Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2005. Том 46, № 1

УДК 512.55

СВОЙСТВО МАЛОГО ИНДЕКСА ДЛЯ КВАДРАТИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

И. В. Чирков, М. А. Шевелин

Аннотация: Доказано свойство малого индекса для некоторых квадратичных пространств счетной размерности с симметричной или кососимметричной невырожденной формой.

Ключевые слова: счетная модель, группа автоморфизмов, базисное кофинальное свойство, свойство малого индекса, билинейная форма, квадратичное пространство.

§ 1. Введение

В работе мы будем использовать методы статьи Ходжеса, Ходкинсона, Ласкара и Шеллаха [1], а также подходы, подсказанные статьей Брайанта и Эванса [2], чтобы установить свойство малого индекса для некоторых векторных пространств с квадратичными формами.

Пусть M — бесконечная счетная модель, $G = \mathrm{Aut}(M)$ — ее группа автоморфизмов. Обозначим через G_Y поточечный стабилизатор множества $Y \subseteq M$. Говорят, что подгруппа H группы G *имеет малый индекс* в G, если $|G : H| < 2^{\aleph_0}$.

Определение. Модель M *обладает свойством малого индекса*, если для любой подгруппы H группы G, имеющей малый индекс, найдется такое конечное множество $Y \subseteq M$, что H содержит подгруппу G_Y.

Это определение может быть сформулировано на топологическом языке. Наделим группу G топологией, взяв подгруппы G_Y (Y — конечное подмножество M) в качестве базы открытых окрестностей единицы. Существует биекция между множеством правых смежных классов $(G_Y)g$ и множеством $\{Yg : g \in G\}$. Таким образом, любая открытая подгруппа группы G имеет малый индекс. Модель M обладает свойством малого индекса, если верно обратное, т. е. каждая подгруппа группы G, имеющая малый индекс, открыта в G.

Модели, обладающие свойством малого индекса, активно изучаются. Подробную информацию можно найти в обзорах [3, 4]. Перечислим здесь некоторые модели, обладающие свойством малого индекса.

1. Бесконечное множество без структуры [5, 6].

2. Векторные пространства бесконечной счетной размерности над конечными или счетными полями [7].

3. ω-Категоричные ω-стабильные структуры [1].

Свойство малого индекса установлено Брайантом и Эвансом [2] для свободных групп бесконечного счетного ранга в многообразии всех групп, любом многообразии нильпотентных групп и многообразии всех метабелевых групп. Брайант и Романьков в [8] доказали справедливость свойства малого индекса для свободных групп бесконечного счетного ранга в произвольном многообразии метабелевых групп и в любом многообразии, каждая группа которого есть расширение нильпотентной группы с помощью абелевой группы. Первый автор [9] установил свойство малого индекса для свободной алгебры Ли бесконечного счетного ранга над произвольным счетным полем.

Пусть K — счетное поле нулевой характеристики, V — векторное пространство над полем K бесконечной счетной размерности вместе с заданной на нем невырожденной рефлексивной билинейной формой f. Обозначим через

$$\mathrm{Aut}(V) = \{g \in GL(V) : f(vg, wg) = f(v, w)\}$$

группу невырожденных линейных преобразований пространства V, сохраняющих форму f. Для вектора-строки $v \in V$ через v^T обозначаем вектор-столбец, транспонированный по отношению к v. В случае, когда $f(v, w) = vw^T$, получаем бесконечномерную ортогональную группу $O(V)$. Если f — невырожденная кососимметричная форма, то получается бесконечномерная группа $Sp(V)$. Группу $O(V)$ можно трактовать как состоящую из бесконечных (направо и вниз) конечнострочных ортогональных обратимых матриц, а группу $Sp(V)$ — как состоящую из бесконечных конечнострочных обратимых матриц S со свойством $SJS^T = J$, где J — бесконечная блочно-диагональная матрица с блоками $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ по диагонали.

