Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2005. Том 46, № 1

УДК 510.51+519.716.35

СЛОЖНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ЕСТЕСТВЕННЫХ ПРОБЛЕМ В АВТОМАТНЫХ СТРУКТУРАХ

Н. С. Винокуров

Аннотация: Доказано, что проблема автоматного изоморфизма автоматных структур, проблема существования нетривиального автоматного автоморфизма автоматной структуры, проблема автоматной вложимости автоматных структур Σ_1^0-полны. Также показана Σ_1^1-полнота проблемы вложения автоматных структур.

Ключевые слова: конечный автомат, автоматные структуры, проблема изоморфизма.

В работе [1] показано, что проблема изоморфизма двух автоматных структур неразрешима, а именно, доказана

Теорема 1. *Не существует алгоритма, позволяющего по произвольным автоматным заданиям двух структур определять, изоморфны ли эти структуры.*

Возникает естественный вопрос: разрешима ли проблема существования автоматного изоморфизма автоматных структур, т. е. можно ли по автоматным представлениям структур определить, существует ли изоморфизм между ними, задаваемый некоторым автоматом? В данной работе получен отрицательный ответ на этот вопрос, более того, доказано, что эта проблема имеет сложность проблемы остановки машины Тьюринга. Кроме того, установлены оценки сложности других алгоритмических проблем в автоматных структурах (существования нетривиального автоматного автоморфизма, автоматной вложимости, вложимости).

В работе будет использоваться терминология, предложенная в [1, 2].

Определение 1. Пусть Σ — некоторый конечный алфавит. Обозначим через $\Sigma_\diamondsuit$ алфавит $\Sigma\cup\{\diamondsuit\}$, где $\diamondsuit\notin\Sigma$. Тогда *конволюцией кортежа* $(\omega_1,\dots,\omega_n)\in\left(\Sigma^*\right)^n$ назовем кортеж $(\omega_1,\dots,\omega_n)^\diamondsuit\in\left(\Sigma_\diamondsuit^n\right)^*$, полученный добавлением наименьшего числа символов $\diamondsuit$ к правым концам ω_i, $1\le i\le n$, так, чтобы все получившиеся слова имели одинаковую длину. *Конволюцией отношения* $R\subseteq(\Sigma^*)^n$ назовем отношение $R^\diamondsuit\subset\left(\Sigma_\diamondsuit^n\right)^*$, сформированное как множество конволюций всех кортежей в R.

Определение 2. Будем говорить, что *отношение* $R\subseteq(\Sigma^*)^n$ *распознаваемо конечным автоматом*, если его конволюция $R^\diamondsuit$ распознаваема конечным автоматом над алфавитом $\Sigma_\diamondsuit^n$.

Определение 3. Будем говорить, что *структура*

$$\mathscr{A}=\left(A,R_1^A,\dots,R_k^A,c_0^A,\dots c_t^A\right)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (проект НШ–2112.2003.1).

автоматна над Σ, если ее носитель $A \subseteq \Sigma^*$ и все отношения $R_i^A \subseteq (\Sigma^*)^{n_i}$ распознаваемы конечными автоматами. Будем говорить, что *структура автоматна*, если она автоматна над некоторым алфавитом. Если существует изоморфизм между некоторой структурой $\mathscr{B}$ и автоматной структурой $\mathscr{A}$, то $\mathscr{B}$ называется *автоматно представимой* (над Σ) и структура $\mathscr{A}$ называется *автоматной копией* структуры $\mathscr{B}$, а изоморфизм — *автоматным представлением* структуры $\mathscr{B}$.

Нам будет полезно следующее хорошо известное утверждение, доказательство которого может быть найдено, например, в [2].

