Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2005. Том 46, № 1

УДК 517.983+517.986

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ ЭЛЕМЕНТОВ АЛГЕБРЫ ФОН НЕЙМАНА В ВИДЕ КОНЕЧНЫХ СУММ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПРОЕКТОРОВ

А. М. Бикчентаев

Аннотация: Доказано, что каждый элемент алгебры фон Неймана без прямого абелева слагаемого представляется в виде конечной суммы произведений не более чем трех проекторов из алгебры. Для собственно бесконечной алгебры число сомножителей не превышает двух. Наш результат дает новое доказательство эквивалентности первичной классификации алгебр фон Неймана в терминах проекторов и в терминах следов, а также описание йордановой структуры «алгебры наблюдаемых» квантовой механики в терминах «вопросов» квантовой теории.

Ключевые слова: C^*-алгебра, алгебра фон Неймана, след, линейный ограниченный оператор, идемпотент, проектор, линейная оболочка, гильбертово пространство.

§ 1. Введение

Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$. Через $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ обозначим $*$-алгебру всех линейных ограниченных операторов в $\mathscr{H}$. Оператор $x \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ называется *идемпотентом*, если $x = x^2$; *проектором*, если $x = x^2 = x^*$.

В настоящей работе решены следующие задачи.

(I) Представить каждый элемент алгебры фон Неймана $\mathscr{M}$, не имеющей прямого абелева слагаемого, в виде конечной суммы конечных произведений проекторов из $\mathscr{M}$.

(II) Указать наименьшую верхнюю границу для числа сомножителей в слагаемых таких представлений.

Ранее другими авторами [1–7] рассматривались лишь представления в более слабой форме: допускались коэффициенты из $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$) в слагаемых, задача (II) не исследовалась. В [8] автором было получено полное решение задач (I), (II) для случая $\mathscr{M} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$: каждый линейный ограниченный оператор x в комплексном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ представляется в виде конечной суммы $x = \sum x_k$, где каждое x_k есть произведение не более чем двух проекторов при $\dim \mathscr{H} = \infty$ и не более чем трех проекторов при $2 \leq \dim \mathscr{H} < \infty$.

В § 3 приводятся необходимые сведения и дается краткий обзор имеющихся работ в этом направлении. В § 4 доказаны вспомогательные утверждения, представляющие и самостоятельный интерес. В § 5 доказывается неулучшаемое (по числу сомножителей) утверждение: если алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ не имеет прямого абелева слагаемого (соответственно собственно бесконечна), то каждый

Работа выполнена при поддержке научной программы «Университеты России — фундаментальные исследования» (код проекта УР.04.01.011).

оператор $x \in \mathscr{M}$ представляется в виде конечной суммы $x = \sum x_k$, где каждое x_k есть произведение не более чем трех (соответственно двух) проекторов из $\mathscr{M}$.

Для алгебры фон Неймана без прямого абелева слагаемого доказательство опирается на новое представление операторов в виде конечных сумм попарных произведений проекторов и идемпотентов. Любопытно, что вышеупомянутая наименьшая верхняя граница связана с существованием нетривиального конечного следа на этих алгебрах. Как следствие, наш результат дает новое доказательство эквивалентности первичной классификации алгебр фон Неймана в терминах проекторов [9] и в терминах следов [10], а также описание йордановой структуры эрмитовой части алгебры фон Неймана («алгебры наблюдаемых» квантовой механики) в терминах проекторов (т. е. «вопросов» квантовой механики).

§ 2. Обозначения и определения

Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ и e — тождественный оператор в $\mathscr{H}$. Пусть $\|\cdot\|$ — C^*-норма на $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ и $\sigma(x)$ — спектр оператора $x \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$. Для C^*-подалгебры $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}(\mathscr{H})$ через $\mathscr{A}^{\mathrm{u}}$, $\mathscr{A}^{\mathrm{sa}}$, $\mathscr{A}^{+}$, $\mathscr{A}^{\mathrm{id}}$ и $\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ будем обозначать ее подмножества унитарных операторов, эрмитовых операторов, положительных операторов, идемпотентов и проекторов соответственно. Для $p, q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ пишем $p \sim q$, если $p = u^*u$ и $q = uu^*$ с некоторым $u \in \mathscr{A}$. Проектор $p \in \mathscr{A}$ называется *конечным*, если из $p \sim q$ и $q \leq p$ следует $p = q$.

Обозначим через (e_{ij}) канонический набор матричных единиц $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$. Для унитальной C^*-алгебры $\mathscr{A}$ мы отождествляем алгебру $\mathbb{M}_n(\mathscr{A})$ $n \times n$-матриц с элементами из $\mathscr{A}$ с тензорным произведением $\mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \otimes \mathscr{A}$, отождествляя матрицу (a_{ij}) с $\sum\limits_{i,j=1}^{n} e_{ij} \otimes a_{ij}$ в обычном смысле.

Следом на C^*-алгебре $\mathscr{A}$ называется такое отображение $\tau : \mathscr{A}^{+} \to [0, +\infty]$, что $\tau(x+y) = \tau(x)+\tau(y)$, $\tau(\lambda x) = \lambda\tau(x)$ для всех $x, y \in \mathscr{A}^{+}$, $\lambda \geq 0$ (при этом $0 \cdot (+\infty) \equiv 0$); $\tau(z^*z) = \tau(zz^*)$ для всех $z \in \mathscr{A}$. След τ на C^*-алгебре $\mathscr{A}$ называется *конечным*, если $\tau(x) < +\infty$ для всех $x \in \mathscr{A}^{+}$.

C^*-алгебра $\mathscr{A}$ называется *простой*, если у нее нет замкнутых идеалов, кроме $\{0\}$ и $\mathscr{A}$. Унитальная C^*-алгебра $\mathscr{A}$ называется *бесконечной*, если проектор e не является конечным; *равномерно гиперфинитной* или UHF-алгеброй, если существует неубывающая последовательность $\{\mathscr{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечномерных простых C^*-подалгебр, содержащих единицу $\mathscr{A}$, такая, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{A}_n$ плотно в $\mathscr{A}$. Через $C(\Omega)$ будем обозначать C^*-алгебру всех комплекснозначных непрерывных функций на экстремально несвязном компактном хаусдорфовом (т. е. стоуновском) пространстве Ω.

Для алгебры фон Неймана $\mathscr{M}$ операторов в $\mathscr{H}$ обозначим ее центр через $\mathscr{Z}(\mathscr{M})$. Для $p \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ обозначим $p^{\perp} = e - p$, и пусть $\mathscr{M}_p = \{px|p\mathscr{H} :\ x \in \mathscr{M}\}$ — редуцированная алгебра фон Неймана. Алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ называется

— *фактором*, если $\mathscr{Z}(\mathscr{M}) = \{\lambda e :\ \lambda \in \mathbb{C}\}$;

— *конечной*, если проектор e конечен;

— *полуконечной*, если каждый ненулевой проектор $\mathscr{M}$ мажорирует ненулевой конечный проектор;

— *собственно бесконечной*, если $\mathscr{Z}(\mathscr{M})$ не содержит ненулевых конечных проекторов;

— *алгеброй типа* I, если она изоморфна алгебре фон Неймана $\mathscr{N}$ с абелевым коммутантом;

— *непрерывной*, если в $\mathscr{Z}(\mathscr{M})$ не существует проектора $p \neq 0$, для которого $\mathscr{M}_p$ является алгеброй типа I;

— *алгеброй типа* II, если она непрерывна и полуконечна;

— *алгеброй типа* III, если она не содержит ненулевых конечных проекторов.