В настоящей работе будем считать, что f либо кососиметричная невырожденная, либо симметричная форма, имеющая относительно некоторого базиса единичную матрицу. В случае симметричной формы мы дополнительно предполагаем, что над K форма f является анизотропной, т. е. при $v \neq 0$ имеем $f(v, v) \neq 0$. Наш основной результат представляет следующая

Теорема 1. *Пусть K — счетное поле характеристики 0, V — векторное пространство бесконечной счетной размерности вместе с заданной на нем формой одного из двух типов, упомянутых выше. Тогда V обладает свойством малого индекса и, следовательно,* $\mathrm{Aut}(V)$ *не является объединением возрастающей счетной последовательности собственных подгрупп.*

В § 2 излагаются логические и топологические аспекты. В нем мы приводим три необходимые леммы, которые стали нам известны благодаря любезности Брайанта. Сначала мы устанавливаем так называемое базисное кофинальное свойство для квадратичных пространств, которое, как следует из работ [1, 2], влечет свойство малого индекса. В § 3 излагается вариант процесса ортогонализации, пригодный для счетных полей характеристики 0, для его применения нам нужна анизотропность над K всех форм вида $x_1y_1+\dots+x_ny_n$. Короткий § 4 содержит доказательство основной теоремы и некоторые нерешенные вопросы.

§ 2. Необходимые определения и факты из теории моделей

Определение. Пусть V — векторное пространство конечной или счетной размерности над полем K с определенной на нем невырожденной рефлексивной билинейной формой f. Будем говорить, что V — *удобное квадратичное пространство*, если в V существует базис $e_1, e_2, \dots$, ортонормированный или симплектический в зависимости от того, является ли форма f симметричной или кососимметричной.

Нам понадобятся некоторые определения и факты из теории моделей. Их можно найти в [1, 2]. Здесь приведены формулировки, адаптированные для векторных пространств с квадратичной формой.

Определение. Пусть V — удобное квадратичное пространство. Говорим, что V *обладает базисным кофинальным свойством* (б.к.с.), если для любого $\alpha \in \mathrm{Aut}(V)$ и любого натурального n (n четно, если f кососимметрична) найдутся натуральное $r \geq n$ (r четно, если f кососимметрична) и $\beta \in \mathrm{Aut}(\langle e_1, \ldots, e_r\rangle)$ такие, что $e_i\alpha = e_i\beta$, $i = 1, \ldots, n$.

Обозначим через $\mathbf{B}(V)$ множество подпространств в V, натянутых на конечные начальные части базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$, где $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ — некоторый ортонормированный (симплектический) базис V (если f кососимметрична, то считаем $n = 2k$ для некоторого натурального числа k).

Лемма 1. *Пусть V обладает б.к.с. Тогда V обладает следующими свойствами.*

1. *Кофинальность. Если $A \in \mathbf{B}(V)$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in G$, $X_1, \ldots, X_n$ — конечные подмножества V, то найдутся такие $B \in \mathbf{B}(V)$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathrm{Aut}(B)$, что B содержит $A, X_1, \ldots, X_n$ и $\alpha_i|X_i = \gamma_i|X_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

2. *Амальгамируемость. Если $A, B, C \in \mathbf{B}(V)$ и $A \subseteq B$, $A \subseteq C$, то существует такой $\alpha \in G_A$, что для любых $\beta \in \mathrm{Aut}(B\alpha)$ и $\gamma \in \mathrm{Aut}(C)$, удовлетворяющих условиям $A\beta = A\gamma = A$ и $\beta|A = \gamma|A$, существует такой $\delta \in G$, что $\delta|B\alpha = \beta$ и $\delta|C = \gamma$.*

Доказательство. Так как A конечномерно и в запись всех элементов из множеств $X_1, \ldots, X_n$ по базе входит лишь конечное число базисных элементов V, найдется такое подпространство $B_0 = \langle e_1, \ldots, e_m\rangle \in \mathbf{B}(V)$, которое содержит $A, X_1, \ldots, X_n$. Если f кососимметрична, то считаем $m = 2k$. Поскольку V обладает б.к.с., найдутся подпространство $B_1 = \langle e_1, \ldots, e_l\rangle \in \mathbf{B}(V)$, $l \geq m$ (l четно в кососимметрическом случае), и $\alpha_1 \in \mathrm{Aut}(B_1)$ такие, что $e_i\gamma_1 = e_i\alpha_1$, $i = 1, \ldots, m$. Аналогично для B_1 и γ_2 строится пространство B_2 и $\alpha_2 \in \mathrm{Aut}(B_2)$, при этом автоморфизм α_1 алгебры B_1 продолжается естественным образом до автоморфизма пространства B_2, который обозначим также через α_1. Очевидная индукция завершает доказательство свойства 1, при этом $B_n = B$.