Лемма 1 (лемма о накачке). *Пусть L_A — язык автомата A, и пусть число его состояний равно k. Пусть $\omega \in L_A$ имеет длину, большую чем k. Тогда существуют слова x, y, z такие, что $\omega = xyz$, $1 < |y| \leqslant k$, и для всех $i \in \omega$ выполнено $xy^iz \in L_A$.*

Лемма 2. *Пусть $f : A \to B$ — автоматная разнозначная функция из регулярного языка A в регулярный язык B. Тогда существует константа с такая, что $\forall x \in A \; ||x| - |f(x)|| \leq c$.*

Доказательство легко следует из доказательства леммы о накачке.

Обозначим язык первого порядка, обогащенный квантором $\exists^\infty$ (существует бесконечно много), через FO($\exists^\infty$). Блумензац и Гредель доказали следующую теорему.

Теорема 2 [3]. *Для любой автоматной структуры $\mathscr{A}$ множество всех* FO($\exists^\infty$)*-предложений, истинных в структуре $\mathscr{A}$, разрешимо.*

Из доказательства этой теоремы следует, что соответствующий разрешающий алгоритм строится равномерно по автоматному представлению модели. Из доказательства теоремы также легко получается следующее важное

Замечание 1. Любые формульные отношения языка FO($\exists^\infty$) на автоматной структуре являются автоматными.

Определение 4. Пусть T — машина Тьюринга. Назовем *графом конфигураций* T граф $\mathscr{C}(T) = (V, E)$, где V — множество всех конфигураций T, а $E = \{(w, v) \mid w, v \in V$ за один шаг T попадает из w в $v\}$.

В [1] показано, что граф конфигураций машины Тьюринга автоматный.

Определение 5. Назовем МТ T *обратимой*, если каждая вершина в $\mathscr{C}(T)$ имеет не более одного входящего и не более одного выходящего ребра.

В [4] доказана

Теорема 3. *Для любой детерминированной* МТ *существует эквивалентная ей обратимая* МТ.

Приведем конструкцию доказательства этого утверждения, она понадобится нам в дальнейшем. Пусть T — детерминированная МТ. Построим по ней двухленточную обратимую МТ R, эквивалентную T. Пусть все команды T пронумерованы числами $\{1..k\}$. Идея доказательства в следующем: на 1-й ленте R имитирует работу T, а на 2-й последовательно записывает номера выполняемых команд T,

$$T = \{\Sigma_T, Q_T, \Delta_T, q_{0T}, q_{fT}, b_T\}, \quad \Sigma_R = \Sigma_T \cup \{1..k\},$$

$$Q_R = Q_T, \quad q_{fT} = q_{FR}, \quad q_{0T} = q_{0R}, \quad b_T = b_R,$$

$$\Delta_R((\sigma_1, \sigma_2), q_i) = ((\delta_1, \delta_2), q_j, (d_1, d_2)),$$

где $\Delta_T(\sigma_1, q_i) = (\delta_1, q_j, d_1)$ — команда МТ T, δ_2 — номер этой команды, $\sigma_2 = b_T$, $d_2 = \mathrm{Right}$.

Эквивалентность этих машин очевидна. $\mathscr{C}(R)$ не может иметь более одного выходящего ребра ввиду детерминированности T, а более одного входящего по построению, т. е. R обратима.

Сначала мы покажем, что автоматные автоморфизмы автоматных структур образуют вычислимые группы.

Предложение 1. *Пусть $\mathscr{L}$ — автоматная структура над Σ, и пусть A — конечный автомат над $\Sigma^2_\diamond$. Тогда существует эффективная процедура, позволяющая по автомату A определить, распознает ли A некоторый автоморфизм структуры $\mathscr{L}$.*

Доказательство. Проверим, распознает ли A бинарное отношение на $|\mathscr{L}|$. Для этого построим автомат B, распознающий бинарное отношение $|\mathscr{L}| \times |\mathscr{L}|$, и проверим, является ли язык L_A подмножеством языка L_B. Это можно эффективно выяснить за конечное число шагов. Структура $(\mathscr{L}, L_A)$ очевидным образом автоматна. Далее, по теореме 2 мы можем эффективно получить ответ на вопрос, задает ли автомат A автоморфизм структуры $\mathscr{L}$. $\square$

Замечание 2. Заметим, что аналогичным образом можно доказать существование эффективного алгоритма, позволяющего по виду автомата определить, распознает ли данный автомат изоморфизм двух данных автоматных структур.