Конечная алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ типа II называется *алгеброй типа* II_1, а собственно бесконечная алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ типа II называется *алгеброй типа* II_∞.

Для каждой алгебры фон Неймана $\mathscr{M}$ существуют такие взаимно ортогональные проекторы p_{I}, p_{II_1}, p_{II_∞}, $p_{\mathrm{III}} \in \mathscr{Z}(\mathscr{M})$, что их сумма равна единице, а алгебры $\mathscr{M}_{p_{\mathrm{I}}}$, $\mathscr{M}_{p_{\mathrm{II}_1}}$, $\mathscr{M}_{p_{\mathrm{II}_\infty}}$, $\mathscr{M}_{p_{\mathrm{III}}}$ являются алгебрами типов I, II_1, II_∞ и III соответственно. Другими словами, $\mathscr{M}$ (единственным образом) представляется в виде прямой суммы

$$\mathscr{M} = \mathscr{M}_{p_{\mathrm{I}}} \oplus \mathscr{M}_{p_{\mathrm{II}_1}} \oplus \mathscr{M}_{p_{\mathrm{II}_\infty}} \oplus \mathscr{M}_{p_{\mathrm{III}}}$$

алгебр типов I, II_1, II_∞ и III. Фактор является алгеброй одного из типов I, II_1, II_∞ или III.

Для каждой алгебры фон Неймана $\mathscr{M}$ существует такой проектор $p \in \mathscr{Z}(\mathscr{M})$, что алгебра $\mathscr{M}_p$ конечна, а алгебра $\mathscr{M}_{p^\perp}$ собственно бесконечна.

Если $\mathscr{M}$ — алгебра фон Неймана типа I, то существует единственное (проиндексированное кардинальными числами) ортогональное семейство $\{z_\alpha\} \subset \mathscr{Z}(\mathscr{M})^{\mathrm{pr}}$ с $\sum z_\alpha = e$ такое, что $\mathscr{M}_{z_\alpha}$ изоморфно тензорному произведению абелевой алгебры фон Неймана $\mathscr{A}_\alpha$ и $\mathscr{B}(\mathscr{H}_\alpha)$ с $\dim \mathscr{H}_\alpha = \alpha$. Следовательно,

$$\mathscr{M} \simeq \sum\nolimits_\alpha^\oplus \mathscr{A}_\alpha \overline{\otimes} \mathscr{B}(\mathscr{H}_\alpha).$$

Если $\mathscr{M}$ конечна, то каждое α конечно [9, с. 296–297].

Лемма 1 [11, теорема 2.3.3]. *Пусть алгебра фон Неймана $\mathscr{N}$ имеет тип I_n (n — кардинальное число). Тогда $\mathscr{N}$ *-изоморфна тензорному произведению $\mathscr{Z}(\mathscr{N})\overline{\otimes}\mathscr{B}(\mathscr{K})$, где $\mathscr{K}$ — гильбертово пространство с $\dim \mathscr{K} = n$.*

Лемма 2 [12, теорема 3]. *Для каждого $x \in \mathbb{M}_n(C(\Omega))^{\mathrm{sa}}$ существует такой $u \in \mathbb{M}_n(C(\Omega))^{\mathrm{u}}$, что матрица $u^*xu(\omega)$ диагональна для всех $\omega \in \Omega$.*

Если проекторы p, q из C^*-алгебры $\mathscr{A}$ ортогональны и $p \sim q$, то

$$(p+q)\mathscr{A}(p+q) \simeq \mathbb{M}_2(p\mathscr{A}p)$$

[13, предложение 5.3.1]. В частности, если алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ не имеет прямых слагаемых конечного типа I и $p \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$, $p \sim p^\perp$, то $\mathscr{M} \simeq \mathbb{M}_2(\mathscr{M}_p)$.

Пусть $\mathscr{N}$ — алгебра фон Неймана с единицей $e_{\mathscr{N}}$, $\delta \in \mathbb{C}$ с $|\delta| = 1$ и $f(t) = \sqrt{t(1-t)}$ для $0 \le t \le 1$. Определим проектор $r^{(\delta,t)}$ в $\mathbb{M}_2(\mathscr{N})$, положив

$$r^{(\delta,t)} = \begin{pmatrix} e_{\mathscr{N}} & \delta f(t) \cdot e_{\mathscr{N}} \\ \bar{\delta} f(t) \cdot e_{\mathscr{N}} & (1-t) \cdot e_{\mathscr{N}} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Все знаки $\sum$ ниже означают суммирования по некоторым конечным множествам индексов.

§ 3. Предварительные сведения

В [1, предложение 7] доказано, что каждый фактор фон Неймана в сепарабельном гильбертовом пространстве алгебраически порождается своими проекторами. В [2, следствие 1] аналогичный результат установлен для всех бесконечномерных факторов фон Неймана $\mathscr{M}$, т. е.

$$\mathscr{M} = \mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}\{p_1p_2p_3p_4 : p_1, \dots, p_4 \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}\}.$$

В [3, с. 334] доказано, что алгебра фон Неймана алгебраически порождается своими проекторами тогда и только тогда, когда она не имеет прямого бесконечномерного абелева слагаемого. В частности [3, следствие 1],

$$\mathscr{B}(\mathscr{H}) = \mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}\{p_1p_2 : p_1, p_2 \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}\}.$$

В [4] показано, что каждый оператор в сепарабельном пространстве является линейной комбинацией 257 проекторов. В [5] для необязательно сепарабельного случая установлено, что каждый эрмитов оператор является вещественной линейной комбинацией 8 проекторов. В сепарабельном случае в [6] это число уменьшено до 5 проекторов и доказано, что каждый эрмитов оператор является целочисленной комбинацией 6 проекторов.

Когда $\mathscr{H}$ сепарабельно и бесконечномерно, в [7] единым методом для $\Lambda = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ или $\mathbb{H}$ показано, что

$$\mathscr{B}(\mathscr{H}) = \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}\{p_1p_2p_3p_4p_5p_6 : \ p_1, \dots, p_6 \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}}\}.$$

Простой модификацией доказательства [7] число сомножителей можно уменьшить до 5. Для собственно бесконечной алгебры фон Неймана $\mathscr{M}$ выполняется равенство [3, с. 336]

$$\mathscr{M} = \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}\{p_1p_2p_3p_4 : \ p_1, \dots, p_4 \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}\}.$$

Из теоремы 6 работы [5] следует, что собственно бесконечная алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ равна $\mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}\,\mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$.

В [14] показано, что произвольная алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ совпадает с множеством всех линейных комбинаций проекторов с коэффициентами из $\mathscr{Z}(\mathscr{M})$. В [15, теорема 4.7] доказано, что каждая бесконечная простая C^*-алгебра $\mathscr{A}$ равна $\mathrm{Lin}_{\mathbb{C}}\,\mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$. Если C^*-алгебра $\mathscr{A}$ допускает некоторую 3×3-матричную декомпозицию, то каждый коммутатор в $\mathscr{A}$ может быть записан в виде линейной комбинации не более 84 проекторов из $\mathscr{A}$ [16]. В [17] для широкого класса C^*-алгебр установлено, что каждый элемент можно представить в виде конечных сумм конечных произведений проекторов из алгебры.