Пусть A, B, C, как в 2. Можно считать, что $A = \langle e_1, \ldots, e_m\rangle$. Пусть $B = \langle f_1, \ldots, f_n\rangle$, где $\{f_1, \ldots\}$ — ортонормированный или симплектический базис в V (в последнем случае n четно). Пусть $\theta \in G$ такой, что $e_i\theta = f_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Так как V обладает б.к.с., найдутся такие r и $\varphi \in \mathrm{Aut}(\langle e_1, \ldots, e_r\rangle)$ (r четно в кососимметрическом случае), что $r \geq n$ и $e_i\varphi = e_i\theta = f_i$, $i = 1, \ldots, n$. Ясно, что $r \geq m$. Поскольку $\varphi \in \mathrm{Aut}(\langle e_1, \ldots, e_r\rangle)$, то $\{e_1\varphi, \ldots, e_r\varphi\}$ — ортонормированный (или симплектический) базис для $\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$. Набор $\{f_1, \ldots, f_n\}$ содержится в ортонормированном (или симплектическом) базисе пространства $\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$, тем самым любой автоморфизм пространства B продолжается до автоморфизма пространства $\langle e_1, \ldots, e_r\rangle$. Таким образом, если $\alpha \in G_A$, то каждая изометрия β пространства $B\alpha$ продолжается до изометрии β' пространства $\langle e_1, \ldots, e_r\rangle\alpha$, и поэтому можно считать, что $B = \langle e_1, \ldots, e_r\rangle$. Аналогично можно считать, что $C = \langle e_1, \ldots, e_s\rangle$, $s \geq m$ (s четно, если f кососимметрична). Ясно, что для таким образом определенных A, B, C существует $\alpha \in G_A$ такой, что $B\alpha = \langle e_1, \ldots, e_m, e_{s+1}, \ldots, e_{s+r-m}\rangle$. Лемма доказана.

Пусть L — произвольная счетная модель, обладающая б.к.с.

Определение. Назовем элемент $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in G^n$ $\mathbf{B}(L)$-*типичным*, если выполнены два условия.

1. Для всех $A \in \mathbf{B}(L)$ подгруппы G_B, где $A \subseteq B \in \mathbf{B}(L)$, $B\gamma_i = B$, $i = 1, \ldots, n$, образуют базис открытых окрестностей единицы.

2. Если

$$A \in \mathbf{B}(L), \quad A\gamma_i = A,\ i = 1, \ldots, n, \quad A \subseteq B \in \mathbf{B}(L),$$

$$\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathrm{Aut}(B), \quad \beta_i|A = \gamma_i|A, \quad i = 1, \ldots, n,$$

то найдется такой $\alpha \in G_A$, что

$$\gamma_i^\alpha|B = \beta_i,\ i = 1, \ldots, n, \quad \gamma_i^\alpha = \alpha^{-1}\gamma_i\alpha.$$

Наделим G^n топологией произведения. Говорим, что множество *имеет вторую категорию по Бэру*, если оно содержит счетное пересечение всюду плотных открытых множеств. Следуя [1], будем говорить, что L *имеет много* $\mathbf{B}(L)$-*типичных автоморфизмов*, если для любого натурального n множество элементов G^n, являющихся $\mathbf{B}(L)$-типичными, имеет вторую категорию по Бэру в G^n.

Три нижеследующие леммы принадлежат Брайанту и публикуются с его любезного согласия. Доказательства можно найти в [9].

Лемма 2. *Пусть $A \in \mathbf{B}(L)$ и $\mathbf{a}$ — конечный упорядоченный набор элементов из L. Тогда множество $X(A, \mathbf{a}) = \{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in G^n$: существует $B \in \mathbf{B}(L)$, $B = B\gamma_i$, $i = 1, \ldots, n$, $G_B \subseteq G_{\mathbf{a}}, A \subseteq B\}$ — открытое всюду плотное подмножество в G^n.*

Лемма 3. *Пусть $A, B \in \mathbf{B}(L)$, $A \subseteq B$, $\varphi_i \in \mathrm{Aut}(B)$, $A\varphi_i = A$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Запишем*

$$Y(A, B, \Phi) = \{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in G^n :\ \text{если } \gamma_i|A = \varphi_i|A (i = 1, \ldots, n),$$
$$\text{то существует } \alpha \in G_A \text{ такой, что } \gamma_i^\alpha|B = \varphi_i|B (i = 1, \ldots, n)\}.$$

Тогда множество $Y(A, B, \Phi)$ открыто и всюду плотно.