Предложение 2. *Автоматные автоморфизмы автоматной структуры замкнуты относительно композиции и обращения, т. е. образуют группу.*

Доказательство. Пусть φ_1 и φ_2 — автоматные автоморфизмы структуры $\mathscr{A}$. Пусть P_{φ_1} и P_{φ_2} — предикаты, соответствующие этим автоморфизмам. Тогда предикаты $P_{\varphi_1^{-1}}$ и $P_{\varphi_1 \circ \varphi_2}$, определенные как

$$(x, y) \in P_{\varphi_1^{-1}} \Leftrightarrow (y, x) \in P_{\varphi_1}$$

и

$$(x, y) \in P_{\varphi_1 \circ \varphi_2} \Leftrightarrow \exists z((x, z) \in P_{\varphi_1} \wedge (z, y) \in P_{\varphi_2})$$

задают соответственно обратный автоморфизм и композицию автоморфизмов. По замечанию 1 эти предикаты автоматны. Следовательно, автоматные автоморфизмы автоматной структуры образуют группу.

Предложение 3. *Группа автоматных автоморфизмов автоматной алгебраической системы имеет вычислимую нумерацию, которая одновременно является и ее конструктивизацией.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A}$ — автоматная структура над Σ. Существует эффективная гёделевская нумерация μ всех автоматных предикатов над $\Sigma^2_\diamond$, следовательно, по предложению 1 существует эффективная гёделевская нумерация ν всех автоматных автоморфизмов $\mathscr{A}$, причем множество

$$\eta_\nu = \{\langle x, y\rangle \mid \nu(x) = \nu(y)\}$$

будет вычислимым. Это следует из того, что проверка равенства двух автоматных языков делается за конечное число шагов. Множество

$$\{\langle x, y, z\rangle \mid \nu(x) \cdot \nu(y) = \nu(z)\}$$

по предложению 2 и вышеуказанному утверждению также будет вычислимым. Вычислимость этих двух множеств и означает, что ν является конструктивизацией группы автоматных автоморфизмов структуры $\mathscr{A}$. $\square$

Обозначим группу всех автоматных автоморфизмов автоматной модели $\mathscr{A}$ через $\mathrm{AAut}(\mathscr{A})$.

Теперь мы приведем оценку сложности проблемы автоматного изоморфизма автоматных моделей и связанные с ней результаты.

Очевидно, что существует гёделевская нумерация ν всех автоматных структур над алфавитом Σ. Кроме того, существуют гёделевская нумерация λ всех слов над алфавитом Σ и гёделевская нумерация μ всех автоматных предикатов над алфавитом Σ. Зафиксируем все эти нумерации.

Будем говорить, что *проблема существования нетривиального автоматного автоморфизма автоматной структуры имеет сложность* P, если множество

$\mathrm{NonTrAut} = \{n \mid$ существует нетривиальный автоматный автоморфизм автоматной структуры с номером $n\}$

имеет сложность P.

Проблема существования автоматного автоморфизма автоматной структуры, переводящего выделенный элемент в выделенный элемент, имеет сложность P, если множество

$\mathrm{Aut} = \{\langle n, x, y\rangle \mid$ существует автоматный автоморфизм автоматной структуры с номером n, переводящий элемент с номером x в элемент с номером $y\}$

имеет сложность P.

Проблема существования автоматного изоморфизма двух автоматных структур имеет сложность P, если множество

$\mathrm{Iso} = \{\langle n, m\rangle \mid$ существует автоматный изоморфизм между автоматной структурой с номером n и структурой с номером $m\}$

имеет сложность P.