§ 4. Новые леммы

Нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения, имеющие и самостоятельный интерес.

Лемма 3. *Каждый идемпотент q унитальной C^*-алгебры $\mathscr{A}$ представляется в виде произведения $q = py$, где $p \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$, а оператор y принадлежит $\mathscr{A}^+$ и обратим.*

Доказательство. Пусть $q \in \mathscr{A}^{\mathrm{id}}$ и $p = q(q + q^* - e)^{-1} \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ — единственный проектор со свойством $qp = p$, $pq = q$ [18, теорема 1.3]. Существует единственное разложение $q = p + z$, где нильпотент z с $z^2 = 0$ и $zp = 0$, $pz = z$

[18, теорема 1.7]. Следовательно, $pz^* = p^\perp = z^*p^\perp$, $z^*p = p^\perp z^* = z^*$. При $\lambda \geq \|z\|^4$ имеем

$$\lambda^{-1}zz^* = \lambda^{-1}pzz^*p \leq \lambda^{-1}\|zz^*\|p \leq \lambda^{-1/2}p.$$

Из неравенств

$$\begin{aligned} 0 &\leq (\lambda^{-1/4}p + \lambda^{1/2}p^\perp + \lambda^{-1/2}z)(\lambda^{-1/4}p + \lambda^{1/2}p^\perp + \lambda^{-1/2}z)^* \\ &= \lambda^{-1/2}p + \lambda p^\perp + z + z^* + \lambda^{-1}zz^* \leq 2\lambda^{-1/2}p + \lambda p^\perp + z + z^* \end{aligned}$$

следует, что при достаточно больших значениях λ элемент $y = e + \lambda p^\perp + z + z^* \in \mathscr{A}^+$ обратим. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть на C^*-алгебре $\mathscr{A}$ существует нетривиальный конечный след. Тогда $\mathrm{Lin}_\mathbb{R}\{p_1p_2 : p_1, p_2 \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}\}$ не плотно в $\mathscr{A}$. Если $\mathscr{A}$ унитальна, то $\mathrm{Lin}_\mathbb{R}\,\mathscr{A}^{\mathrm{id}}$ не плотно в $\mathscr{A}$.*

Доказательство. Пусть $i \in \mathbb{C}$ с $i^2 = -1$ и τ — нетривиальный конечный след на $\mathscr{A}$. Его однозначное продолжение до положительного линейного функционала на всю алгебру $\mathscr{A}$ обозначим той же буквой τ. Каждый положительный линейный функционал на C^*-алгебре является непрерывным [9, гл. I, предложение 9.12]. Отметим, что $\tau(xy) = \tau(yx)$ для любых $x, y \in \mathscr{A}$. По условию существует такой элемент $a \in \mathscr{A}^+$, что $\tau(a) > 0$. Если предположить, что $\mathrm{Lin}_\mathbb{R}\{p_1p_2 : p_1, p_2 \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}\}$ плотно в $\mathscr{A}$, то для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существуют такие конечные наборы $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$ и $\{p_k\}, \{r_k\} \subset \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$, что

$$\Big\| ia - \sum \lambda_k p_k r_k \Big\| < \varepsilon.$$

Тогда для

$$\lambda = \tau\Big(\sum \lambda_k p_k r_k\Big) = \sum \lambda_k \tau(p_k r_k) = \sum \lambda_k \tau(p_k r_k p_k) \in \mathbb{R}$$

имеем

$$\Big|\tau\Big(ia - \sum \lambda_k p_k r_k\Big)\Big| = \Big|i\tau(a) - \tau\Big(\sum \lambda_k p_k r_k\Big)\Big| = |i\tau(a) - \lambda| \geq \tau(a);$$

противоречие с непрерывностью функционала τ. Для унитальной C^*-алгебры $\mathscr{A}$ предположим, что $\mathrm{Lin}_\mathbb{R}\,\mathscr{A}^{\mathrm{id}}$ плотно в $\mathscr{A}$. Для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существуют такие конечные наборы $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$, $\{q_k\} \subset \mathscr{A}^{\mathrm{id}}$, что

$$\Big\| ia - \sum \lambda_k q_k \Big\| < \varepsilon.$$

Представив по лемме 3 каждый q_k в виде произведения $p_k y_k$, где $p_k \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$, а $y_k \in \mathscr{A}^+$, имеем для

$$\lambda = \sum \lambda_k \tau(p_k y_k) = \sum \lambda_k \tau(p_k y_k p_k) \in \mathbb{R}$$

оценку

$$\begin{aligned} \Big|\tau\Big(ia - \sum \lambda_k q_k\Big)\Big| &= \Big|i\tau(a) - \sum \lambda_k \tau(q_k)\Big| \\ &= \Big|i\tau(a) - \sum \lambda_k \tau(p_k y_k)\Big| = |i\tau(a) - \lambda| \geq \tau(a); \end{aligned}$$

противоречие с непрерывностью функционала τ. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ не имеет прямых слагаемых конечного типа* I. *Тогда*

(A) *каждый оператор $x \in \mathscr{M}^{\mathrm{sa}}$ с $\sigma(x) \subset [-2;2]$ представляется в виде суммы* 24 *симметрий из $\mathscr{M}$;*

(B) *каждый оператор $z \in \mathscr{M}^{\mathrm{sa}}$ с $\sigma(z) \subset [11;13]$ представляется в виде суммы* 24 *проекторов из $\mathscr{M}$;*

(C) *каждый обратимый оператор $y \in \mathscr{M}^{+}$ представляется в виде линейной комбинации проекторов из $\mathscr{M}$ с положительными коэффициентами;*

(D) *каждый оператор вида λp ($p \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$, $0 < \lambda < 1$) представляется в виде конечной суммы попарных произведений проекторов из $\mathscr{M}$.*

Доказательство. **(A)** Любая симметрия $s \in \mathscr{M}$ выражается через некоторый проектор $p \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ по формуле $s = 2p - e$. В силу [14, теорема 3, п. 3] каждый оператор $x \in \mathscr{M}^{\mathrm{sa}}$ с $\sigma(x) \subset [-1;1]$ представляется в виде

$$z = p_1 + \cdots + p_{12} - p_{13} - \cdots - p_{24}, \quad p_i \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}, \quad i = 1, \ldots, 24.$$

Теперь для $x = 2z$ имеем

$$x = (2p_1 - e) + \cdots + (2p_{12} - e) + (e - 2p_{13}) + \cdots + (e - p_{24}).$$

(B) По теореме об отображении спектра $\sigma(2(z - 12e)) \subset [-2;2]$. В силу п. **(A)**

$$2(z - 12e) = \sum_{i=1}^{24} s_i = \sum_{i=1}^{24} (2q_i - e),\ q_i \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}, \quad i = 1, \ldots, 24.$$

(C) Пусть $y \in \mathscr{M}^{+}$ обратим и $\sigma(y) \subset [\lambda;\mu]$, $\lambda > 0$. Положим

$$n = \min\{k \in \mathbb{N} : \mu \leq (13/11)^k \lambda\},$$

и пусть (по спектральной теореме)

$$y = \sum_{k=1}^{n} \oplus y_k$$

с $\sigma(y_k) \subset \left[\left(\frac{13}{11}\right)^{k-1}\lambda; \left(\frac{13}{11}\right)^{k}\lambda\right]$. Тогда $\sigma\left(\frac{11}{\lambda}\left(\frac{11}{13}\right)^{k-1} y_k\right) \subset [11;13]$ и по п. **(B)** каждый оператор y_k представляется в виде линейной комбинации 24 проекторов из $\mathscr{M}$ с положительными коэффициентами. Следовательно, y есть линейная комбинация $24n$ проекторов из $\mathscr{M}$ с положительными коэффициентами.