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$\{(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in G^n : (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \ - \ \mathbf{B}(L)\text{-типичный}\}$$
$$= \bigcap_{A, \mathbf{a}} X(A, \mathbf{a}) \cap \bigcap_{A, B, \Phi} Y(A, B, \Phi).$$

Непосредственным следствием лемм 2–4 является

Теорема 2. *Пусть L — удобное квадратичное пространство счетной размерности над полем K, обладающее б.к.с. Тогда L имеет много $\mathbf{B}(L)$-типичных автоморфизмов.*

Теорема 3. *Пусть L — удобное квадратичное пространство счетной размерности над не более чем счетным полем, обладающее б.к.с. Тогда L обладает свойством малого индекса. Более того, $\mathrm{Aut}(L)$ не является объединением счетной последовательности собственных подгрупп.*

Доказательство. Пространство L имеет много $\mathbf{B}(L)$-типичных автоморфизмов по теореме 2. Из теоремы 5.3 работы [1] следует, что L обладает свойством малого индекса.

Далее предположим, что $G = \mathrm{Aut}(L) = \bigcup\limits_m G_m$, где $G_1 \subseteq G_2 \subseteq \ldots$ — последовательность собственных подгрупп группы G. Докажем сначала, что никакая подгруппа G_n не может быть открытым множеством.

Предположим противное. Пусть нашлась открытая подгруппа G_m, т. е. $G_Y \subseteq G_m$ для некоторого конечного подмножества $Y \subseteq L$. Без потери общности можно предполагать, что $Y = \{e_1, \ldots, e_n\}$ (n четно в кососимметрическом случае). Увеличивая, если необходимо, номер m, считаем, что G_m содержит автоморфизм, переводящий e_i в e_{n+i}, $i = 1, \ldots, n$. Для всех $r \geq n$ группа G_Y (а следовательно, и G_m) содержит автоморфизм, переводящий e_{n+i} в e_{r+i}, $i = 1, \ldots, n$, значит, G_m содержит автоморфизм, переводящий e_i в e_{r+i}, $i = 1, \ldots, n$. Таким образом, $G_{\{e_{r+1}, \ldots, e_{r+n}\}} \subseteq G_m$ для любых $r \geq n$. Пусть $\alpha \in G$. Тогда из б.к.с. следует существование натурального r и $\beta \in \mathrm{Aut}(\langle e_1, \ldots, e_r \rangle)$ таких, что $r \geq n$ и $e_i\beta = e_i\alpha$, $i = 1, \ldots, n$. Пусть β' — элемент G такой, что $e_i\beta' = e_i\beta$, $i = 1, \ldots, r$, и $e_i\beta' = e_i$, $i \geq r$. Тогда $\beta' \in G_m$ и $\beta'\alpha^{-1} \in G_Y \subseteq G_m$. Таким образом, $\alpha \in G_m$ и, следовательно, $G_m = G$; противоречие. Тем самым никакая подгруппа G_m не может быть открытой.

По теореме 2 L имеет много $B(L)$-типичных автоморфизмов. Доказательство может быть завершено тем же образом, что и доказательство теоремы 6.1 работы [1].

§ 3. Немного линейной алгебры

Здесь мы изложим вариант процесса ортогонализации, применимый над всеми полями характеристики 0, над которыми форма $f(u, v) = uv^T$ анизотропна.

Пусть L — удобное конечномерное пространство над счетным полем K характеристики 0 с *анизотропной* формой $f(u, v) = uv^T$. Мы пишем (u, v) вместо $f(u, v)$. Обозначим, как обычно, $V^\perp = \{a \in L \mid (V, a) = 0\}$. Если $a \in L$, то очевидные примеры показывают, что подпространство $a^\perp$ может не оказаться удобным. Однако, если $(a, a) = 1$, то такого быть не может.