Теорема 4. *Множество* NonTrAut Σ^0_1*-полно.*

Доказательство. Сначала покажем, что NonTrAut лежит в классе Σ^0_1. Множество $\{\langle n, m\rangle \mid \mu(m)$ является нетривиальным автоморфизмом структуры $\nu(n)\}$ вычислимо. Это следует из того, что проверка автоматного автоморфизма на тривиальность — вычислимая процедура, и из предложения 1. Множество NonTrAut является проекцией вышеуказанного вычислимого множества, следовательно, лежит в классе Σ^0_1.

Получим нижнюю оценку сложности множества NonTrAut сведением к нему следующего множества $\{n \mid \varphi_n(0)\downarrow\}$. Пусть есть МТ T, R — МТ, построенная по теореме 3. Рассмотрим ориентированный граф $\mathscr{C}(R) = (V_R, E_R)$, в каждой его компоненте связности присутствует вершина без входящих ребер (первая вершина). Множество первых вершин формульно выделимо:

$$\mathrm{FirstVertex}(x) \leftrightarrow \neg(\exists y E_R(y, x)).$$

На этом множестве введем новый порядок, устроенный по типу ω:

$$x \prec y \leftrightarrow \mathrm{FirstVertex}(x)\,\&\,\mathrm{FirstVertex}(y)\& x \leq_a y,$$

где $x \leq_a y \leftrightarrow (|x| = |y| \& x \leq_{\mathrm{lex}} y) \vee (|x| < |y|)$, $\leq_{\mathrm{lex}}$ — лексикографический порядок. Заметим, что $\prec$ является автоматным порядком.

Определим граф $F = (V_F, E_F)$ $V_F = \{0\}^*0\{1\}^*$,

$$E_F(x,y) \leftrightarrow |x| = |y| \& x <_{\text{lex}} y \& \forall z((|x| = |z| \& x <_{\text{lex}} z) \to (y \leq_{\text{lex}} z)).$$

F состоит из цепочек по одной каждой конечной длины. Граф F автоматен.

Пусть X — конфигурация МТ R, соответствующая начальной конфигурации МТ T со входом 0. Тогда

$$E_X(x,y) \leftrightarrow x = X \& y \in V_F \& \forall z((|z| = |y| \& z \in V_F) \to y \leq_{\text{lex}} z);$$

E_X — автоматное отношение. Рассмотрим автоматную структуру

$$\mathscr{A}(T) = (V_R \cup V_F, E_R \cup E_F \cup E_X \cup \prec).$$

Если МТ T сходится в 0, то существует конечное число конфигураций, принимаемых МТ R на входе 0, которые представляют из себя конечную цепь с началом в конфигурации X. С другой стороны, из X выходит по одной цепи каждой длины, следовательно, в $\mathscr{A}(T)$ существует нетривиальный автоморфизм. Кроме того, он передвигает лишь конечное число элементов, значит, он автоматный.

Тем самым если МТ T расходится в 0, то структура $\mathscr{A}(T)$ является жесткой.

Иначе говоря, МТ T сходится в 0 тогда и только тогда, когда номер структуры $\mathscr{A}(T)$ принадлежит NonTrAut. $\square$

Следствие 1. *Проблема существования нетривиального автоморфизма автоматной структуры неразрешима.*

Теорема 5. *Проблема автоматной вложимости автоматных структур Σ_1^0-полна.*

Доказательство. Оценка сверху получается по аналогии с теоремой 4. Получим нижнюю оценку.

Сведем к данной проблеме множество $\{n \mid \varphi_n(0)\downarrow\}$. Пусть T — МТ, R — эквивалентная ей МТ, построенная по теореме 3. В ориентированном графе $\mathscr{C}(R) = (V_R, E_R)$ рассмотрим регулярное множество

$$\text{FIN} = \{x \in V_R \mid \text{ не существует ребер, выходящих из } x\}.$$

Введем множество $E_{\text{FIN}}(x,y) \leftrightarrow (x \in \text{FIN}) \& (y = 11)$.