(D) Такая алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ изоморфна алгебре $\mathbb{M}_2(\mathscr{N})$ над некоторой алгеброй фон Неймана $\mathscr{N}$. Пусть $p \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$, $0 < \lambda < 1$. Положим

$$\lambda p = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathscr{N}.$$

Существует такой $u \in \mathbb{M}_2(\mathscr{N})$, что $u \cdot \lambda p \cdot u^* = \operatorname{diag}(x, y)$ [19; теорема 3.20]. Очевидно, что $x, y \in \mathscr{N}^{\mathrm{pr}}$. Определим проектор $r^{(\delta,t)}$ операторной 2×2-матрицей по формуле (1). Равенства

$$\lambda \operatorname{diag}(x, 0) = \operatorname{diag}(x, 0) \cdot (r^{(1,\lambda/2)} + r^{(-1,\lambda/2)}),$$

$$\lambda \operatorname{diag}(0, y) = \operatorname{diag}(0, y) \cdot (r^{(1,1-\lambda/2)} + r^{(-1,1-\lambda/2)})$$

завершают доказательство леммы.

Отметим, что для алгебры $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ лемма 3 получена в [20, теорема 1], а пп. **(A)**–**(C)** леммы 5 — в [21, следствия на с. 152].

Лемма 6. *Пусть алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ конечного типа* I *не имеет прямого абелева слагаемого, $p \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ и $0 < \lambda < 1$. Оператор λp представляется в виде конечной суммы попарных произведений проекторов из $\mathscr{M}$.*

Доказательство. Достаточно установить лемму отдельно для алгебры $\mathscr{M}$ типа I_n, $2 \le n \in \mathbb{N}$. В силу леммы 1 такая алгебра изоморфна тензорному произведению абелевой алгебры фон Неймана $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}(\mathscr{H}_n)$ с $\dim \mathscr{H}_n = n$. Из классической теоремы Гельфанда о представлении абелевой унитальной C^*-алгебры (см., например, [9, гл. 3, теорема 1.18]) следует, что алгебра $\mathscr{A}$ *-изоморфна C^*-алгебре $C(\Omega)$ всех комплекснозначных непрерывных функций на стоуновском пространстве Ω всех характеров алгебры $\mathscr{A}$. Теперь из леммы 1 вытекает, что алгебра $\mathscr{M}$ *-изоморфна матричной алгебре $\mathbb{M}_n(C(\Omega))$. Пусть $p \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ и $0 < \lambda < 1$. В силу леммы 2 существует такой $u \in \mathbb{M}_n(C(\Omega))^{\mathrm{u}}$, что матрица $u^* \cdot \lambda p \cdot u(\omega)$ диагональна для всех $\omega \in \Omega$. При этом $(u^*(\omega) \cdot \lambda p(\omega) \cdot u(\omega))_{kk} \in \{0, \lambda\}$ для всех $k \in \{1, \dots, n\}$ и для всех $\omega \in \Omega$. Существует состоящее не более чем из 2^n открыто-замкнутых множеств $\widetilde{\Omega}_j$ дизъюнктное покрытие пространства Ω, на каждом из которых все диагональные элементы $(u^*(\omega) \cdot \lambda p(\omega) \cdot u(\omega))_{kk}$, $k \in \{1, \dots, n\}$, принимают постоянные значения. Функция $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ непрерывна тогда и только тогда, когда все ее ограничения $\varphi|\widetilde{\Omega}_j$ ($j \in \{1, 2, \dots, 2^n\}$) непрерывны. Представим оператор $u^* \cdot p \cdot u$ в виде суммы n проекторов, являющихся не более чем одномерными в сечениях на каждом из $\widetilde{\Omega}_j$:

$$\begin{aligned} u^* \cdot p \cdot u\,(\omega) &= \mathrm{diag}((u^* p u)_{11}(\omega), 0, \dots, 0) \\ &\quad + \mathrm{diag}(0, (u^* p u)_{22}\,(\omega), 0, \dots, 0) + \dots + \mathrm{diag}(0, \dots, 0, (u^* p u)_{nn}\,(\omega)). \end{aligned}$$

Теперь равенства для обычных $n \times n$-матриц:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \mathrm{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ раз}}, 1, 0, \dots, 0) &= \mathrm{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ раз}}, 1, 0, \dots, 0) \\ &\quad \times (\mathrm{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ раз}}, r^{(1, \lambda/2)}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k-2 \text{ раз}}) + \mathrm{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ раз}}, r^{(-1, \lambda/2)}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k-2 \text{ раз}})) \end{aligned}$$

при $0 \le k \le n - 1$ и

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \mathrm{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ раз}}, 1) = \mathrm{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1 \text{ раз}}, 1) \cdot (\mathrm{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2 \text{ раз}}, r^{(1, 1-\lambda/2)}) \\ + \mathrm{diag}(\underbrace{0, \dots, 0}_{n-2 \text{ раз}}, r^{(-1, 1-\lambda/2)})), \end{aligned}$$

завершают доказательство леммы.

Лемма 7. *Пусть $\mathscr{N}$ —- алгебра фон Неймана и $2 \le n \in \mathbb{N}$. Каждый оператор $x \in \mathbb{M}_n(\mathscr{N})$ представляется в виде конечной суммы попарных произведений идемпотентов $\mathbb{M}_n(\mathscr{N})$, причем в каждом слагаемом один из сомножителей (левый или правый) можно выбрать проектором.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда n четно. Построим по матрице $\{x_{ts}\}_{t,s=1}^n$ оператора $x \in \mathbb{M}_n(\mathscr{N})$ прямую сумму $\mathrm{diag}(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_{n/2})$, образованную операторными 2×2-матрицами

$$\hat{x}_j = \begin{pmatrix} x_{2j-1,2j-1} & x_{2j-1,2j-1} \\ e_{\mathscr{N}} - x_{2j,2j} & x_{2j,2j} \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $1 \le j \le n/2$, и сопоставим ее оператору $u \in \mathbb{M}_n(\mathscr{N})$. Матрица $\{v_{ts}\}_{t,s=1}^n$ оператора $v = x - u$ имеет нулевую диагональ: $v_{11} = \cdots = v_{nn} = 0$. Введем операторы $v^{(l,1)}$ и $v^{(l,2)}$, полагая

$$v_{ts}^{(l,1)} = \begin{cases} v_{ts}, & \text{если } t = l \text{ и } s = l, \ldots, n, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

и

$$v_{ts}^{(l,2)} = \begin{cases} v_{ts}, & \text{если } s = l \text{ и } t = l, \ldots, n, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $l = 1, \ldots, n-1$. Легко видеть, что

$$v = \sum_{l=1}^{n-1} (v^{(l,1)} + v^{(l,2)}).$$

Положим

$$p_l = \mathrm{diag}(\underbrace{e_{\mathscr{N}}, \ldots, e_{\mathscr{N}}}_{l \text{ раз}}, 0, \ldots, 0), \quad q^{(l,1)} = p_l + v^{(l,1)},\ q^{(l,2)} = p_l + v^{(l,2)}.$$

Тогда $q^{(l,1)}, q^{(l,2)} \in \mathbb{M}_n(\mathscr{N})^{\mathrm{id}}$ и $v^{(l,1)} = q^{(l,1)} p_l^{\perp}$, $v^{(l,2)} = p_l^{\perp} q^{(l,2)}$ для всех $l = 1, \ldots, n-1$. Следовательно, оператор v представляется в виде суммы не более чем $2n-2$ попарных произведений идемпотентов и проекторов.

