплекса де Рама, H^*_B — группы когомологий комплекса (Ω_B, d), $H^*_{/B}$ — группы когомологий фактор-комплекса $(\frac{\Omega}{\Omega_B}, d)$. Легко доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *В длинной точной последовательности* (2) $i : H^1_B \to H^1$ *есть мономорфизм.*

Для дальнейшего нам понадобится понятие намотки слоя на слой. В следующей лемме 3 мы в удобной нам форме излагаем известные факты [4].

Лемма 3. *Пусть M — произвольное многообразие со слоением, $p \in L$, и пусть в некоторой адаптированной к слоению карте (U, x^A), $p \in U$, найдется нестационарная последовательность локальных слоев $Q_i \subset L' \cap U$ слоя L', сходящаяся к некоторому локальному слою $Q_p \subset L \cap U$ слоя L, проходящему через точку p. Тогда для любой другой точки $\tilde{p} \in L$ и адаптированной к слоению карты $(\widetilde{U}, \tilde{x}^A)$, $\tilde{p} \in \widetilde{U}$, найдется нестационарная последовательность локальных слоев $\widetilde{Q}_i \subset L' \cap \widetilde{U}$ слоя L', сходящаяся к некоторому локальному слою $\widetilde{Q}_{\tilde{p}} \subset L \cap \widetilde{U}$ слоя L, проходящему через точку $\tilde{p}$.*

Если пара глобальных слоев $L', L \subset M$ удовлетворяет условиям предыдущей леммы 3, то будем говорить, что слой L' *наматывается* на слой L.

Лемма 4. *Пусть M — многообразие со структурой слоения коразмерности q, $g : M \to R^q$ — проектируемое отображение. Если слой L' наматывается на слой L, то значение g на L' равно значению g на L и дифференциал отображения g на слое L удовлетворяет условию* $\operatorname{rank}\{d(g)\}|_L < q$.

Доказательство. Пусть $p \in L$. Из условия леммы 4 следует, что существует последовательность точек a_i, лежащая в слое L' и сходящаяся к p, а это, в свою очередь, влечет, что в адаптированной к слоению карте локальные слои слоя $L' \supset Q_{a_i} \to L_p \subset L$ сходятся к локальному слою слоя L. Из непрерывности g вытекает, что $g(a_i) = g(p)$.

Пусть x^j_i — трансверсальные координаты точек a_i, x^j_0 — трансверсальные координаты точки p, $j = 1, \ldots, q$, тогда $x^j_i \to x^j_0$. Если в точке x^j_0 ранг матрицы Якоби максимален, т. е. $\operatorname{rank}\{d(g)\} = q$, то по теореме об обратной функции существует окрестность V точки x^j_0, на которой g является диффеоморфизмом на $g(V)$, что невозможно, ибо из $g(x^j_i) = g(x^j_0)$ следует, что не существует открытой окрестности точки x^j_0, на которой g инъективно.

Теорема 4. *Пусть структура слоения коразмерности q на связном многообразии M замыкаема. Если множество компактных слоев слоения не более* *чем счетно (в частности, компактных слоев нет), то все проектируемые отображения $g : M \to R^q$ имеют образ меры нуль и* $\operatorname{rank}\{d(g)\} < q$ *в каждой точке из M.*

Доказательство. M_1 — множество, состоящее из точек, содержащихся в компактных слоях. Ясно, что, поскольку g постоянно на слоях, множество $g(M_1)$ счетно и, значит, имеет меру нуль. Пусть

$$M_2 = M \setminus M_1, \quad M_3 = \{p \in M \mid \operatorname{rank}\{d(g)\}|_p < q\}.$$

Покажем, что $M_2 \subset M_3$. Действительно, из некомпактности L и компактности $\overline{L}$ следует, что существует последовательность $\{p_i \in L\}$ такая, что $p_i \to p \notin L$, $p \in L' \subset \overline{L}$. Из леммы 4 имеем $\operatorname{rank}\{d(g)|_p\} < q$, следовательно, $\operatorname{rank}\{d(g)|_{L'}\} < q$. Получаем, что все значения $g(M_2)$ будут критическими. Из теоремы Сарда вытекает, что $g(M) = g(M_2) \cup g(M_1)$ имеет меру нуль.

Следствие 6. *Пусть структура слоения коразмерности q на связном многообразии M замыкаема, N — многообразие. Если множество компактных слоев слоения на M не более чем счетно (в частности, компактных слоев нет), то все проектируемые отображения $g : M \to N$ имеют* $\operatorname{rank}\{d(g)\} < q$ *в каждой точке из M.*

Доказательство. Пусть $\dim N = m$, из теоремы Уитни следует существование вложения многообразия $G : N \to R^{2\cdot m+1}$, $\operatorname{rank}\{d(G)\} = m$. Тогда $\operatorname{rank}\{d(G \circ g)\} < q$, иначе получим противоречие с теоремой 4, откуда $\operatorname{rank}\{d(g)\} < q$.

Следствие 7. *Пусть структура слоения коразмерности q на связном многообразии M замыкаема, множество компактных слоев слоения не более чем счетно (в частности, компактных слоев нет), $G : M \to N$ — погружение многообразия M в произвольное расслоение $\pi : N \to B$, являющееся морфизмом слоений. Тогда* $\operatorname{rank}\{d(\pi \circ G)\} < q$ *в каждой точке из M.*

Доказательство. Пусть $G : M \to N$ — морфизм слоений, $\pi : N \to B$ — проекция, тогда $\pi \circ G : M \to B$ — постоянное на слоях отображение. Из предыдущего следует, что $\operatorname{rank}\{d(\pi \circ G)\} < q$.

Следствие 8. *Пусть структура слоения коразмерности* 1 *на связном многообразии M замыкаема, множество компактных слоев слоения не более чем счетно (в частности, компактных слоев нет). Тогда все базовые функции на M постоянны. Кроме того, Ω_B^1 вкладывается в $H^1(M)$:*

$$0 \to \Omega_B^1 \to H^1(M).$$

Доказательство. Из леммы 2 следует, что Ω_B^1 — пространство вещественнозначных базовых форм — вкладывается в $H^1(M)$, ибо $\Omega_B^2 = 0$ $\forall \omega \in \Omega_B^1 \Rightarrow [\omega] \in H_B^1$, $\Omega_B^0 \cong R$(теорема 4) $\Rightarrow \forall \omega_1, \omega_2 \in [\omega] \Rightarrow \omega_1 = \omega_2$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вишневский В. В., Широков А. П., Шурыгин В. В.* Пространства над алгебрами. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1985.
2. *Шурыгин В. В.* Расслоения струй как многообразия над алгебрами // Пробл. геометрии. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 19. С. 3–22. (Итоги науки и техники).
3. *Шурыгин В. В.* Многообразия над алгебрами и их применение в геометрии расслоений струй // Успехи мат. наук. 1993. Т. 48, № 2. С. 75–106.

4. *Тамура И.* Топология слоений. М.: Мир, 1979.
5. *Малахальцев М. А.* Структуры многообразия над алгеброй дуальных чисел на торе // Тр. геом. семинара. Казань, 1994. С. 47–62.
6. *Гайсин Т. И.* $R(\epsilon)$-дифференцируемые функции на торе // Тр. по геометрии и анализу. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2003. С. 221–230.

Статья поступила 27 апреля 2004 г., окончательный вариант — 24 августа 2004 г.

Гайсин Тагир Ильшатович
НИИ механики и математики им. Н. Г. Чеботарёва Казанского гос. университета, ул. Университетская, 17, Казань 420008
Tagir.Gaisin@ksu.ru