Построим автоматный граф

$$F = (V_F, E_F), \quad V_F = \{11\}^* \setminus \{\lambda\}, \quad E_F(x,y) \leftrightarrow (x \in V_F \& y \in V_F) \& |y| = |x| + 2).$$

Пусть X — конфигурация МТ R, соответствующая начальной конфигурации МТ T с входом 0. Определим автоматные структуры

$$\mathscr{A}(T) = (V_R \cup V_F, E_R \cup E_F \cup E_{\text{FIN}} \cup (X,X)), \quad \mathscr{B} = (V_F, E_F \cup (11,11)).$$

МТ T сходится в 0 тогда и только тогда, когда $\mathscr{B}$ вкладывается автоматным гомоморфизмом в $\mathscr{A}(T)$.

Действительно, пусть T сходится в 0, значит, R, пройдя конечное множество конфигураций K, остановится в конфигурации из FIN, следовательно, в ориентированном графе $\mathscr{A}(T)$ множеством вершин, достижимых из X, будет $K \cup V_F$. Первые $|K|$ элементов $\mathscr{B}$ ставятся последовательно в соответствие элементам из K, далее элементу $\underbrace{1..1}_{2\cdot n}$ из $\mathscr{A}(T)$ ставится в соответствие элемент

$\underbrace{1..1}_{2\cdot|K|+2\cdot n}$ из $\mathscr{B}$. Полученное отображение является автоматным изоморфным вложением $\mathscr{B}$ в $\mathscr{A}(T)$.

Обратно, пусть T расходится в 0. Предположим, что существует f — автоматное изоморфное вложение $\mathscr{B}$ в $\mathscr{A}(T)$. Оно отображает 11 в X, 1111 — в следующую за X конфигурацию, и т. д. По лемме 2 существует константа c такая, что $\forall x\ ||x|-|f(x)||\le c$. Но T за один шаг может увеличить длину конфигурации максимум на 1, а в $\mathscr{B}$ длина каждой последующей вершины больше длины предыдущей на 2, следовательно, существует w такое, что $||w|-|f(w)||>c$; противоречие. $\square$

Теорема 6. *Для произвольной* МТ T *существует автоматная модель* $\mathscr{A}(T)$, *строящаяся равномерно эффективно по номеру* T, *с выделенными элементами* X *и* Y, *находящимися равномерно эффективно по номеру* T, *такая, что существует автоматный автоморфизм, переводящий* X *в* Y *тогда и только тогда, когда* T *сходится в точке 0.*

Доказательство. Пусть R — обратимая МТ, эквивалентная T, полученная по теореме 3. В графе $\mathscr{C}(R)=(V_R,E_R)$ определим новые регулярные множества:

$$V_H=\{x\underbrace{1..1}_{2\cdot n}\mid n\in\omega, x\in\mathrm{FIN}\},\quad E_H=\{(x\underbrace{1..1}_{2\cdot(n-1)},x\underbrace{1..1}_{2\cdot n})\mid n\in\omega, x\in\mathrm{FIN}\},$$

где FIN — множество, определенное в теореме 5. $F=(V_F,E_F)$ — граф из теоремы 5, $\mathscr{A}(T)\rightleftharpoons(V_R\cup V_H\cup V_F, E_R\cup E_H\cup E_F)$. В качестве X возьмем конфигурацию из V_R, соответствующую начальной конфигурации МТ T с входом 0, а в качестве Y — элемент 11 из V_F.

Если T сходится в 0, то существует конечная конфигурация, в которой T остановится. Пусть ей соответствует конфигурация P из V_R и всего есть k конфигураций, принимаемых МТ T на входе 0. Построим автоматный автоморфизм α структуры $\mathscr{A}(T)$ такой, что $\alpha(X)=Y$. Первым k элементам, достижимым из X, ставятся в соответствие первые k элементов, достижимых из Y. Далее, $\alpha(P\underbrace{1..1}_{2\cdot n})=\underbrace{1..1}_{2\cdot(n+k)}$, $n\in\omega$. На остальных элементах α действует тождественно. Нетрудно проверить, что α — автоматный автоморфизм.