Положим

$$q_j = \begin{pmatrix} 0 & 2x_{2j-1,2j-1} \\ 0 & e_{\mathscr{N}} \end{pmatrix}, \quad h_j = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2e_{\mathscr{N}} - 2x_{2j,2j} & e_{\mathscr{N}} \end{pmatrix},$$

тогда $q_j, h_j \in \mathbb{M}_2(\mathscr{N})^{\mathrm{id}}$ и $\hat{x}_j = q_j r^{(1,1/2)} + h_j r^{(-1,1/2)}$ для всех $1 \le j \le n/2$; $r^{(1,1/2)}, r^{(-1,1/2)} \in \mathbb{M}_2(\mathscr{N})^{\mathrm{pr}}$ определены по формуле (1). Рассматривая соответствующие прямые суммы $q = \mathrm{diag}(q_1, \ldots, q_{n/2})$, $h = \mathrm{diag}(h_1, \ldots, h_{n/2})$,

$$p = \mathrm{diag}(\underbrace{r^{(1,1/2)}, \ldots, r^{(1,1/2)}}_{n/2 \text{ раз}}), \quad \mathrm{diag}(\underbrace{r^{(-1,1/2)}, \ldots, r^{(-1,1/2)}}_{n/2 \text{ раз}}) = p^{\perp},$$

имеем представление $u = qp + hp^{\perp}$, где $q, h \in \mathbb{M}_n(\mathscr{N})^{\mathrm{id}}$ и $p \in \mathbb{M}_n(\mathscr{N})^{\mathrm{pr}}$. Следовательно, оператор x представляется в виде суммы не более чем $2n$ попарных произведений идемпотентов и проекторов.

Если n нечетно, то повторяем предыдущие рассуждения, рассматривая вместо оператора u сумму двух операторов $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$, где матрица оператора $u^{(1)}$ есть $\mathrm{diag}(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{(n-1)/2}, 0)$, а

$$u_{ts}^{(2)} = \begin{cases} x_{nn}, & \text{если } t = s = n, \\ e_{\mathscr{N}} - x_{nn}, & \text{если } t = n \text{ и } s = n-1, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

т. е. оператору $u^{(2)}$ соответствует матрица $\mathrm{diag}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-2 \text{ раза}}, \hat{x}_{(n+1)/2})$ с единственным (неполным) блоком $\hat{x}_{(n+1)/2}$ вида (2). Итак, оператор x представляется в виде суммы не более чем $2n - 2 + 2 + 2 = 2n + 2$ попарных произведений идемпотентов и проекторов. Лемма доказана.

§ 5. Теорема и ее следствия

Следующее утверждение является неулучшаемым (по числу сомножителей).

Теорема. *Если алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ не имеет прямого абелева слагаемого (соответственно собственно бесконечна), то каждый оператор $x \in \mathscr{M}$ представляется в виде конечной суммы $x = \sum x_k$, где каждое x_k есть произведение не более чем трех (соответственно двух) проекторов из $\mathscr{M}$.*

Доказательство. Пусть алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ собственно бесконечна. Приведем необходимые известные факты теории операторов в виде следующих утверждений.

Лемма 8 [5, теорема 4]. *Каждый оператор $x \in \mathscr{M}$ представляется в виде суммы $x = \sum\limits_{k=1}^{5} q_k$ пяти идемпотентов из $\mathscr{M}$.*

Лемма 9 [9, гл. 5, п. (ii) теоремы 1.41]. *Если алгебра фон Неймана $\mathscr{N}$ порождена двумя проекторами p, $r \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$, то существует единственный проектор $z \in \mathscr{Z}(\mathscr{N})$ такой, что алгебра $\mathscr{N}_z$ имеет тип I_2 и $\mathscr{N}_{z^\perp}$ абелева, причем* $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{N}_{z^\perp} \le 4$.

К фиксированному оператору $x \in \mathscr{M}$ применим лемму 8, в полученном представлении к каждому идемпотенту — лемму 3, затем к полученному новому представлению — п. **(C)** леммы 5. Имеем

$$x = \sum \lambda_k p_k r_k, \quad \lambda_k > 0,\ p_k, r_k \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}. \tag{3}$$

В дальнейших преобразованиях нуждаются лишь слагаемые с $\lambda_k \notin \mathbb{N}$. Не ограничивая общности, можем считать, что $0 < \lambda_k \le 1/2$. Если в некотором слагаемом из суммы (3) один из проекторов p_k или r_k равен e, то п. **(D)** леммы 5 и лемма 6 дают представление нужного вида для этого слагаемого.

Пусть p и r — два проектора в $\mathscr{M}$. Свяжем с p и r порожденную ими алгебру фон Неймана $\mathscr{N}$. По лемме 9 существует единственный проектор $z \in \mathscr{Z}(\mathscr{N})$ такой, что алгебра $\mathscr{N}_z$ имеет тип I_2 и алгебра $\mathscr{N}_{z^\perp}$ абелева. Пусть $0 < \lambda \le 1/2$ и $\lambda pr = \lambda prz + \lambda prz^\perp$. Поскольку оператор $prz^\perp$ является проектором, п. **(D)** леммы 5 и лемма 6 дают представление нужного вида для оператора $\lambda prz^\perp$. Разложим теперь оператор λprz в требуемой форме. Из теоремы Гельфанда о представлении абелевой унитальной C^*-алгебры следует, что алгебра $\mathscr{Z}(\mathscr{N}_z)$ *-изоморфна C^*-алгебре $C(\Omega)$ всех комплекснозначных непрерывных функций на стоуновском пространстве Ω всех характеров алгебры $\mathscr{Z}(\mathscr{N}_z)$. Теперь из леммы 1 вытекает, что алгебра $\mathscr{N}_z$ *-изоморфна матричной алгебре $\mathbb{M}_2(C(\Omega))$.