Лемма 5. *Пусть $L = K^n$ и $n \geq 2$. Тогда каждый вектор $u \in L$ со свойством $(u, u) = 1$ может быть дополнен до ортогональной $n \times n$-матрицы $U \in O_n(K)$.*

Доказательство. Пусть

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \quad u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2 = 1.$$

Если $u_1 = 1$, то из анизотропности следует, что $u_2 = \cdots = u_n = 0$ и, следовательно, u дополняется единичной матрицей. Поэтому можно предположить, что $u_1 \neq 1$. Рассмотрим систему n линейных уравнений относительно $\frac{n^2-n}{2}$ неизвестных с матрицей

$$\begin{pmatrix}
-u_2 & -u_3 & \ldots & -u_n & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1+u_1 \\
-u_1+1 & 0 & \ldots & 0 & -u_3 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & u_2 \\
0 & -u_1+1 & \ldots & 0 & u_2 & -u_4 & \ldots & 0 & \ldots & u_3 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -u_j & \ldots & u_i \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & u_i & \ldots & u_j \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & -u_1+1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & u_n
\end{pmatrix},$$

в которой последний столбец — это столбец свободных членов. Обозначим через $a_1, a_2, \dots a_n$ строчки этой матрицы. Так как

$$(1-u_1)a_1 - u_2a_2 - \dots - u_na_n = \big(0, 0, \dots, 0, 1 - u_1^2 - \dots - u_n^2\big)$$

есть нулевой вектор, первое уравнение можно выбросить. Оставшаяся система совместна по теореме Кронекера — Капелли, поскольку матрица оставшейся системы содержит диагональный минор порядка $n-1$, равный $(1-u_1)^{n-1} \neq 0$. Обозначим какое-нибудь решение этой системы через

$$(x_{12}, \dots, x_{1n}, x_{23}, \dots, x_{2n}, \dots, x_{n-1,n})$$

и положим $x_{ii} = 0$, $x_{ij} = -x_{ji}$ при $i > j$. Полученная $n \times n$-матрица $X = (x_{ij})$ составлена из элементов из поля K, кососимметрична и удовлетворяет равенству $u(X-E) = e_1(X+E)$. Здесь $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

Воспользуемся преобразованием Кэли. Матрица $X - E$ невырожденна, так как собственное число кососимметричной матрицы не может быть единицей. Матрица $U = (X+E)(X-E)^{-1}$ ортогональна, и $u = e_1U$, поэтому U дополняет u до ортогональной матрицы.

Пусть 0_m обозначает нулевую строчку длины m.

Следствие 1. *Группа $O_n(K)$ действует на K-сфере $S_K^{n-1} = \{u \in K^n \mid (u,u) = 1\}$ транзитивно. При этом стабилизатор точки сопряжен с подгруппой*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0_{n-1} \\ 0_{n-1}^T & O_{n-1}(K) \end{pmatrix} \cong O_{n-1}(K).$$

Следствие 2. *Пусть $u_1, \dots, u_m$ — ортонормированная система в K^n. Тогда найдется ортогональная матрица U с первыми m строками $u_1, \dots, u_m$.*

Доказательство. Очевидно, $m \leq n$. Применим индукцию по m. Случай $m = 1$ разобран в лемме 5. Пусть $g \in O_n(K)$ — матрица такая, что $u_1g = e_1$. Рассмотрим ортонормированную систему $u_1g, \dots, u_mg$. Поскольку $(u_1g, u_jg) = 0$ при $2 \leq j \leq m$, первые координаты векторов u_jg нулевые при тех же j. Отбросим у векторов u_jg $(2 \leq j \leq m)$ первые координаты. Полученная ортонормированная система из $m-1$ векторов в K^{n-1} дополняется до ортогональной матрицы $g_1 \in O_{n-1}(K)$. Матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0_{n-1} \\ 0_{n-1}^T & g_1 \end{pmatrix} g^{-1}$$

искомая.

Следствие 3. *Пусть V — удобное квадратичное подпространство в $L = K^n$, $f(u,v) = uv^T$. Тогда $L = V \perp V^\perp$ и подпространство $V^\perp$ удобно.*

Лемма 6. *Пусть L — конечномерное удобное квадратичное пространство над полем K. Тогда каждое удобное квадратичное подпространство в L имеет удобное ортогональное дополнение.*

Для пространств с кососимметричной f — это переформулировка хорошо известного факта о гиперболических базисах, а для симметричной f — следствие 3 из леммы 5.