Пусть T расходится в 0, предположим, что существует автоматный автоморфизм α, переводящий X в Y. По лемме 2 аналогично рассуждениям из доказательства теоремы 5 получаем противоречие. $\square$

Следствие 2. *Проблема существования автоматного автоморфизма автоматной структуры, переводящего один выделенный элемент в другой выделенный элемент,* Σ^0_1*-полна.*

Доказательство. Из теоремы 6 следует, что проблема остановки МТ сводится к этой проблеме, а из замечания 2 — что эта проблема лежит в классе Σ^0_1. $\square$

Следствие 3. *Проблема* Iso *существования автоматного изоморфизма двух автоматных структур* Σ^0_1*-полна.*

Доказательство. Покажем, что эта проблема лежит в Σ^0_1. Рассмотрим множество $\mathrm{Iso}_1=\{\langle n,m,z\rangle\mid$ предикат $\mu(z)$ является изоморфизмом структур $\nu(n)$ и $\nu(m)\}$. Оно вычислимо по замечанию 2. Множество Iso, очевидно, является проекцией множества Iso_1 и поэтому вычислимо перечислимо.

К проблеме Iso сводится проблема из следствия 2. Действительно,

$$\langle n, l, m\rangle \in \mathrm{Aut} \Leftrightarrow \langle f(n,l), f(n,m)\rangle \in \mathrm{Iso},$$

где f — вычислимая функция, выдающая по номеру n автоматной структуры и номеру l элемента из этой структуры номер структуры, совпадающей с вышеуказанной, с внесенным в сигнатуру выделенным элементом l.

Отсюда следует Σ_1^0-полнота проблемы Iso. $\square$

Теперь, используя конструкцию, приведенную в доказательстве Σ_1^1-полноты проблемы изоморфизма автоматных структур в [5], покажем Σ_1^1-полноту проблемы вложения автоматных структур. Нам понадобится следующее

Предложение 4. *Пусть A — автоматная структура, тогда A_ω — структура, состоящая из ω непересекающихся копий A, также автоматна.*

Доказательство может быть найдено, например, в [2].

Теорема 7. *Множество $\{\langle m, n\rangle \mid$ автоматная структура с номером n изоморфно вкладывается в автоматную структуру с номером $m\}$ является Σ_1^1-полным.*

Доказательство. Очевидно, что эта проблема имеет сложность не более, чем Σ_1^1. Получим нижнюю оценку. Рассмотрим граф N с множеством вершин

$$V_N = \{0,1\}^*1 \cup \{\lambda\}$$

и множеством ребер

$$E_N = \{(x,y) \mid x \prec_p y \& (\neg \exists z)(x \prec_p z \prec_p y)\},$$

где $x \prec_p y$, если x является собственной приставкой y. У каждой вершины v графа N есть ровно ω последователей: $v1, v01, v001$ и т. д.

Назовем $T \subseteq V_N$ *деревом*, если $\lambda \in T$ и для любого $x \in T$ предшественник x также принадлежит T. Назовем дерево T *вычислимым деревом*, если существует МТ M такая, что $x \in T \leftrightarrow$ на слове x она сходится и дает положительный ответ, $x \notin T \leftrightarrow$ на слове x она сходится и дает отрицательный ответ. Сведем к проблеме вложения проблему существования бесконечной ветви в вычислимом дереве T.

Пусть T — вычислимое дерево, P — обратимая МТ, его вычисляющая. Изменим ее так, чтобы она вместо положительного ответа зацикливалась. $C_{R(T)} = (V_{R(T)}, E_{R(T)})$ — граф конфигураций этой МТ. Определим автоматное множество $E_T = \{(v,w) \mid v \in V_N,\ w$ — начальная конфигурация $R(T)$, соответствующая входу $v\}$.