Для $\tilde{q} \in \mathbb{M}_2(C(\Omega))^{\mathrm{pr}}$ определим области постоянства ранга (или, что то же самое, области постоянства канонического следа tr):

$$\Omega_j(\tilde{q}) = \{\omega \in \Omega \mid \tilde{q}_{11}(\omega) + \tilde{q}_{22}(\omega) = j\}, \quad j \in \{0, 1, 2\}.$$

Множества $\Omega_j(\tilde{q})$ замкнуты (как прообразы замкнутых множеств $\{j\} \subset \mathbb{C}$ при непрерывном отображении) и образуют дизъюнктное покрытие пространства Ω. Из леммы 2 вытекает

Лемма 10. *Для каждого $\tilde{q} \in \mathbb{M}_2(C(\Omega))^{\mathrm{pr}}$ существуют такие $u \in \mathbb{M}_2(C(\Omega))^{\mathrm{u}}$ и замкнутое подмножество $\Omega_1'(\tilde{q}) \subset \Omega_1(\tilde{q})$, что*

$$u^*(\omega)\tilde{q}(\omega)u(\omega) = \mathrm{diag}(1, 0) \quad \text{для всех } \omega \in \Omega_1'(\tilde{q});$$

$$u^*(\omega)\tilde{q}(\omega)u(\omega) = \operatorname{diag}(0,1) \quad \textit{для всех } \omega \in \Omega_1(\tilde{q}) \setminus \Omega_1'(\tilde{q}).$$

Продолжим доказательство теоремы. Проекторы pz и rz отождествляется с $\tilde{p}, \tilde{r} \in \mathbb{M}_2(C(\Omega))^{\mathrm{pr}}$ соответственно. Тогда оператор λprz отождествляется с $\lambda\tilde{p}\tilde{r}$. Пусть

$$\Omega_{ij} = \Omega_i(\tilde{p}) \cap \Omega_j(\tilde{r}), \quad i,j \in \{0,1,2\}.$$

Все девять множеств Ω_{ij} открыто-замкнуты и образуют дизъюнктное покрытие пространства Ω. В этом случае функция $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$ непрерывна тогда и только тогда, когда все ее ограничения $\varphi|\Omega_{ij}$ $(i,j \in \{0,1,2\})$ непрерывны. Докажем существование представления

$$\lambda\tilde{p}\tilde{r} = \tilde{c}_1\tilde{d}_1 + \tilde{c}_2\tilde{d}_2, \quad \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2 \in \mathbb{M}_2(C(\Omega))^{\mathrm{pr}}. \tag{4}$$

Действительно, если $\omega \in \Omega_{00} \cup \Omega_{01} \cup \Omega_{10} \cup \Omega_{02} \cup \Omega_{20}$, то $\lambda\tilde{p}(\omega)\tilde{r}(\omega) = 0$ и можно положить $\tilde{c}_1(\omega) = \tilde{c}_2(\omega) = \tilde{d}_1(\omega) = \tilde{d}_2(\omega) = 0$.

Пусть $\omega \in \Omega_{12}$ и $u(\omega) \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^{\mathrm{u}}$ из леммы 10 для $\tilde{p}$. Если $\omega \in \Omega_{12} \cap \Omega_1'(\tilde{p})$, то $u^*(\omega)\tilde{p}(\omega)u(\omega) = \operatorname{diag}(1,0)$. С помощью формулы (1) получаем равенства

$$\begin{aligned}
\lambda\tilde{p}(\omega)\tilde{r}(\omega) = \lambda\tilde{p}(\omega) &= u(\omega)(\lambda u^*(\omega)\tilde{p}(\omega)u(\omega))u^*(\omega) = u(\omega)(\lambda\operatorname{diag}(1,0))u^*(\omega) \\
&= u(\omega)(\operatorname{diag}(1,0)(r^{(1,\lambda/2)} + r^{(-1,\lambda/2)}))u^*(\omega) \\
&= u(\omega)\operatorname{diag}(1,0)u^*(\omega)(u(\omega)r^{(1,\lambda/2)}u^*(\omega) + u(\omega)r^{(-1,\lambda/2)}u^*(\omega)).
\end{aligned}$$

Следовательно, для $\omega \in \Omega_{12} \cap \Omega_1'(\tilde{p})$ можно положить

$$\tilde{c}_1(\omega) = \tilde{c}_2(\omega) = u(\omega)\operatorname{diag}(1,0)u^*(\omega), \quad \tilde{d}_1(\omega) = u(\omega)r^{(1,\lambda/2)}u^*(\omega),$$
$$\tilde{d}_2(\omega) = u(\omega)r^{(-1,\lambda/2)}u^*(\omega).$$

Если $\omega \in \Omega_{12} \cap (\Omega_1(\tilde{p}) \setminus \Omega_1'(\tilde{p}))$, то аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned}
\lambda\tilde{p}(\omega)\tilde{r}(\omega) &= u(\omega)(\lambda\operatorname{diag}(0,1))u^*(\omega) \\
&= u(\omega)(\operatorname{diag}(0,1)(r^{(1,(1-\lambda)/2)} + r^{(-1,(1-\lambda/2))}))u^*(\omega) \\
&= u(\omega)\operatorname{diag}(0,1)u^*(\omega)(u(\omega)r^{(1,(1-\lambda/2))}u^*(\omega) + u(\omega)r^{(-1,(1-\lambda)/2)}u^*(\omega)).
\end{aligned}$$

Значит, для $\omega \in \Omega_{12} \cap (\Omega_1(\tilde{p}) \setminus \Omega_1'(\tilde{p}))$ можно положить

$$\tilde{c}_1(\omega) = \tilde{c}_2(\omega) = u(\omega)\operatorname{diag}(0,1)u^*(\omega), \quad \tilde{d}_1(\omega) = u(\omega)r^{(1,(1-\lambda)/2)}u^*(\omega),$$
$$\tilde{d}_2(\omega) = u(\omega)r^{(-1,(1-\lambda)/2)}u^*(\omega).$$

Случай $\omega \in \Omega_{21}$ аналогичен рассмотренному выше случаю $\omega \in \Omega_{12}$, поскольку $\lambda\tilde{p}(\omega)\tilde{r}(\omega) = \lambda\tilde{r}(\omega)$. Пусть $\omega \in \Omega_{21}$ и $u(\omega) \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^{\mathrm{u}}$ из леммы 10 для $\tilde{r}$. Если $\omega \in \Omega_{21} \cap \Omega_1'(\tilde{r})$, то положим

$$\tilde{c}_1(\omega) = \tilde{c}_2(\omega) = u(\omega)\operatorname{diag}(1,0)u^*(\omega), \quad \tilde{d}_1(\omega) = u(\omega)r^{(1,\lambda/2)}u^*(\omega),$$
$$\tilde{d}_2(\omega) = u(\omega)r^{(-1,\lambda/2)}u^*(\omega).$$

Для $\omega \in \Omega_{21} \cap (\Omega_1(\tilde{r}) \setminus \Omega_1'(\tilde{r}))$ можно положить

$$\tilde{c}_1(\omega) = \tilde{c}_2(\omega) = u(\omega)\operatorname{diag}(0,1)u^*(\omega), \quad \tilde{d}_1(\omega) = u(\omega)r^{(1,(1-\lambda)/2)}u^*(\omega),$$
$$\tilde{d}_2(\omega) = u(\omega)r^{(-1,(1-\lambda)/2)}u^*(\omega).$$

Если $\omega \in \Omega_{22}$, то

$$\lambda \tilde{p}(\omega)\tilde{r}(\omega) = \lambda \operatorname{diag}(1,1) = \operatorname{diag}(1,0) r^{(1,\lambda)} + r^{(-1,1-\lambda)} \operatorname{diag}(0,1),$$