§ 4. Доказательство теоремы 1

Лемма 7. *Удобное квадратичное пространство счетной размерности над K обладает б.к.с.*

Доказательство. Пусть L — удобное квадратичное пространство счетной размерности и $e_1, e_2, \ldots$ — его ортонормированный (симплектический) базис. Если $\alpha \in G = \mathrm{Aut}(L)$ и $n \in \mathbb{N}$, то существует такое натуральное $r \geq n$, что $\langle e_1, \ldots, e_n \rangle \alpha \subseteq \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$. Таким образом,

$$\langle e_1, \ldots, e_n \rangle \subseteq \langle e_1, \ldots, e_r \rangle \alpha^{-1}.$$

По лемме 6 множество $\{e_1, \ldots, e_n\}$ может быть дополнено до ортонормированного (симплектического) базиса пространства $\langle e_1, \ldots, e_r \rangle \alpha^{-1}$, а множество $\{e_1\alpha, \ldots, e_n\alpha\}$ — до ортонормированного (симплектического) базиса пространства $\langle e_1, \ldots, e_r \rangle$. Поэтому в пространстве $\langle e_1, \ldots, e_r \rangle$ можно выбрать два таких ортонормированных (симплектических) базиса, что начальным отрезком первого из них будет $e_1\alpha, \ldots, e_n\alpha$, а начальным отрезком второго — $e_1, \ldots, e_n$. Отсюда следует, что найдется такой автоморфизм $\beta \in \mathrm{Aut}(\langle e_1, \ldots, e_r \rangle)$, что $e_i\beta = e_i\alpha$, $i = 1, \ldots, n$, а это и есть базисное кофинальное свойство. Лемма доказана.

Теорема 1 является непосредственным следствием леммы 7 и теоремы 3.

В заключение мы хотим сформулировать следующие вопросы. (Стандартной называем форму, сопоставляющую двум векторам их обычное скалярное произведение.)

Вопрос 1. *Справедлива ли теорема 1 для стандартной не анизотропной симметричной формы (например, над полем $Q(\sqrt{-1})$)?*

Вопрос 2. *Имеет ли место свойство малого индекса для квадратичных пространств счетной размерности над полем рациональных чисел с симметричной формой, отличной от стандартной?*

Вопрос 3. *Пусть K — счетное поле нулевой характеристики, $P = K[t]$ — алгебра многочленов. Рассмотрим свободный P-модуль L бесконечного счетного ранга. На этом модуле можно определить билинейную форму $(u, v) = uv^T$ со значениями в P и соответствующую ортогональную группу. Верно ли, что L обладает свойством малого индекса?*

По этому поводу уместно отметить, что по теореме Хардера каждая невырожденная симметричная билинейная форма на свободном P-модуле конечного ранга получается из некоторой билинейной формы над K обычным расширением кольца скаляров.

Мы благодарны В. А. Романькову, привлекшему наше внимание к свойству малого индекса, и Р. М. Брайанту за предоставленные материалы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hodges W., Hodkinson I., Lascar D., Shellah S.* The small index property for ω-stable ω-categorical structures and for the random graph // London Math. Soc. 1993. V. 48. P. 204–218.
2. *Bryant R., Evans D. M.* The small index property for free groups and relatively free groups // London Math. Soc. 1997. V. 55. P. 363–369.
3. *Kaye R., Macpherson D.* Models and groups // Automorphisms of First-Order Structures (ed. R. Kaye and D. Macpherson). Oxford: Clarendon Press, 1994. P. 3–31.
4. *Lascar D.* Au tour de la properiété du petit indice // Proc. London Math. Soc. 1991. V. 62. P. 25–53.

5. *Semmes S. W.* Endomorphisms of infinite symmetric groups // Abstracts Amer. Math. Soc. 1981. V. 2. P. 426.
6. *Dixon J. D., Neumann P. M., Thomas S.* Subgroups of small index in infinite symmetric groups // Bull. London Math. Soc. 1986. V. 18. P. 580–586.
7. *Evans D. M.* Subgroups of small index in infinite general linear groups // Bull. London Math. Soc. 1986. V. 18. P. 587–590.
8. *Bryant R. M., Roman'kov V. A.* Automorphisms groups of relatively free groups // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1999. V. 127. P. 411–424.
9. *Чирков И. В.* Свойство малого индекса для алгебр // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 4. С. 929–934.

Статья поступила 10 февраля 2004 г.

Чирков Игорь Викторович
Омский гос. университет, кафедра информационных систем,
пр. Мира, 55-А, Омск 644077
chirkov@math.omsu.omskreg.ru

Шевелин Михаил Александрович
Омский гос. университет, кафедра алгебры, пр. Мира, 55-А, Омск 644077
shevelin@math.omsu.omskreg.ru