Автоматный граф $(V_N \cup V_{R(T)}, E_N \cup E_T \cup E_{R(T)})$ представляет собой граф N с прикрепленными к каждой вершине цепочками конечной или бесконечной длины в объединении с некоторым числом цепочек конечной или бесконечной длины. При этом к вершине присоединена бесконечная цепочка тогда и только тогда, когда эта вершина принадлежит дереву T. Соответственно к вершине присоединена конечная цепочка тогда и только тогда, когда эта вершина не принадлежит дереву T. Пусть

$$E_{\mathrm{cycle}} = \{(x,x) \mid x \in V_{R(T)}\}.$$

Определим автоматную структуру

$$\mathscr{A}(T) = (V_N \cup V_{R(T)}, E_N \cup E_T \cup E_{R(T)} \cup E_{\mathrm{cycle}}).$$

Возьмем (ω_A, S_A) — автоматную копию натуральных чисел с функцией следования, $\mathrm{Nach}(x)$ — формула, выделяющая множество вершин без входящих ребер. Введем множество

$$\mathrm{Cycle} = \{(x, x) \mid x \in \omega_A \& \neg\, \mathrm{Nach}(x)\}.$$

Пусть структура $P_\omega = (V, E)$ — ω непересекающихся копий структуры $(\omega_A, S_A \cup \mathrm{Cycle})$; P_ω — автоматный граф по предложению 4.

Добавим к ребрам графа P_ω множество

$$\{(x, y) \mid \mathrm{Nach}(x) \& \mathrm{Nach}(y) \& x <_a y \& \forall z((x <_a z) \to (y \leq_a z))\},$$

где $\leq_a$ — порядок из теоремы 4. Получился автоматный граф $\mathscr{B}$. Вычислимое дерево T имеет бесконечную ветвь тогда и только тогда, когда $\mathscr{B}$ изоморфно вкладывается в $\mathscr{A}(T)$. Из вышеизложенного следует Σ_1^1-полнота проблемы вложения автоматных структур. $\square$

Ввиду нижеследующей теоремы, изложенной в [1], все вышеуказанные оценки сложности для класса автоматных структур верны и для класса автоматных графов.

Теорема 8 [1]. *Для произвольной структуры $(\mathscr{A})$ существует граф $\mathscr{C}(\mathscr{A})$, эффективно построенный по $(\mathscr{A})$, со следующими свойствами:*

(1) *$(\mathscr{A})$ автоматна тогда и только тогда, когда $\mathscr{C}(\mathscr{A})$ автоматен;*

(2) *существует изоморфизм α между группой $\mathrm{Aut}(\mathscr{A})$ автоморфизмов $\mathscr{A}$ и группой $\mathrm{Aut}(\mathscr{C}(\mathscr{A}))$ автоморфизмов $\mathscr{C}(\mathscr{A})$; более того, $f \in \mathrm{Aut}(\mathscr{A})$ автоматен тогда и только тогда, когда $\alpha(f)$ автоматен;*

(3) *структура (B) автоматно изоморфна структуре $\mathscr{A}$ тогда и только тогда, когда $(\mathscr{C}(\mathscr{B}))$ автоматно изоморфна $\mathscr{C}(\mathscr{A})$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Khoussainov B., Rubin S., Ishihara H.* On isomorphism invariants of some automatic structures // Proc. 17th IEEE Symp. on Logic in Computer Science. Copenhagen (Denmark), 2002. P. 43–53.
2. *Khoussainov B., Nerode A.* Automata theory and its applications. Boston etc.: Birkhauser, 2001.
3. *Blumensath A., Grädel E.* Automatic structures // Proc. 15th IEEE Symp. on Logic in Computer Science. Santa Barbara (California), 2000. P. 51–62.
4. *Bennett C.* Logical reversibility of computation // IBM J. Res. Develop. 1973. V. 17. P. 525–532.
5. *Khoussainov B., Nies A., Rubin S., Stephan F.* Automatic structures: richness and limitations // Proc. 19th IEEE Symp. on Logic in Computer Science. Turku (Finland), 2004. P. 44–53.

Статья поступила 26 ноября 2003 г., окончательный вариант — 1 декабря 2004 г.

Винокуров Никита Сергеевич
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vinokurov@gorodok.net