т. е. можно положить

$$\tilde{c}_1(\omega) = \operatorname{diag}(1,0), \quad \tilde{c}_2(\omega) = r^{(-1,1-\lambda)}, \quad \tilde{d}_1(\omega) = r^{(1,\lambda)}, \quad \tilde{d}_2(\omega) = \operatorname{diag}(0,1).$$

Пусть теперь $\omega \in \Omega_{11}$ и $u(\omega) \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^{\mathrm{u}}$ из леммы 10 для $\tilde{p}$. Если $\omega \in \Omega_{11} \cap \Omega_1'(\tilde{p})$, то $u^*(\omega)\tilde{p}(\omega)u(\omega) = \operatorname{diag}(1,0)$. Тогда

$$\lambda \tilde{p}(\omega)\tilde{r}(\omega) = u(\omega)(\lambda \operatorname{diag}(1,0))u^*(\omega)\tilde{r}(\omega).$$

Матрица проектора $u^*(\omega)\tilde{r}(\omega)u(\omega)$ равна $r^{(\delta,t)}$ с некоторыми $0 \le t \le 1$ и $\delta \in \mathbb{C}$, $|\delta| = 1$, см. формулу (1). Пусть числа $\lambda \in (0, 1/2]$, $t \in (0,1)$ даны. Составим матричное уравнение

$$\lambda \operatorname{diag}(1,0) \cdot u^*(\omega)\tilde{r}(\omega)u(\omega) = \begin{pmatrix} \lambda t & \lambda\delta f(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \operatorname{diag}(1,0) \cdot (\tilde{a}(\omega) + \tilde{b}(\omega)) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta & \delta f(\alpha) - \delta f(\beta) \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\tilde{a}(\omega) = r^{(\delta,\alpha)}$, $\tilde{b}(\omega) = r^{(-\delta,\beta)}$. Неизвестные числа $\alpha, \beta \in (0,1)$ ищем из системы

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \lambda t, \\ f(\alpha) - f(\beta) = \lambda f(t). \end{cases}$$

Имеем $f(\alpha) - f(\lambda t - \alpha) = \lambda f(t)$. Определим функцию

$$g(\alpha) = f(\alpha) - f(\lambda t - \alpha) - \lambda f(t), \quad 0 \le \alpha \le \lambda t,$$

и найдем ее производную: $g'(\alpha) = f'(\alpha) + f'(\lambda t - \alpha) > 0$ при $0 < \alpha < \lambda t$. Очевидно, что

$$g(0) = -f(\lambda t) - \lambda f(t) < 0,$$
$$g(\lambda t) = f(\lambda t) - \lambda f(t) = \sqrt{\lambda t}(\sqrt{1 - \lambda t} - \sqrt{\lambda - \lambda t}) > 0.$$

По теореме о промежуточных значениях непрерывной функции на отрезке, уравнение $g(\alpha) = 0$ имеет единственный корень $\alpha_0 \in (0, \lambda t)$. Тогда $\beta_0 = \lambda t - \alpha_0 \in (0, \lambda t)$. Напомним, что все функции, являющиеся элементами матриц проекторов $\tilde{p}$ и $\tilde{r}$, непрерывны и найденные значения α_0 и β_0 непрерывным образом зависят от параметра $t = (u^*(\omega)\tilde{r}(\omega)u(\omega))_{11}$.

Итак,

$$\lambda \operatorname{diag}(1,0) \cdot u^*(\omega)\tilde{r}(\omega)u(\omega) = \operatorname{diag}(1,0) \cdot (\tilde{a}(\omega) + \tilde{b}(\omega))$$

с некоторыми $\tilde{a}(\omega), \tilde{b}(\omega) \in \mathbb{M}_2(\mathbb{C})^{\mathrm{pr}}$. Теперь

$$\lambda \tilde{p}(\omega)\tilde{r}(\omega) = u^*(\omega)(\lambda \operatorname{diag}(1,0))u(\omega)\tilde{r}(\omega)$$
$$= u^*(\omega)((\lambda \operatorname{diag}(1,0)u(\omega)\tilde{r}(\omega)u^*(\omega))u(\omega) = u^*(\omega)(\operatorname{diag}(1,0))(\tilde{a}(\omega) + \tilde{b}(\omega))u(\omega).$$

Следовательно, для $\omega \in \Omega_{11} \cap \Omega_1'(\tilde{p})$ можно положить $\tilde{c}_1(\omega) = \tilde{c}_2(\omega) = \tilde{p}(\omega)$, $\tilde{d}_1(\omega) = u^*(\omega)\tilde{a}(\omega)u(\omega)$, $\tilde{d}_2(\omega) = u^*(\omega)\tilde{b}(\omega)u(\omega)$.

Аналогичным образом разбирается случай, когда $\omega \in \Omega_{11} \cap (\Omega_1(\tilde{p}) \setminus \Omega_1'(\tilde{p}))$.

Таким образом, для любых $\tilde{p}, \tilde{r} \in \mathbb{M}_2(C(\Omega))^{\mathrm{pr}}$ и для любого $\lambda \in (0, 1/2]$ существует представление вида (4). Следовательно, слагаемое вида λpr из (3) представляется в виде конечной суммы попарных произведений проекторов. Тем самым $x = \sum p_m a_m$, где $p_m, a_m \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$. Случай собственно бесконечной алгебры полностью разобран.

Пусть теперь $\mathscr{M}$ — конечная алгебра фон Неймана без прямого абелева слагаемого. Тогда $\mathscr{M}$ *-изоморфна $\mathbb{M}_n(\mathscr{N})$, где $\mathscr{N}$ — некоторая алгебра фон Неймана и $2 \le n \in \mathbb{N}$. Представим произвольный оператор $x \in \mathscr{M}$ по лемме 7, в полученной сумме каждый неэрмитов идемпотент представим по лемме 3 и в новом представлении применим аналог п. **(C)** леммы 5 (он справедлив в силу спектральной теоремы и леммы 2) соответствующим образом. Имеем

$$x = \sum \lambda_k p_k r_k s_k, \quad \lambda_k > 0,\ p_k, r_k, s_k \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}.$$

Повторяя рассуждения с помощью лемм 1, 9 и 10 из доказательства для собственно бесконечного случая, каждое слагаемое вида λpr представим в виде конечной суммы попарных произведений проекторов. Тем самым $x = \sum p_m a_m b_m$, где $p_m, a_m, b_m \in \mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$. Из леммы 4 следует, что наименьшая верхняя граница числа сомножителей равна 3. Теорема доказана.

Следствие 1 [8, теорема]. *Каждый оператор $x \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ представляется в виде конечной суммы $x = \sum x_k$, где каждое x_k есть произведение не более чем двух проекторов при $\dim \mathscr{H} = \infty$ и не более чем трех проекторов при $2 \le \dim \mathscr{H} < \infty$.*

Из теоремы и леммы 4 вытекает известный факт (см., например, [9, с. 311]).

Следствие 2. *Если алгебра фон Неймана $\mathscr{M}$ собственно бесконечна, то на $\mathscr{M}$ нет нетривиальных конечных следов.*

Напомним, что *йорданово произведение* $x \circ y = \frac{1}{2}(xy + yx)$ на $\mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{sa}}$ коммутативно и билинейно, но не ассоциативно. *Йорданово тройное произведение* $\{xyz\} = \frac{1}{2}(xyz + zyx)$ на $\mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{sa}}$ выражается через йорданово произведение: $\{xyz\} = (x \circ y) \circ z + (y \circ z) \circ x - (x \circ z) \circ y$ [22, формула (2.20)].

Следствие 3. *Каждый оператор $x \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{sa}}$ представляется в виде конечной суммы $x = \sum x_k$, где каждое x_k есть йорданово произведение не более чем двух проекторов при $\dim \mathscr{H} = \infty$ и йорданово тройное произведение не более чем трех проекторов при $2 \le \dim \mathscr{H} < \infty$.*

Доказательство. Пусть $\dim \mathscr{H} = \infty$ и $x = \sum p_k q_k$ $(p_k, q_k \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{pr}})$ — представление оператора $x \in \mathscr{B}(\mathscr{H})^{\mathrm{sa}}$, полученное в следствии 1. Тогда

$$2x = x + x^* = \sum p_k q_k + \sum q_k p_k = \sum (p_k q_k + q_k p_k) = 2 \sum p_k \circ q_k.$$

Проверка для случая $2 \le \dim \mathscr{H} < \infty$ аналогична.

Следствие 4. *Пусть $\mathscr{M}$ — алгебра фон Неймана без прямого абелева слагаемого. Каждый оператор $x \in \mathscr{M}^{\mathrm{sa}}$ представляется в виде конечной суммы $x = \sum x_k$, где каждое x_k есть йорданово тройное произведение не более чем трех проекторов, а для собственно бесконечной $\mathscr{M}$ — йорданово произведение не более чем двух проекторов.*

Следствие 5. *Если $\mathscr{M}$ — алгебра фон Неймана без прямого абелева слагаемого, то множества $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ равномощны.*

Доказательство. Множество конечных подмножеств бесконечного множества $\mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ равномощно $\mathscr{M}^{\mathrm{pr}}$ [23, Сводка результатов, § 7, п. 7].

Следствие 6. *Если конечномерная C^*-алгебра $\mathscr{A}$ не имеет прямого абелева слагаемого, то*

$$\mathscr{A} = \Big\{ \sum p_k r_k q_k : \ p_k, r_k, q_k \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}} \Big\},$$

а наименьшая верхняя граница числа сомножителей равна трем.

Доказательство. Всякая ненулевая конечномерная C^*-алгебра *-изоморфна прямой сумме $\mathbb{M}_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \cdots \oplus \mathbb{M}_{n_k}(\mathbb{C})$ полных матричных алгебр для некоторых натуральных $n_1, \ldots, n_k$ [24, теорема 6.3.8]. Отсутствие прямого абелева слагаемого означает, что все $n_j \geq 2$ $(j = 1, \ldots, k)$.

Следствие 7. *Если $\mathscr{A}$ — UHF-алгебра и $\dim_{\mathbb{C}} \mathscr{A} > 1$, то множество*

$$\Big\{ \sum p_k r_k q_k : \ p_k, r_k, q_k \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}} \Big\}$$

плотно в $\mathscr{A}$. При этом наименьшая верхняя граница числа сомножителей равна трем.

Доказательство. Поскольку каждая из алгебр $\mathscr{A}_n$ в определении UHF-алгебры проста и конечномерна, она *-изоморфна полной матричной алгебре $\mathbb{M}_k(\mathbb{C})$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. UHF-алгебра $\mathscr{A}$ обладает единственным конечным следом τ с $\tau(e) = 1$ [24, замечание 6.2.4]. Остается применить лемму 4.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dixmier J.* Position relative de deux variétés linéares fermées dans un espace de Hilbert // Rev. Sci. Paris. 1948. V. 86. P. 387–399.
2. *Broise M.* Commutateurs dans le groupe unitaire d'un facteur // J. Math. Pures Appl. 1967. V. 46, N 3. P. 299–312.
3. *Fillmore P. A., Topping D. M.* Operator algebras generated by projections // Duke Math. J. 1967. V. 34, N 2. P. 333–336.
4. *Fillmore P. A.* Sums of operators with square zero // Acta. Sci. Math. (Szeged). 1967. V. 28, N 3–4. P. 285–288.
5. *Pearcy C., Topping D. M.* Sums of small numbers of idempotents // Michigan Math. J. 1967. V. 14, N 4. P. 453–465.
6. *Matsumoto K.* Self-adjoint operators as a real span of 5 projections // Math. Japon. 1984. V. 29, N 2. P. 291–294.
7. *Holland S. S., Jr.* Projections algebraically generate the bounded operators on real or quaternionic Hilbert space // Proc. Amer. Math. Soc. 1995. V. 123, N 11. P. 3361–3362.
8. *Бикчентаев А. М.* О представлении линейных операторов в гильбертовом пространстве в виде конечных сумм произведений проекторов // Докл. РАН. 2003. Т. 393, № 4. С. 444–447.
9. *Takesaki M.* Theory of operator algebras. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verl., 1979. V. I.
10. *Dixmier J.* Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien. 2nd ed. Paris: Gauthier-Villars, 1969.
11. *Sakai S.* C^*-algebras and W^*-algebras. New York; Heidelberg; Berlin: Springer-Verl., 1971.
12. *Deckard D., Pearcy C.* On matrices over ring of continuous complex valued functions on a Stonian space // Proc. Amer. Math. Soc. 1963. V. 14, N 2. P. 322–328.
13. *Wegge-Olsen N. E.* K-theory and C^*-algebras. A friendly approach. New York: Oxford Sci. Publ., The Clarendon Press, Oxford Univ. Press, 1993.
14. *Goldstein S., Paszkiewicz A.* Linear combinations of projections in von Neumann algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. V. 116, N 1. P. 175–183.
15. *Marcoux L. W., Murphy G. J.* Unitarily-invariant linear spaces in C^*-algebras // Proc. Amer. Math. Soc. 1998. V. 126, N 12. P. 3597–3605.
16. *Marcoux L. W.* On the linear span of the projections in certain simple C^*-algebras // Indiana Univ. Math. J. 2002. V. 51, N 3. P. 753–771.

17. *Бикчентаев А. М., Шерстнев А. Н.* Проекторно-выпуклые комбинации в C^*-алгебрах со свойством унитарной факторизации // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 4. С. 625–628.
18. *Koliha J. J.* Range projections of idempotents in C^*-algebras // Demonstratio Math. 2001. V. 24, N 1. P. 91–103.
19. *Kadison R. V.* Diagonalizing matrices // Amer. J. Math. 1984. V. 106, N 6. P. 1451–1468.
20. *Fujii J. I., Furuta T.* Holub's factorization and normal approximations of idempotent operators // Math. Japon. 1980. V. 25, N 1. P. 143–145.
21. *Fillmore P. A.* On sums of projections // J. Funct. Anal. 1969. V. 4, N 1. P. 146–152.
22. *Hance-Olsen H., Stfirmer E.* Jordan operator algebras. Boston; London; Melbourne: Pitman Publ. Inc., 1984.
23. *Бурбаки Н.* Теория множеств. М.: Мир, 1965.
24. *Мерфи Дж.* C^*-алгебры и теория операторов. М.: Факториал, 1997.

Статья поступила 2 апреля 2004 г.

Бикчентаев Айрат Мидхатович
НИИ математики и механики им. Н. Г. Чеботарёва Казанского гос. университета, ул. Университетская, 17, Казань 420008
Airat.Bikchentaev@ksu.ru